

บทที่ 5

ฟังก์ชันในทฤษฎีจำนวน

ฟังก์ชันที่เคยได้ศึกษามานี้พบว่ามีมากมายหลายรูปแบบและมีชื่อเรียกที่แตกต่างกัน บางฟังก์ชันก็มีความสำคัญในการศึกษาทฤษฎีจำนวน และมีความเชื่อมโยงกับการศึกษาตัวหารของจำนวนเต็ม สำหรับฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนเชิงซ้อน เรียกฟังก์ชันในลักษณะเช่นนี้ว่า ฟังก์ชันทฤษฎีจำนวน(Number Theoretic Function) หรือ ฟังก์ชันเลขคณิต(Arithmetic Function) ได้มีการศึกษากันอย่างกว้างขวางในแง่ของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน(Complex valued Function) โดยฟังก์ชันเลขคณิตแต่ละฟังก์ชันจะมีสมบัติพิเศษที่ต่างกัน ดังนั้นเนื้อหาในบทนี้นั้นจะเป็นการศึกษารูปแบบ และคุณสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเลขคณิต เริ่มจากการศึกษาฟังก์ชันเชิงการคูณ(Multiplicative Function) ฟังก์ชันที่บอกจำนวนตัวหาร และผลบวกของตัวหารที่เป็นบวกของจำนวนเต็มแต่ละตัว เพื่อนำไปเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพิสูจน์ฟังก์ชันรูปแบบต่าง ๆ เช่น ฟังก์ชันฟิอออยเลอร์(Euler Phi Function) ฟังก์ชันเมอร์บิอุส(Möbius Function) และในหัวข้อสุดท้ายจะเป็นการศึกษาฟังก์ชันที่ไม่ได้เป็นฟังก์ชันเลขคณิต แต่มีส่วนที่สัมพันธ์กับฟังก์ชันเลขคณิตและใช้กันมากในทฤษฎีจำนวน คือฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุด(Greatest Integer Function)

5.1 ฟังก์ชันเลขคณิต

การศึกษาฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก และเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนเชิงซ้อน เรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันทฤษฎีจำนวน หรือ ฟังก์ชันเลขคณิต ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 5.1

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก และเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ เรียก f ว่า ฟังก์ชันเลขคณิต

ตัวอย่าง 5.1 กำหนดให้ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเลขคณิต

1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = 0$
2. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = 1$
3. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = n$
4. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = 1 - n$
5. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = n^2 + 40n - 41$

ตัวอย่าง 5.2 ฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่เป็นฟังก์ชันเลขคณิต

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(n) = 3$
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = n - 2$
3. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = n$
4. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ กำหนดโดย $f(n) = 5 - n^3$

5.2 จำนวนและผลบวกของตัวหารที่เป็นบวก

การศึกษาฟังก์ชันเลขคณิตในหัวข้อนี้จะเป็นการศึกษา จำนวนตัวหารที่เป็นบวก และผลบวกของตัวหาร โดยฟังก์ชันทั้งสองนี้มีความสำคัญและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทฤษฎีจำนวนได้หลากหลายรูปแบบ

บทนิยาม 5.2

ฟังก์ชันจำนวนของตัวหาร(Number of Divisors Function) เขียนแทนด้วย τ เป็นฟังก์ชันเลขคณิตสำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ $\tau(n)$ แทน จำนวนตัวหารที่เป็นบวกของ n

บทนิยาม 5.3

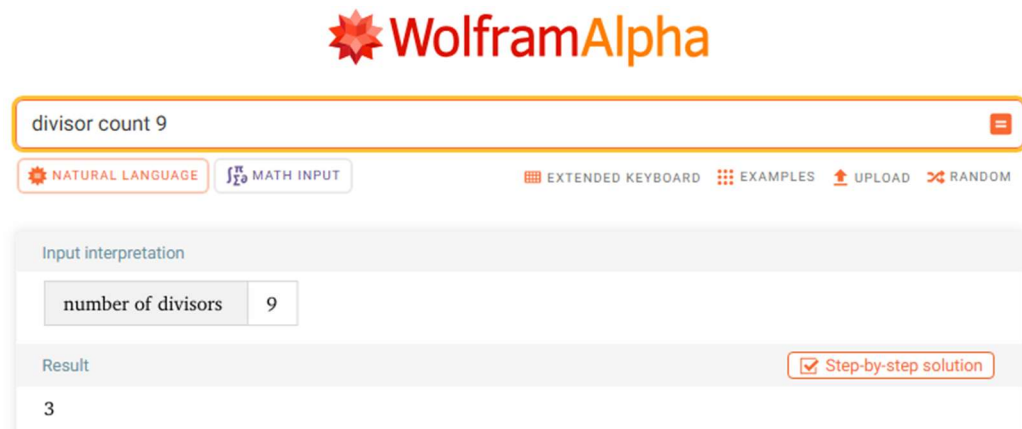
ฟังก์ชันผลบวกของตัวหาร(Sum of Divisors Function) เขียนแทนด้วย σ เป็นฟังก์ชันเลขคณิตสำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ $\sigma(n)$ แทน ผลบวกของตัวหารที่เป็นบวกของ n

