

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5

ปริพันธ์สองชั้น

เนื้อหาประจำบท

1. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
2. สมบัติของปริพันธ์สองชั้น
3. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถหาพื้นที่ของผลบวกกรีนมันน์ได้
2. อธิบายความสัมพันธ์ของพื้นที่ของผลบวกกรีนมันน์ และ $\iint_D f(x, y) dA$ ได้
3. หาค่า $\iint_D f(x, y) dA$ โดยใช้พื้นที่ของผลบวกกรีนมันน์ได้
4. สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้
5. สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรโดยใช้สมบัติของปริพันธ์สองชั้นได้
6. สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนทั่วไปได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 การหาผลบวกกรีนมันน์
 - 1.2 ความสัมพันธ์ของพื้นที่ของผลบวกกรีนมันน์ และ $\iint_D f(x, y) dA$
 - 1.3 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
 - 1.4 สมบัติของปริพันธ์สองชั้น
 - 1.5 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนทั่วไป
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
 - 2.1. ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้นเพิ่มเติม
 - 2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation
3. ใบงาน

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. การตอบคำถาม
3. ทดสอบท้ายชั่วโมง
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 5

ปริพันธ์สองชั้น

การหาปริพันธ์ที่ผ่านมานั้นเป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร และถ้าเป็นฟังก์ชันของตัวแปรที่มากกว่าหนึ่งตัวแปรก็สามารถหาปริพันธ์ได้เช่นกัน และจะมีความหมายแตกต่างกันออกไป การหาปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชันสองตัวแปร และการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร ในบทนี้จะเน้นการหาปริพันธ์บนโดเมนที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและจะนำไปสู่การหาปริพันธ์บนโดเมนทั่ว ๆ ไป ดังนั้นความรู้พื้นฐานที่จำเป็นมากสำหรับเนื้อหาในบทนี้ก็คือการเขียนกราฟของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร และสองตัวแปร พร้อมทั้งการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต เพื่อให้ได้คำตอบถูกต้องและรวดเร็ว ผู้เรียนควรนำโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการเขียนกราฟและตรวจสอบคำตอบจะทำให้เกิดความเข้าใจง่ายมากขึ้น

5.1 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

Michael. C. (2022 : 321-324) Paul. D. (2011 : 154-157) และ อรุณี เจริญราช (2550 : 233-234) ได้อธิบายการหาค่าของปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนที่เป็นอาณาบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากดังต่อไปนี้

กำหนด $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนโดเมน $D \in [a, b] \times [c, d]$ และ $f : D \rightarrow R$ ถ้าแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วงย่อยที่จุด $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ โดยที่

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$$

และแบ่งช่วง $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยที่จุด $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ โดยที่

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$$

กำหนดพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$D_{ij} = \Delta A_{ij} = \Delta x_i \times \Delta y_j$$

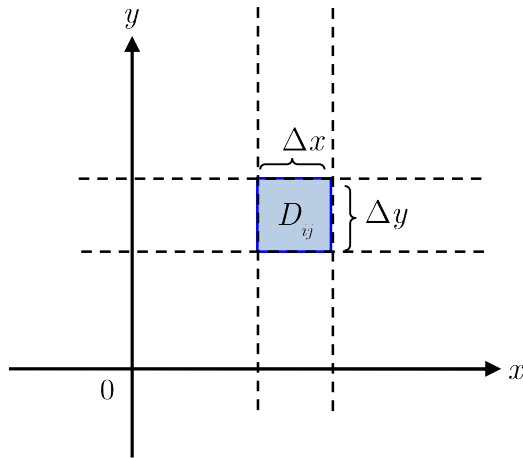
ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูป ย่อย ๆ โดยที่

$$\Delta A_{ij} = [x_{i-1} - x_i] \times [y_{j-1} - y_j]$$

$$\Delta x_i = x_{i-1} - x_i \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\Delta y_j = y_{j-1} - y_j \quad \text{เมื่อ } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

แสดงได้ดังภาพประกอบ 5.1



ภาพประกอบ 5.1 กราฟแสดงพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก D_{ij}

กำหนดให้ (x_{ij}, y_{ij}) เป็นจุดใด ๆ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก D_{ij} และ

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$$

เรียก S_{mn} ว่าผลบวกกริมันน์ของ f บน D สำหรับแต่ละ D_{ij} ถ้า Δx_i มีค่าเข้าใกล้ 0 สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, m \rightarrow \infty$ และ Δy_j มีค่าเข้าใกล้ 0 สำหรับ $j = 1, 2, 3, \dots, n \rightarrow \infty$ ทุก ๆ วิธีของการแบ่งและการเลือกจุด (x_{ij}, y_{ij}) ในแต่ละ D_{ij} และ $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} S_{mn}$ หาค่าได้จะเรียก f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D และเรียกค่า $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} S_{mn}$ ว่าปริพันธ์สองชั้นของ f บน D แทนด้วยสัญลักษณ์

$$\iint_D f \text{ หรือ } \iint_D f(x, y) dA \text{ หรือ } \iint_D f(x, y) dx dy$$

ทฤษฎีบท 5.1

ให้ $f: D \rightarrow R$ เมื่อ $D = [a, b] \times [c, d]$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D หรืออาณาบริเวณที่ f ไม่มีความต่อเนื่องมีพื้นที่เป็นศูนย์ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D

การดำเนินการหาปริพันธ์นั้น สามารถหาได้จากลิมิตของผลบวกกริมันน์ ซึ่งก็คือ $\iint_D f(x, y) dA$ แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.1 กำหนดให้ $f(x, y) = xy$ และ $D = [1, 4] \times [1, 3]$ จงหา $\iint_D f(x, y) dA$

โดยใช้ลิมิตของผลบวกกริมันน์

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x, y) = xy$ เป็นฟังก์ชันพหุนามสองตัวแปร

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องบน

$$D = [1, 4] \times [1, 3]$$

แบ่งช่วง $[1, 4]$ ออกเป็น m ส่วนเท่า ๆ กันดังนี้

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{4-1}{m} = \frac{3}{m}$$

$$\text{โดยที่ } x_i = 1 + \frac{3i}{m}, i = 1, 2, 3, \dots, m$$

และแบ่งช่วง $[1, 3]$ ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กันดังนี้

$$\Delta y = y_j - y_{j-1} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\text{โดยที่ } y_j = 1 + \frac{2j}{n}, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

เลือก $(x_{ij}, y_{ij}) = (x_i, y_j)$ สำหรับทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n$

จะได้ผลบวกกริมันน์คือ

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) (\Delta x_i \times \Delta y_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \left(\frac{3}{m} \times \frac{2}{n} \right) \\ &= \frac{6}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \\ &= \frac{6}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j \\ &= \frac{6}{mn} \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n y_j \\ &= \frac{6}{mn} \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{2j}{n} \right) \\ &= \frac{6}{mn} \sum_{i=1}^m x_i \left(\sum_{j=1}^n 1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n j \right) \\ &= \frac{6}{mn} \sum_{i=1}^m x_i \left[n + \frac{2}{n} \left(\frac{n}{2} (n+1) \right) \right] \\ &= \frac{6}{mn} \sum_{i=1}^m x_i (2n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6(2n+1)}{mn} \sum_{i=1}^m x_i \\
&= \frac{6(2n+1)}{mn} \sum_{i=1}^m \left(1 + \frac{3i}{m}\right) \\
&= \frac{6(2n+1)}{mn} \left(\sum_{i=1}^m 1 + \sum_{i=1}^m \frac{3i}{m} \right) \\
&= \frac{6(2n+1)}{mn} \left(\sum_{i=1}^m 1 + \frac{3}{m} \sum_{i=1}^m i \right) \\
&= \frac{6(2n+1)}{mn} \left[m + \frac{3}{m} \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) \right] \\
&= \frac{6(2n+1)}{mn} \left(\frac{5m+3}{2} \right) \\
&= 3 \frac{(2n+1)(5m+3)}{mn} \\
&= 3 \frac{(2n+1)}{n} \frac{(5m+3)}{m} \\
&= 3 \left(2 + \frac{1}{n} \right) \left(5 + \frac{3}{m} \right)
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} S_{mn} &= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} 3 \left(2 + \frac{1}{n} \right) \left(5 + \frac{3}{m} \right) \\
&= 3(2)(5) \\
&= 30
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\iint_D f(x, y) dA = 30$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าการหาปริพันธ์โดยใช้ผลบวกกริมันน์ นั้นมีกระบวนการหลายขั้นตอน และทำได้ยาก แต่ในทางปฏิบัติจะไม่หาปริพันธ์ดังกล่าวด้วยวิธีการใช้ผลบวกกริมันน์ แต่จะการใช้การหาปริพันธ์ที่เรียกว่าปริพันธ์ซ้อนโดย Harold Jan R.T. (2015 : 117-120) Gilbert. S. (2018 : 523-525) และ อุษณีย์ สิริวัฒน์ (2552 : 68) ได้แสดงไว้ดังต่อไปนี้

ถ้า $D = [a, b] \times [c, d]$ กำหนดให้ x เป็นค่าคงที่ ก็จะทำให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปร y เพียงตัวเดียวแล้วจึงหา $\int_c^d f(x, y) dy$ ได้ ซึ่งค่าที่ได้จะเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของตัวแปร x

ถ้า $\int_c^d f(x, y) dx = g(y)$ แล้วจึงหา $\int_a^b g(y) dy = g(y)$ ค่าที่ได้จะเท่ากับ $\iint_D f(x, y) dA$
 ดังนั้นการหา $\iint_D f(x, y) dA$ สามารถหาได้ดังนี้ คือ

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

และสรุปได้เป็นทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2

ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \in [a, b] \times [c, d]$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D แล้วจะได้ว่า

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

ความหมายของสัญลักษณ์ต่าง ๆ มีดังนี้

$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ หมายถึง ปริพันธ์ของ f โดยหาปริพันธ์ซ้อนเทียบกับ y
 และ x ตามลำดับ

$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$ หมายถึง ปริพันธ์ของ f โดยหาปริพันธ์ซ้อนเทียบกับ x
 และ y ตามลำดับ