ตัวอย่าง 5.3 จงหา $\tau(n)$ และ $\sigma(n)$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots, 8$

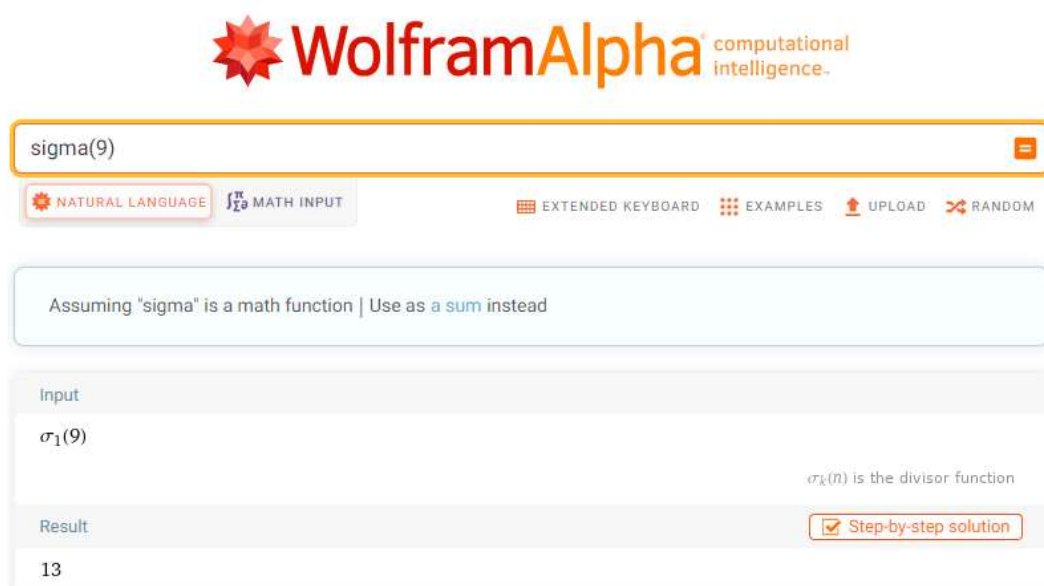
วิธีทำ หาค่า $\tau(n)$ และ $\sigma(n)$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots, 8$ ดังต่อไปนี้

n	ตัวหารที่เป็นบวกของ n	$\tau(n)$	$\sigma(n)$
1	1	$\tau(1) = 1$	$\sigma(1) = 1$
2	1, 2	$\tau(2) = 2$	$\sigma(2) = 1 + 2 = 3$
3	1, 3	$\tau(3) = 2$	$\sigma(3) = 1 + 3 = 4$
4	1, 2, 4	$\tau(4) = 3$	$\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$
5	1, 5	$\tau(5) = 2$	$\sigma(5) = 1 + 5 = 6$
6	1, 2, 3, 6	$\tau(6) = 4$	$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$
7	1, 7	$\tau(7) = 2$	$\sigma(7) = 1 + 7 = 8$
8	1, 2, 4, 8	$\tau(8) = 4$	$\sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

จากตัวอย่าง 5.3 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $\tau(9)$ และ $\sigma(9)$ ดังภาพประกอบ 5.1 และ ภาพประกอบ 5.2



ภาพประกอบ 5.1 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\tau(9) = 3$



ภาพประกอบ 5.2 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\sigma(9) = 13$

ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะจะได้ว่า $\tau(p) = 2$ และ $\sigma(p) = p + 1$ เนื่องจากตัวที่สามารถหาร p ได้ลงตัวนั้นมีแค่สองจำนวนนั่นคือ 1 และ p เท่านั้น