ตัวอย่าง 5.2 กำหนดให้ $f(x, y) = xy$ และ $D = [1, 4] \times [1, 3]$ จงหา $\iint_D f(x, y) dA$

วิธีทำ เนื่องจาก $\iint_D f(x, y) dA = \int_1^4 \int_1^3 f(x, y) dy dx = \int_1^4 \int_1^3 f(x, y) dx dy$

สำหรับในตัวอย่างนี้จะแสดงทั้งสองแบบเพื่อที่จะเป็นการตรวจสอบว่าค่าของปริพันธ์ที่ได้ต้องมีค่าเท่ากัน

$$\begin{aligned} \int_1^4 \int_1^3 f(x, y) dy dx &= \int_1^4 \int_1^3 xy dy dx \\ &= \int_1^4 \left. \frac{xy^2}{2} \right|_1^3 dx \\ &= \int_1^4 \left[\frac{x3^2}{2} - \frac{x(1)^2}{2} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^4 x \left[\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] dx \\
&= \int_1^4 4x \, dx \\
&= \left[\frac{4x^2}{2} \right]_1^4 \\
&= \left[2x^2 \right]_1^4 \\
&= 2(4)^2 - 2(1)^2 \\
&= 30
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{และ } \int_1^3 \int_1^4 f(x, y) \, dx dy &= \int_1^3 \int_1^4 xy \, dx dy \\
&= \int_1^3 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_1^4 dy \\
&= \int_1^3 \left[\frac{4^2 y}{2} - \frac{1^2 y}{2} \right] dy \\
&= \int_1^3 y \left[8 - \frac{1}{2} \right] dy \\
&= \int_1^3 \frac{15}{2} y \, dy \\
&= \frac{15}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^3 \\
&= \frac{15}{2} \left[\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] \\
&= 30
\end{aligned}$$

$$\text{จะเห็นว่า } \iint_D f(x, y) \, dA = \int_1^4 \int_1^3 f(x, y) \, dy dx = \int_1^3 \int_1^4 f(x, y) \, dx dy = 30$$

$$\text{ดังนั้น } \iint_D f(x, y) \, dA = 30$$

จากการหาปริพันธ์ซ้อนในตัวอย่าง 5.2 นั้นจะเห็นว่าคุณสมบัติคล้าย ๆ กับการหาปริพันธ์ฟังก์ชันตัวแปรเดียวโดย Dawkins. P. (2018 : 167) และ ชีระศักดิ์ อรุณานนท์ (2558 : 353) ได้แสดงคุณสมบัติปริพันธ์สองชั้นและตัวอย่างไว้ดังต่อไปนี้

5.2 สมบัติของปริพันธ์สองชั้น

1. $\iint_D kf(x, y) dA = k \iint_D f(x, y) dA$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
2. $\iint_D f(x, y) + g(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA$
3. กำหนดให้ $D = D_1 \cup D_2$ และ $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ แล้ว

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$

ตัวอย่าง 5.3 จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_2^4 (2 + x^2 y) dy dx$ และ $\int_2^4 \int_0^1 (2 + x^2 y) dx dy$

วิธีทำ $\int_0^1 \int_2^4 (2 + x^2 y) dy dx = \int_0^1 \left[2y + \frac{x^2 y^2}{2} \right]_2^4 dx$

$$= \int_0^1 \left[2(4) + \frac{x^2 (4)^2}{2} \right] - \left[2(2) + \frac{x^2 (2)^2}{2} \right] dx$$

$$= \int_0^1 [8 + 8x^2] - [4 + 2x^2] dx$$

$$= \int_0^1 [4 + 6x^2] dx$$

$$= [4x - 2x^3]_0^1$$

$$= [4(1) - 2(1)^3] - [4(0) - 2(0)^3]$$

$$= 2$$

และ

$$\int_2^4 \int_0^1 (2 + x^2 y) dx dy = \int_2^4 \left[2x + \frac{x^3 y}{3} \right]_0^1 dy$$

$$= \int_2^4 \left[2(1) + \frac{(1)^3 y}{3} \right] - \left[2(0) + \frac{(0)^3 y}{3} \right] dy$$

$$= \int_2^4 \left[2 + \frac{y}{3} \right] dy$$

$$= \left[2y - \frac{y^2}{6} \right]_2^4$$

$$= \left[2(4) - \frac{(4)^2}{6} \right] - \left[2(2) - \frac{(2)^2}{6} \right]$$

$$= \left[\left(8 - \frac{16}{6} \right) - \left(4 - \frac{4}{6} \right) \right]$$

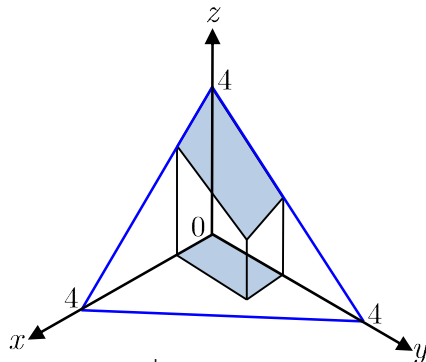
$$= 2$$

ดังนั้น $\int_0^1 \int_2^4 (2 + x^2 y) dy dx = 2$ และ $\int_2^4 \int_0^1 (2 + x^2 y) dx dy = 2$