หมายเหตุ 5.1 สัญลักษณ์ $\sum_{d|n} f(d)$ หมายถึง ผลบวกของค่า $f(d)$ เมื่อ d คือจำนวนเต็มบวกที่เป็นตัวหารของจำนวนเต็ม n

ความสัมพันธ์ของ $\sum_{d|n} f(d)$ กับ τ และ σ นั้นสามารถเขียนได้ในรูป $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ และ $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ สัญลักษณ์ $\sum_{d|n} 1$ หมายถึงบวก 1 เท่ากับจำนวนตัวหารที่เป็นบวกของ n แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.4 จงหา $\sum_{d|n} f(d)$ เมื่อ $n = 18$

วิธีทำ ตัวหารที่เป็นบวกของ 18 คือ 1, 2, 3, 6, 9 และ 18

$$\text{จะได้ } \sum_{d|18} f(d) = f(1) + f(2) + f(3) + f(6) + f(9) + f(18)$$

ตัวอย่าง 5.5 กำหนดให้ $n = 12$ จงหา $\tau(n)$ และ

วิธีทำ ตัวหารที่เป็นบวกของ 12 มี 6 ตัว คือ 1, 2, 3, 4, 6 และ 12

$$\text{ดังนั้น } \tau(n) = \sum_{d|12} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$$\text{และ } \sigma(n) = \sum_{d|12} d = 1 + 2 + 3 + 6 + 12 = 24$$

การหา $\tau(n)$ และ $\sigma(n)$ ในตัวอย่างที่ผ่านมานั้น เหมาะสำหรับในกรณีที่ n มีค่าไม่มาก เพราะการหาโดยวิธีดังกล่าวจะต้องหาจำนวนของตัวหารที่เป็นบวกทั้งหมดของ n ทั้งหมดซึ่งในกรณีที่ n มีค่ามากต้องใช้เวลามากในการนับจำนวนและหาผลบวกของตัวหารที่เป็นบวกของ n ทำให้เสียเวลาและเกิดข้อผิดพลาดได้ง่าย สำหรับทฤษฎีบทต่อไปนี้สามารถหาการหา $\tau(n)$ และ $\sigma(n)$ ได้สะดวกและรวดเร็วมากยิ่งขึ้น

ทฤษฎีบท 5.1

ถ้า $n > 1$ และ n เขียนเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะในรูปแบบบัญญัติ (Canonical Form) ได้เป็น $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ จะได้ว่าตัวหารที่เป็นบวกของ n คือจำนวนเต็ม d ที่เขียนในรูป

$$d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$$

เมื่อ $0 \leq a_i \leq k_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$)

พิสูจน์

สังเกตว่าตัวหาร $d = 1$ เมื่อ $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$

และ $d = n$ เมื่อ $a_1 = k_1, a_2 = k_2, \dots, a_r = k_r$

สมมติให้ d เป็นตัวหารของ n นอกเหนือจาก 1 และ n ดังกล่าวแล้ว

ดังนั้น $n = dd'$ โดยที่ $d > 1, d' > 1$

เขียน d และ d' ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ (ไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน) ดังนี้

$$d = q_1 q_2 \cdots q_s \text{ และ } d' = t_1 t_2 \cdots t_u$$

โดยที่ q_i, t_j เป็นจำนวนเฉพาะ

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} = q_1 \cdots q_s t_1 t_2 \cdots t_u$$

จำนวนเต็มบวก n เขียนในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ 2 จำนวน

จากทฤษฎีบทหลักมูลของเลขคณิต จำนวนเฉพาะ p_i แต่ละจำนวนเท่ากับ p_j

เพียงชุดเดียว รวมจำนวนเฉพาะที่เท่ากันเข้าด้วยกันจะได้

$$d = q_1 q_2 \cdots q_s p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$$

โดยที่ยอมให้ a_i บางค่าเท่ากับ 0 ได้

ในทางกลับกัน จำนวนเต็ม $d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ โดยที่ $0 \leq a_i \leq k_i$

เป็นตัวหารของ n สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} n &= p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \\ &= \left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \right) \left(p_1^{k_1 - a_1} p_2^{k_2 - a_2} \cdots p_r^{k_r - a_r} \right) \\ &= dd' \end{aligned}$$

โดยที่ $d' = p_1^{k_1 - a_1} p_2^{k_2 - a_2} \cdots p_r^{k_r - a_r}$ และ $k_i - a_i \geq 0$ สำหรับแต่ละ i

ดังนั้น $d' > 0$ และ $d \mid n$

ทฤษฎีบท 5.2

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ที่ $n > 1$ และเขียนรูปแบบบัญญัติได้

$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \tau(n) &= (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1) \\ \sigma(n) &= \left(\frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \right) \left(\frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \right) \cdots \left(\frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1} \right) \end{aligned}$$

พิสูจน์

จากทฤษฎีบท 5.1 ตัวหารที่เป็นบวกของ n เป็นจำนวนเต็มบวก d ทั้งหมดอยู่ในรูป

$$d = q_1 q_2 \cdots q_s p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \text{ โดยที่ } 0 \leq a_i \leq k_i$$

แต่ a_1 สามารถเลือกค่าต่างๆ ได้ $k_1 + 1$ วิธี a_2 สามารถเลือกค่าต่างๆ ได้ $k_2 + 1$ วิธี

ดังนั้นตัวหารที่เป็นไปได้ของ n จะมีจำนวนทั้งหมดเท่ากับ

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1)$$

นั่นคือ

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1)$$

ในการคำนวณ $\sigma(n)$ พิจารณาผลคูณ

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{k_2}) \cdots (1 + p_r + p_r^2 + \cdots + p_r^{k_r})$$

ตัวหารที่เป็นบวกของ n แต่ละตัว จะปรากฏเป็นพจน์หนึ่งและพจน์เดียวในการกระจายผลคูณ ดังนี้

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{k_1}) \cdots (1 + p_r + p_r^2 + \cdots + p_r^{k_r})$$

โดยใช้สูตรผลรวมของอนุกรมเรขาคณิตสำหรับแต่ละตัวประกอบ i ในพจน์ทางขวามือ จะได้

$$\sigma(n) = 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{k_i+1} = \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

ดังนั้น

$$\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \right) \left(\frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \right) \cdots \left(\frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1} \right)$$

โดยทั่วไปนิยมเขียนแทนผลคูณของจำนวนเต็มด้วยสัญลักษณ์ $\prod$ การใช้สัญลักษณ์ดังกล่าว ทำให้ทฤษฎีบท 5.2 สามารถเขียนได้ในรูปแบบดังนี้

$$\tau(n) = \prod_{1 \leq i \leq r} (k_i + 1)$$

และ

$$\sigma(n) = \prod_{1 \leq i \leq r} \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

ตัวอย่าง 5.6 กำหนดให้ $n = 720$ จงหา $\tau(n)$ และ $\sigma(n)$

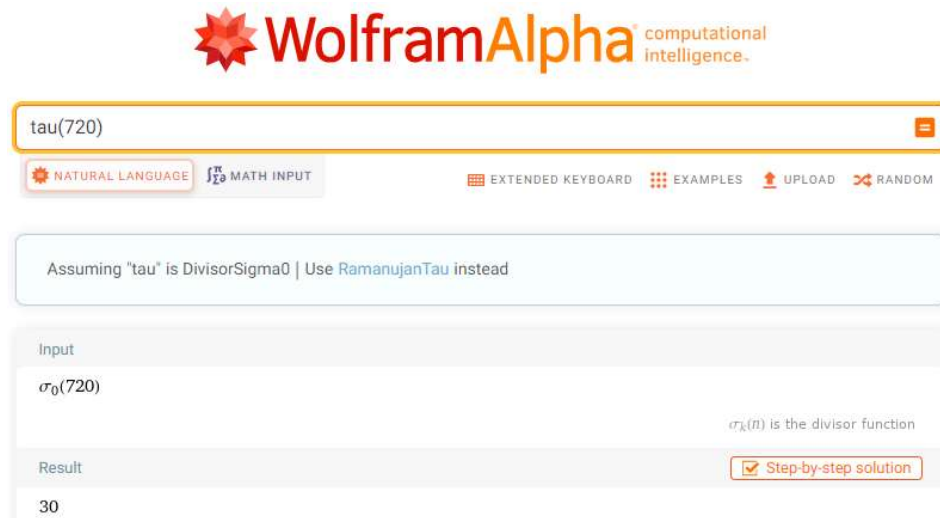
วิธีทำ 720 เขียนในรูปแบบบัญญัติ จะได้ $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ จะได้