สำหรับการหาปริพันธ์สองชั้นในตัวอย่างที่ผ่านมาจะเป็นการใช้คุณสมบัติโดยตรงที่มีอยู่แล้ว เราเพียงแค่เลือกว่าควรหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x หรือหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร y ก่อนว่าเทียบกับตัวแปรใดจะทำได้ง่ายและรวดเร็วกว่า แต่เราก็พบว่าไม่ว่าจะหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปรใดก่อน คำตอบที่ได้ต้องเท่ากัน สำหรับตัวอย่างต่อไปจะเป็นเหมือนการประยุกต์วิเคราะห์และสร้างอันดับของปริพันธ์สองชั้นโดย Sigurd A. (2010 : 110-111) และ George B. and Thomas, Jr (2016 : 1007) ได้แสดงตัวอย่างไว้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.4 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่เหนือระนาบ $f(x, y) = 4 - x - y$ และอยู่เหนือบริเวณ $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

วิธีทำ วาดกราฟแสดงปริมาตรรูปทรงตันของ $f(x, y) = 4 - x - y$ เหนือ $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ ได้ดังนี้



ปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่เหนือระนาบ $f(x, y) = 4 - x - y$ และอยู่เหนือบริเวณ $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ แทนด้วย

$$V = \int_0^1 \int_0^2 f(x, y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[4(2) - 2x - \frac{(2)^2}{2} \right] - \left[4(0) - x(0) - \frac{(0)^2}{2} \right] dx \\
&= \int_0^1 [8 - 2x - 2] dx \\
&= \int_0^1 [6 - 2x] dx \\
&= [6x - x^2]_0^1 \\
&= [(6(1) - (1)^2) - (6(0) - (0)^2)] \\
&= 5
\end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่เหนือระนาบ $f(x, y) = 4 - x - y$ และอยู่เหนือบริเวณ $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ เท่ากับ 5 ลูกบาศก์หน่วย

นอกจากนี้ปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรยังสามารถหาได้ในฟังก์ชันอดิศัยได้อีกด้วยซึ่งในที่นี้จะยกตัวอย่างที่ Corral. M. (2021 : 3.1.2) ได้แสดงไว้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.5 จงหาค่าของ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(x + y) dx dy$

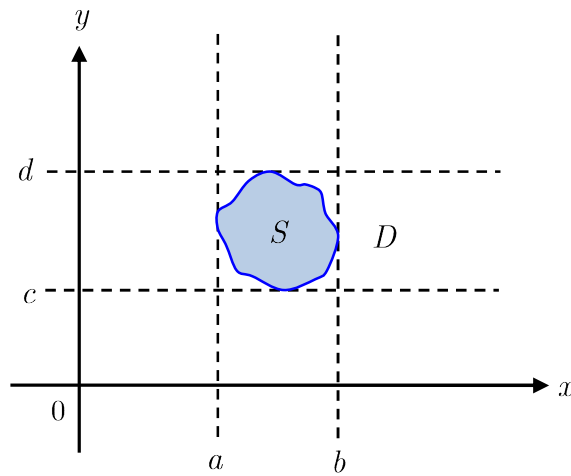
$$\begin{aligned}
\text{วิธีทำ} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(x + y) dx dy &= \int_0^{2\pi} [-\cos(x + y)]_0^{\pi} dy \\
&= \int_0^{2\pi} [-\cos(\pi + y)] - [-\cos(\pi + y)]_0^{\pi} dy \\
&= \int_0^{2\pi} [-\cos(\pi + y) + \cos y] dy \\
&= [-\sin(\pi + y) + \sin y]_0^{2\pi} \\
&= [-\sin(\pi + 2\pi) + \sin 2\pi] - [-\sin(\pi + 0) + \sin 0] \\
&= -\sin 2\pi + \sin 2\pi + \sin \pi - \sin 0 \\
&= -0 + 0 + 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(x + y) dx dy = 0$$

5.3 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

นอกจากการหาปริพันธ์ฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แล้วสำหรับโดเมนทั่ว ๆ ไปก็สามารถหาค่าได้เช่นกัน โดย Michael. C. (2022 : 321-324) ธนชัยศ จำปาหวาย. (2564 : 180-187) และ ดำรง ทิพย์โยธา และคณะ (2559 : 386) ได้อธิบายไว้ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $f : S \rightarrow R$ เมื่อ $S = R \times R$ โดยที่ S เป็นเซตปิดและมีขอบเขตดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 5.2 กราฟแสดงโดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปร

D คืออาณาบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $D = \{(x, y) : x \in [a, b] \wedge y \in [c, d]\}$ ซึ่งจะได้ว่า $S \subset D$ และสามารถให้บทนิยามฟังก์ชันใหม่ได้ดังนี้ คือ

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in S \\ 0, & (x, y) \notin S \end{cases}$$

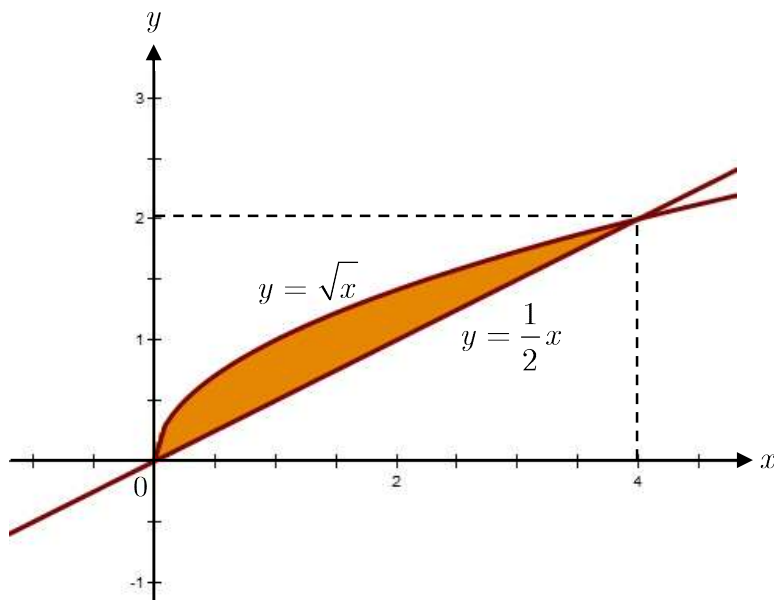
ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D ดังนั้น f ต้องเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน S เช่นกัน และกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน S และแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\iint_D \tilde{f}(x, y) dA \text{ หรือ } \iint_S f \text{ หรือ } \iint_S f(x, y) dA$$

ตัวอย่าง 5.6 กำหนดให้ $f(x, y) = xy$ และ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$

และเส้นตรง $y = \frac{1}{2}x$ จงหาค่าของ $\iint_S f(x, y) dA$

วิธีทำ วาดกราฟเพื่อพิจารณาบริเวณของ S ซึ่งเป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และเส้นตรง $y = \frac{1}{2}x$ ได้ดังต่อไปนี้



จากรูปภาพนั้นได้อาณาบริเวณของ S ซึ่งเป็นอาณาบริเวณที่ถูกล้อมรอบด้วย

$$D = \{(x, y) : x \in [0, 4] \wedge y \in [0, 2]\}$$

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันดังกล่าวสามารถหาได้สองแบบดังวิธีต่อไปนี้

แบบที่ 1 หาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x ก่อน นั่นคือ

$$\iint_S f = \iint_D \tilde{f}(x, y) dx dy$$

แบบที่ 2 หาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร y ก่อน

$$\iint_S f = \iint_D \tilde{f}(x, y) dy dx$$

ซึ่งในตัวอย่างนี้จะแสดงทั้งสองวิธีดังต่อไปนี้

หาปริพันธ์เทียบกับค่า x ก่อน พิจารณาอาณาบริเวณ S จะได้ว่า

$$S = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq 2y \wedge 0 \leq y \leq 2\}$$

ดังนั้นจะให้นิยามฟังก์ชันใหม่ได้ดังนี้

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < y^2 \\ xy, & y^2 \leq x \leq 2y \\ 0, & 2y < x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้} \quad \iint_S f &= \iint_D \tilde{f}(x, y) dx dy \\
&= \int_0^2 \int_0^4 \tilde{f}(x, y) dx dy \\
&= \int_0^2 \int_0^4 \tilde{f}(x, y) dx dy \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^{y^2} 0 dx + \int_{y^2}^{2y} xy dx + \int_{2y}^4 0 dx \right] dy \\
&= \int_0^2 \left[\int_{y^2}^{2y} xy dx \right] dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{y^2}^{2y} dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{(2y)^2 y}{2} - \frac{(y^2)^2 y}{2} \right] dy \\
&= \int_0^2 \left[2y^3 - \frac{y^5}{2} \right] dy \\
&= \left[\frac{2y^4}{4} - \frac{y^6}{12} \right]_0^2 \\
&= \left[\frac{y^4}{2} - \frac{y^6}{12} \right]_0^2 \\
&= \left(\frac{2^4}{2} - \frac{2^6}{12} \right) - \left(\frac{0^4}{2} - \frac{0^6}{12} \right) \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

หาปริพันธ์เทียบกับค่า y ก่อน พิจารณาอาณาบริเวณ S จะได้ว่า

$$S = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 4 \wedge \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$$

ดังนั้นจะให้บทนิยามฟังก์ชันใหม่ได้ดังนี้

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y < \frac{x}{2} \\ xy, & \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \sqrt{x} < y \leq 2 \end{cases}$$