$$\tau(720) = (4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 30$$

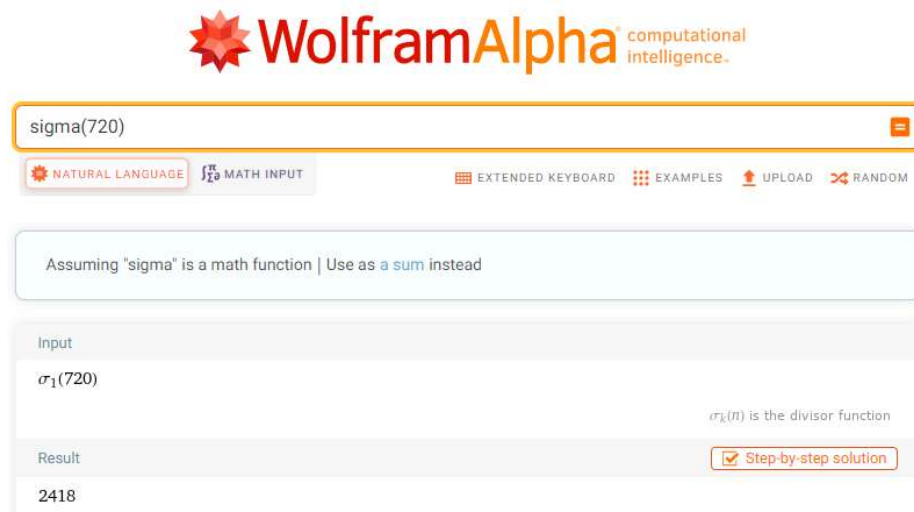
$$\sigma(720) = \left(\frac{2^5 - 1}{2 - 1} \right) \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1} \right) \left(\frac{5^2 - 1}{5 - 1} \right) = \left(\frac{31}{1} \right) \left(\frac{26}{2} \right) \left(\frac{24}{4} \right) = 2418$$

ดังนั้น $\tau(720) = 30$ และ $\sigma(720) = 2418$

จากตัวอย่าง 5.6 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $\tau(720)$ และ $\sigma(720)$ ดังภาพประกอบ 5.3 และ ภาพประกอบ 5.4



ภาพประกอบ 5.3 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\tau(720) = 30$



ภาพประกอบ 5.4 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\sigma(720) = 2418$

ตัวอย่าง 5.7 จงตรวจสอบว่า $\tau(72 \times 10) = \tau(72)\tau(10)$ และ $\sigma(72 \times 10) = \sigma(72)\sigma(10)$ เป็นจริงหรือไม่

วิธีทำ เขียน 10 และ 72 ในรูปแบบบัญญัติได้ $10 = 2 \cdot 5$ และ $72 = 2^3 \cdot 3^2$

พิจารณา

$$\tau(72) = (3 + 1)(2 + 1) = 12 \text{ และ}$$

$$\tau(10) = (1+1)(1+1) = 4$$

แสดงว่า $\tau(72)\tau(10) = (12)(4) = 48$

พิจารณา

$$\sigma(72) = \left(\frac{2^4-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^3-1}{3-1}\right) = 195 \text{ และ}$$

$$\sigma(10) = \left(\frac{2^2-1}{2-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right) = 18$$

แสดงว่า $\sigma(72)\sigma(10) = (195)(18) = 3510$

จากตัวอย่าง 5.6 แสดงว่า $\tau(72 \cdot 10) \neq \tau(72)\tau(10)$ และ $\sigma(72 \cdot 10) \neq \sigma(72)\sigma(10)$

ดังนั้น $\tau(72 \times 10) \neq \tau(72)\tau(10)$ และ $\sigma(72 \times 10) \neq \sigma(72)\sigma(10)$

จากตัวอย่างที่พบว่า $\tau(72 \cdot 10) \neq \tau(72)\tau(10)$ และ $\sigma(72 \cdot 10) \neq \sigma(72)\sigma(10)$ ในลำดับต่อไปจะเป็นการตรวจสอบว่าจะมีกรณีใดบ้างที่ทำให้

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n) \text{ และ } \sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$$

เริ่มจากการศึกษาบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 5.4

ให้ f เป็นฟังก์ชันเลขคณิต จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ ก็ต่อเมื่อ $f(mn) = f(m)f(n)$ สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n ซึ่ง $(m, n) = 1$

จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันเชิงการคูณบริบูรณ์ (Completely Multiplicative Function) ก็ต่อเมื่อ $f(mn) = f(m)f(n)$ สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n

ตัวอย่าง 5.8 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณหรือไม่

1. $f(n) = 1$

2. $g(n) = n$

3. $h(n) = n^2$

4. $i(n) = 2n + 3$

วิธีทำ

1. ให้ $f(n) = 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $f(mn) = 1 = 1 \cdot 1 = f(m)f(n)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ

2. ให้ $g(n) = n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n
 ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $g(mn) = mn = g(m)g(n)$
 ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันการคูณ
3. ให้ $h(n) = n^2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n
 ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว
 $h(mn) = (mn)^2 = m^2n^2 = h(m)h(n)$
 ดังนั้น h เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ
4. ให้ $i(n) = 2n + 3$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว
 $i(mn) = 2mn + 3 \neq (2m + 3)(2n + 3) = i(m)i(n)$
 ดังนั้น i ไม่เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ

ต่อไปจะเป็นการตรวจสอบฟังก์ชัน τ และฟังก์ชัน σ ว่าเป็นฟังก์ชันเชิงการคูณในกรณีใดบ้างโดยนำเสนอเป็นทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.3

ฟังก์ชัน τ และฟังก์ชัน σ เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ

พิสูจน์

กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $(m, n) = 1$

ถ้า $m = n = 1$ แล้ว $\tau(1) = \tau(1)\tau(1) = 1$ และ $\sigma(1) = \sigma(1)\sigma(1) = 1$

นั่นคือ ฟังก์ชัน τ และฟังก์ชัน σ เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ

สมมติให้ $m > 1, n > 1$ เขียน m, n ในรูปแบบบัญญัติได้เป็น

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \text{ และ } n = q_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_s^{j_s}$$

เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะของ m และ n เนื่องจาก $(m, n) = 1$

ดังนั้น $p_i \neq q_i$ ทุก ๆ i, j

เขียน mn ในรูปแบบบัญญัติได้เป็น

$$mn = (p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}) (q_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_s^{j_s})$$

จะได้

$$\tau(mn) = [(k_1 + 1) \cdots (k_r + 1)] [(j_1 + 1) \cdots (j_s + 1)] = \tau(m)\tau(n)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\sigma(mn) = \left[\frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1} \right] \left[\frac{p_1^{j_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_s^{j_s+1} - 1}{p_s - 1} \right] = \sigma(m)\sigma(n)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน τ และฟังก์ชัน σ เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ

ตัวอย่าง 5.9 จงตรวจสอบว่า $\tau(84) = \tau(12)\tau(7)$ และ $\sigma(84) = \sigma(12)\sigma(7)$ เป็นจริงหรือไม่

วิธีทำ เขียน 84, 12 และ 7 ในรูปแบบบัญญัติได้

$$84 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$

$$12 = 2^2 \cdot 3^1$$

$$7 = 7^1$$

พิจารณา

$$\tau(84) = (2+1)(1+1)(1+1) = 12$$

$$\tau(12) = (2+1)(1+1) = 6$$

$$\tau(7) = (1+1) = 2$$

แสดงว่า $\tau(84) = \tau(12)\tau(7)$

พิจารณา

$$\sigma(84) = \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1} \right) \left(\frac{3^2 - 1}{3 - 1} \right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1} \right) = (7) \left(\frac{8}{2} \right) \left(\frac{48}{6} \right) = 224$$

$$\sigma(12) = \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1} \right) \left(\frac{3^2 - 1}{3 - 1} \right) = (7) \left(\frac{8}{2} \right) = 28$$

$$\sigma(7) = \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1} \right) = \left(\frac{48}{6} \right) = 8$$

แสดงว่า $\sigma(84) = \sigma(12)\sigma(7)$

ดังนั้น $\tau(84) = \tau(12)\tau(7)$ และ $\sigma(84) = \sigma(12)\sigma(7)$

จากตัวอย่างพบว่า $\tau(84) = \tau(12)\tau(7)$ และ $\sigma(84) = \sigma(12)\sigma(7)$ เนื่องจาก $(7, 12) = 1$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบท 5.3

5.3 ฟังก์ชันฟอยเลอร์

ฟังก์ชันเลขคณิตที่มีความสำคัญในการศึกษาทฤษฎีจำนวนอีกฟังก์ชันหนึ่งคือ ฟังก์ชันของออยเลอร์ โดยออยเลอร์ นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสได้นิยามขึ้นในปี ค.ศ. 1760 แต่สำหรับสัญลักษณ์ $\phi(n)$ นั้นเป็นสัญลักษณ์ที่ เกาส์ นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันเป็นผู้กำหนดขึ้น โดยฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันที่

แสดงจำนวนสมาชิกในระบบส่วนตกรูปมอดุโล n นั่นคือจำนวน ของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่ไม่เกิน n และจะเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n ในหัวข้อนี้จะเป็นการหาค่าของ $\phi(n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก พร้อมทั้งคุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชัน