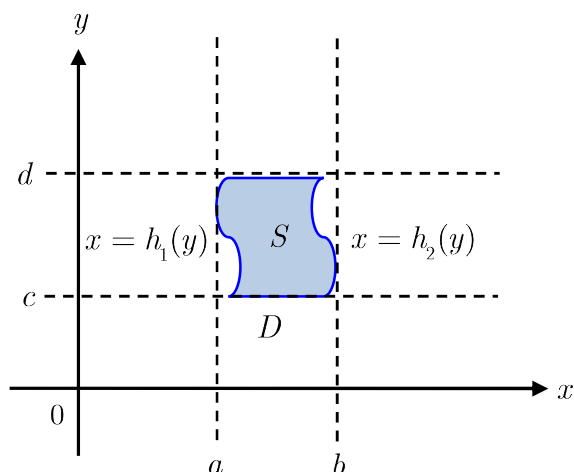
$$\begin{aligned}
\text{จะได้} \quad \iint_S f &= \iint_D \tilde{f}(x, y) dx dy \\
&= \int_0^4 \int_0^2 \tilde{f}(x, y) dy dx \\
&= \int_0^4 \int_0^2 \tilde{f}(x, y) dy dx \\
&= \int_0^4 \left[\int_0^{x/2} 0 dy + \int_{x/2}^{\sqrt{x}} xy dy + \int_{\sqrt{x}}^2 0 dy \right] dx \\
&= \int_0^4 \left[\int_{x/2}^{\sqrt{x}} xy dy \right] dx \\
&= \int_0^4 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{x/2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^4 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} \right] dy \\
&= \left[\frac{2x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \right]_0^2 \\
&= \left(\frac{2(2)^3}{6} - \frac{(2)^4}{32} \right) - \left(\frac{2(0)^3}{6} - \frac{0^4}{32} \right) \\
&= \frac{16}{6} - \frac{16}{32} - 0 \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \iint_S f(x, y) dA = \frac{8}{3}$$

จากตัวอย่าง 5.5 ที่ผ่านมานี้ การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรบนอาณาบริเวณ $D - S$ จะมีค่าเป็น 0 เสมอดังนั้นการหาค่าของ $\iint_S f$ สามารถทำได้สองแบบดังต่อไปนี้

$$1. \text{หาปริพันธ์เทียบกับค่า } x \text{ ก่อน จะได้ } \iint_S f = \iint_D \tilde{f}(x, y) dx dy$$

โดยที่ $D = [a, b] \times [c, d]$ และ $S = [h_1(y), h_2(y)] \times [c, d]$ ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 5.3 กราฟแสดงบริเวณ $S = [h_1(y), h_2(y)] \times [c, d]$

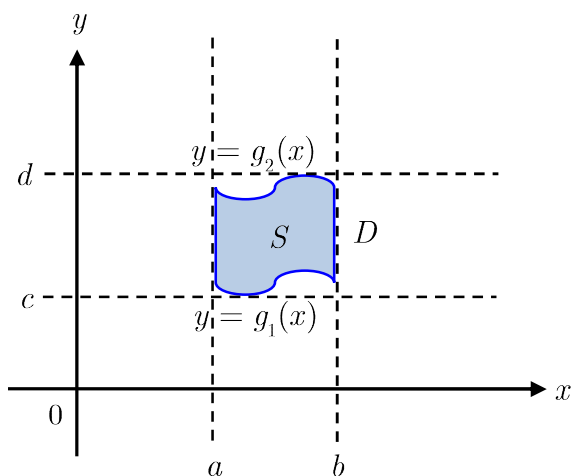
จะให้บทนิยามฟังก์ชันใหม่ได้ดังนี้

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0, & a \leq x < h_1(y) \\ f(x, y), & h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ 0, & h_2(y) < x \leq b \end{cases}$$

นั่นคือ $\iint_S f = \iint_D \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$

2. หาปริพันธ์เทียบกับค่า y ก่อน จะได้ $\iint_S f = \iint_D \tilde{f}(x, y) dy dx$

โดยที่ $D = [a, b] \times [c, d]$ และ $S = [a, b] \times [g_1(x), g_2(x)]$ ดังภาพประกอบ 5.4



ภาพประกอบ 5.4 กราฟแสดงบริเวณ $S = [a, b] \times [g_1(x), g_2(x)]$

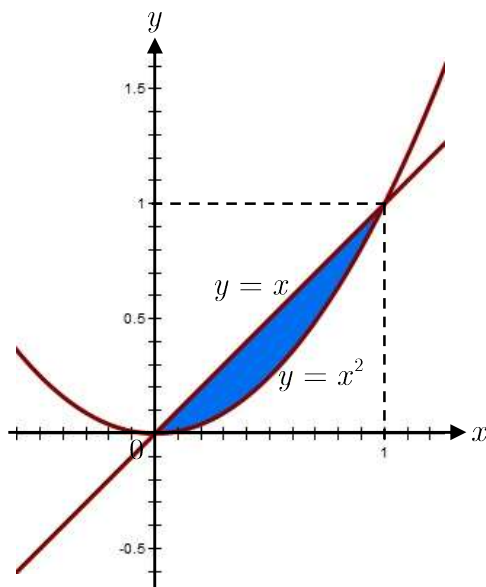
ดังนั้นจะให้พินัยมฟังก์ชันใหม่ได้ดังนี้

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0, & c \leq y < g_1(x) \\ f(x, y), & g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ 0, & g_2(x) < y \leq d \end{cases}$$

$$\text{นั่นคือ } \iint_S f = \iint_D \tilde{f}(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