บทนิยาม 5.5

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ฟังก์ชันฟิออเลย์เลอร์ ของ n คือจำนวนของจำนวนเต็มบวก x ที่ $x \leq n$ และ x เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n เขียนแทนด้วย $\phi(n)$ แทนฟังก์ชันฟิออเลย์เลอร์ ของ n หรือ

$$\phi(n) = \left| \left\{ x \mid 1 \leq x \leq n \text{ และ } (x, n) = 1 \right\} \right|$$

ตัวอย่าง 5.10

- $\phi(3) = 2$ เนื่องจากจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 3 และเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 3 คือ 1, 2 ซึ่งมี 2 จำนวน
- $\phi(7) = 6$ เนื่องจากจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 7 และเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 7 คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ซึ่งมี 6 จำนวน
- $\phi(12) = 4$ เนื่องจากจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 12 และเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 12 คือ 1, 5, 7, 11 ซึ่งมี 4 จำนวน
- $\phi(15) = 9$ เนื่องจากจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 15 และเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 15 คือ 1, 2, 4, 6, 7, 8, 11, 13, 14 ซึ่งมี 9 จำนวน
- $\phi(19) = 18$ เนื่องจากจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 19 และเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 19 คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 ซึ่งมี 18 จำนวน

จากตัวอย่าง 5.10 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $\phi(n)$ ไต ๆ ได้แต่ในที่นี้จะยกตัวอย่างเฉพาะ $\phi(12)$ ดังภาพประกอบ 5.5



ภาพประกอบ 5.5 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\phi(12) = 4$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาพบว่าการหา $\phi(n)$ ในกรณีที่ n มีค่ามาก ๆ จะทำให้เกิดความยุ่งยาก และเสียเวลาในการตรวจสอบ จึงนำเสนอวิธีการหาค่า $\phi(n)$ ในอีกรูปแบบหนึ่ง โดยเริ่มจากในกรณี n เป็นจำนวนเฉพาะ นำเสนอในรูปแบบทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.4

ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $\phi(p) = p - 1$

พิสูจน์

ให้ q เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $1 < q < p$ และ $(p, q) = d \neq 1$

ดังนั้น $1 < q \leq p$

แสดงว่า $d|q$ และ $d|p$

ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่ามี 1 และ p เท่านั้นที่หาร p ลงตัว

ตัวอย่าง 5.11

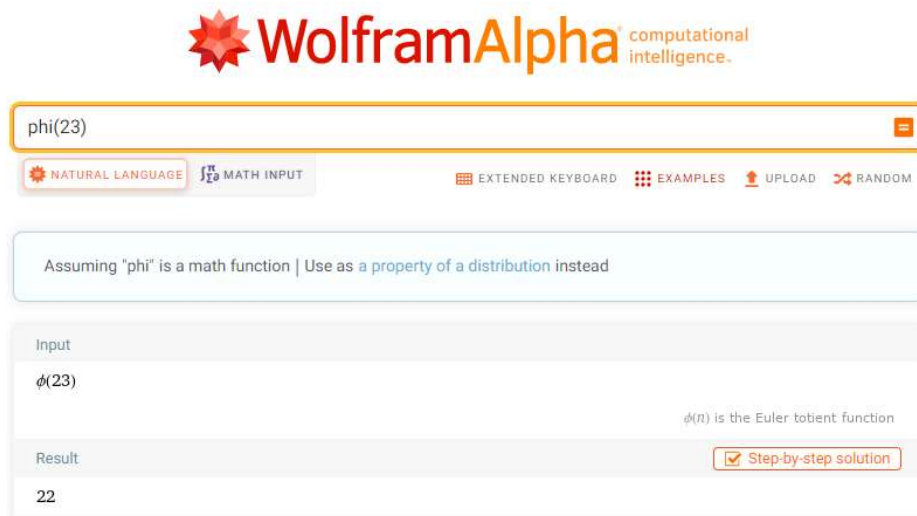
$\phi(7) = 6$ เนื่องจาก 7 เป็นจำนวนเฉพาะ

$\phi(23) = 22$ เนื่องจาก 23 เป็นจำนวนเฉพาะ

$\phi(113) = 112$ เนื่องจาก 113 เป็นจำนวนเฉพาะ

$\phi(491) = 490$ เนื่องจาก 491 เป็นจำนวนเฉพาะ

จากตัวอย่าง 5.11 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $\phi(23)$ ดังภาพประกอบ 5.6