ตัวอย่าง 5.7 จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx$

วิธีทำ พิจารณาดูบริเวณ $S = [0, 1] \times [g_1(x), g_2(x)]$ เมื่อ $g_1(x) = x^2$ และ $g_2(x) = x$ เขียนกราฟได้ดังนี้



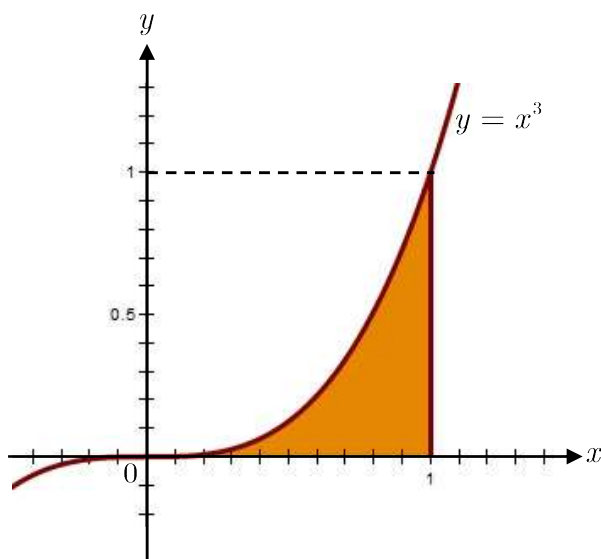
$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx &= \int_0^1 \left[\frac{xy^3}{3} \right]_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x(x)^3}{3} - \frac{x(x^2)^3}{3} \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 [x^4 - x^7] dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right] \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^8}{8} \right) - \left(\frac{(0)^5}{5} - \frac{(0)^8}{8} \right) \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) - 0 \right] \\
&= \frac{1}{40}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx = \frac{1}{40}$

ตัวอย่าง 5.8 จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_0^{x^3} e^{y/x} dy dx$

วิธีทำ พิจารณาด้าน $S = [0, 1] \times [g_1(x), g_2(x)]$ เมื่อ $g_1(x) = 0$ และ $g_2(x) = x^3$
เขียนกราฟได้ดังนี้



นั่นคือ

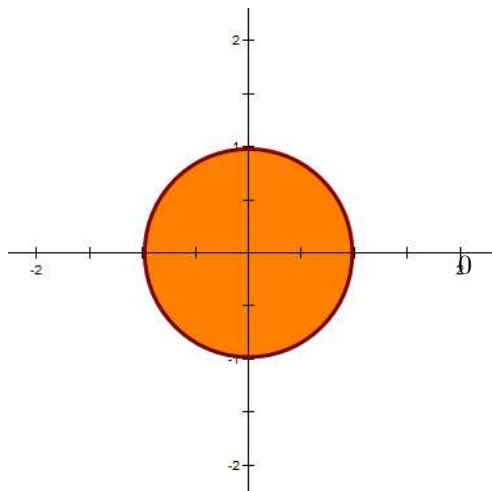
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{x^3} e^{y/x} dy dx &= \int_0^1 \left[x e^{y/x} \right]_0^{x^3} dx \\
&= \int_0^1 \left[x e^{y/x} \right]_0^{x^3} dx \\
&= \int_0^1 \left[x e^{x^3/x} - x e^{0/x} \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[x e^{x^2} - x \right] dx \\
&= \left[\frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} e^{1^2} - \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} e^{0^2} - \frac{0^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} (e - 1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 \int_0^{x^3} e^{y/x} dy dx = \frac{1}{2} (e - 1)$

ตัวอย่าง 5.9 จงหาค่าของปริพันธ์สองชั้นของ $f(x, y) = 3x - 2y$ บนอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 1$

วิธีทำ เขียนกราฟเพื่อพิจารณาอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $x^2 + y^2 = 1$ ได้ดังภาพ



สำหรับในตัวอย่างนี้จะหาปริพันธ์เทียบกับ y ก่อนนั่นคือ

$$\iint_S f = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

และ $S = [0, 1] \times [g_1(x), g_2(x)]$

เมื่อ $g_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$ และ $g_2(x) = \sqrt{1-x^2}$

และ $S = [-1, 1] \times [g_1(x), g_2(x)]$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3x - 2y) dy dx \\
&= \int_{-1}^1 \left[3xy - y^2 \right] \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 \left[\left(3x\sqrt{1-x^2} - (\sqrt{1-x^2})^2 \right) - \left(-3x\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2})^2 \right) \right] dx \\
&= \int_{-1}^1 \left[6x\sqrt{1-x^2} \right] dx \\
&= \left[-\frac{3(1-x^2)}{3/2} \right]_{-1}^1 \\
&= \left(-\frac{3(1-(1)^2)}{3/2} \right) - \left(-\frac{3(1-(-1)^2)}{3/2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 \int_0^x e^{y/x} dy dx = 0$

5.4 สรุปท้ายบท

การหาปริพันธ์สองชั้นนั้นเริ่มจากการหาปริพันธ์ฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้ลิมิตของผลบวกกริมันน์ ซึ่งกำหนด $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนโดเมน $D \in [a, b] \times [c, d]$ และ $f : D \rightarrow R$ ถ้าแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วงย่อยที่จุด $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ โดยที่ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ และแบ่งช่วง $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยที่จุด $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ โดยที่ $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$ ซึ่งการหาปริพันธ์โดยใช้ผลบวกกริมันน์จะค่อนข้างลำบากมาก ดังนั้นในทางปฏิบัติจะไม่หาปริพันธ์โดยใช้ผลบวกกริมันน์ แต่จะใช้การหาปริพันธ์ที่เรียกว่า ปริพันธ์ซ้อน จะได้

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

นอกจากการหาปริพันธ์ฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แล้วสำหรับโดเมนทั่ว ๆ ไปก็สามารถหาค่าได้เช่นกัน โดยสามารถนิยามฟังก์ชันใหม่ได้ดังต่อไปนี้

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in S \\ 0, & (x, y) \notin S \end{cases}$$

ทำให้สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโดยโดเมนไม่จำเป็นต้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จงหาค่าของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$1.1 \int_2^5 \int_0^1 2x \, dy \, dx$$

$$1.2 \int_1^3 \int_0^1 (2+x) \, dy \, dx$$

$$1.3 \int_0^1 \int_1^2 2xy \, dx \, dy$$

$$1.4 \int_0^2 \int_1^3 (2x+y) \, dx \, dy$$

$$1.5 \int_2^3 \int_1^2 x\sqrt{x^2+1} \, dx \, dy$$

$$1.6 \int_0^1 \int_1^2 dy \, dx$$

2. จงหาค่าของปริพันธ์สองชั้น บนอาณาบริเวณ D ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$2.1 \iint_D 3x^2 \, dA, \quad D \in [0,1] \times [-1,2]$$

$$2.2 \iint_D x^2 \sqrt{x^3+2} \, dA, \quad D \in [0,1] \times [-1,0]$$

$$2.3 \iint_D (x^2y - 2xy) \, dA, \quad D \in [0,3] \times [1,2]$$

$$2.4 \iint_D (1 - 3x^2) \, dA, \quad D \in [0,1] \times [-1,2]$$

$$2.5 \iint_D (3x^2 + xy) \, dA, \quad D \in [0,2] \times [0,3]$$

$$2.7 \iint_D \cos(x-y) \, dA, \quad D \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

$$2.8 \iint_D \sin(x+y) \, dA, \quad D \in [\pi, 2\pi] \times \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$$

3. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันต่อไปนี้

$$3.1 \text{ อยู่ภายใต้ผิวโค้ง } z = 3x^2 + 2xy \text{ และอยู่เหนืออาณาบริเวณ } D \in [1,2] \times [0,3]$$

$$3.2 \text{ อยู่ภายใต้ผิวโค้ง } z = x^2 \text{ ซึ่งปิดล้อมรอบด้วยระนาบ } x = 2, y = 3 \text{ และ } y = 2x + 1$$

$$3.3 \text{ อยู่ภายใต้ระนาบ } z = 2x + y \text{ และอยู่เหนืออาณาบริเวณ}$$

$$D = \{(x,y) : 3 \leq x \leq 5 \wedge 1 \leq y \leq 2\}$$

4. จงหาค่าของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$4.1 \int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 \, dy \, dx$$

$$4.2 \int_1^3 \int_y^{3-y} y \, dx \, dy$$

$$4.3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} y \, dx \, dy$$

$$4.4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} 2x \, dx \, dy$$

$$4.5 \int_2^3 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2) \, dx \, dy$$

$$4.6 \int_0^1 \int_x^2 (3-x-y) \, dy \, dx$$

$$4.7 \int_2^3 \int_y^{y+2} (2xy) \, dx \, dy$$

$$4.8 \int_0^1 \int_{x+1}^{x^2} 3xy^2 \, dy \, dx$$

เอกสารอ้างอิง

- ดำรง ทิพย์โยธา และคณะ. (2559). **แคลคูลัส 2**. กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ธัญยศ จำปาหวาย. (2564). **แคลคูลัส 2**. กรุงเทพมหานคร : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.
- ธีระศักดิ์ อัจฉนนท์. (2558). **แคลคูลัส 2. สำหรับวิศวกร**. ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์.
- อรุณี เจริญราช. (2550). **แคลคูลัส 3**. ปทุมธานี : วิทย์พัฒนา.
- Corral. M. (2021). **Vector Calculus**. Michigan : Schoolcraft College.
- Dawkins. P. (2018). **Calculus III**. Texas : Lamar University.
- George B. and Thomas, Jr. (2016). **Calculus and Analytic Geometry**. Massachusetts Institute of Technology.
- Gilbert. S. (2018). **Calculus**. Massachusetts : MIT Department of Mathematics.
- Harold Jan R.T. (2015). **Calculus 2**. London : Lap Lambert Academic.
- Michael. C. (2022). **Vector Calculus**. Michigan : Schoolcraft College.
- Paul. D. (2011). **Calculus III**. Texas : Lamar University.
- Sigurd A. (2010). **First Semester Calculus**. Minneapolis : University of Minnesota.