ภาพประกอบ 5.6 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\phi(23) = 22$

การหาค่า $\phi(n)$ นอกจาก n ที่เป็นจำนวนเฉพาะที่ได้กล่าวในทฤษฎีบทที่ผ่านมาแล้ว ยังสามารถหา $\phi(n)$ ได้โดยที่ n เป็นจำนวนประกอบ ที่สามารถเขียนอยู่ในรูป p^m ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.5

ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $\phi(p^m) = p^m - p^{m-1}$

พิสูจน์

ให้ $n = p^m$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ

พิจารณาจำนวนเต็ม x ที่ $1 < x \leq n$ และ $(x, n) = 1$

พิจารณาจำนวน $1, 2, 3, \dots, p^m$ มี p^m จำนวน

ดังนั้น จำนวนที่มี ห.ร.ม กับ p^m มากกว่า 1 คือ

$1p, 2p, 3p, \dots, p^m = p^{m-1}p$ ซึ่งมี p^{m-1} จำนวน

ดังนั้น $\phi(p^m) = p^m - p^{m-1}$

ตัวอย่าง 5.12

$$\phi(128) = \phi(2^7) = 2^7 - 2^6 = 64$$

$$\phi(625) = \phi(5^4) = 5^4 - 5^3 = 500$$

จากตัวอย่าง 5.11 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $\phi(625)$ ดังภาพประกอบ 5.7



ภาพประกอบ 5.7 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\phi(625) = 500$

ในการหาสูตรคำนวณ $\phi(n)$ สำหรับ n ไม่อยู่ในรูปแบบที่สามารถใช้ทฤษฎีบทที่ผ่านมา แต่สามารถนำฟังก์ชันเชิงการคูณมาประยุกต์ใช้ในการหา $\phi(n)$ ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.6

ϕ เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ นั่นคือ $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n ซึ่ง $(m, n) = 1$

พิสูจน์

สมมติให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $(m, n) = 1$

ถ้า $m = 1$ หรือ $n = 1$ แล้ว $\phi(mn) = \phi(m)$ หรือ $\phi(mn) = \phi(n)$

เพราะว่า $\phi(1) = 1$ ดังนั้น $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$

ต่อไปสมมติว่า $m > 1$ และ $n > 1$

จัดเรียงลำดับจำนวนเต็ม ที่อยู่ระหว่าง 1 ถึง mn ดังนี้

1	$m + 1$	$2m + 1$	...	$(n - 1)m + 1$
2	$m + 2$	$2m + 2$	...	$(n - 1)m + 2$
3	$m + 3$	$2m + 3$	...	$(n - 1)m + 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
r	$m + r$	$2m + r$	...	$(n - 1)m + r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
m	$2m$	$3m$	...	nm

นับจำนวนเต็ม k ที่ $(k, mn) = 1$

นั่นคือ นับจำนวนเต็ม k ที่ $(k, m) = 1$ และ $(k, n) = 1$

ให้ r เป็นจำนวนเต็มที่

$$1 \leq r \leq m$$

ดังนั้น $(m, r) = (m, lm + r)$ เมื่อ l เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $(m, r) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $(m, lm + r) = 1$

นั่นคือ ถ้า r เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ m แล้วจะได้ว่า

สมาชิกในแถวที่ r จะเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ m ด้วย

ต่อไปจะพิจารณาว่าในแถวที่ r มีสมาชิกอยู่เท่าไรเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n

เนื่องจาก $(m, n) = 1$ ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $0 \leq j \leq (n-1)$

จะได้ว่า $lm + r \equiv (jm + r) \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ $1 \equiv j \pmod{n}$

เพราะว่า $0 \leq j \leq (n-1)$ ดังนั้น $1 = j$

แสดงว่า จำนวนเต็ม n จำนวนในแถวที่ r จะเป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์

มอดุโล n นั่นคือในแถวที่ r จะมี $\phi(n)$ จำนวนที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n

แต่เนื่องจาก จำนวนของจำนวนเต็ม r ที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ m และ n

มีทั้งหมด $\phi(m)\phi(n)$ จำนวน นั่นคือ $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$

ตัวอย่าง 5.13 จงหา $\phi(1029)$

วิธีทำ เนื่องจาก $1029 = 3 \cdot 7^3$

นั่นคือ $\phi(1029) = \phi(3 \cdot 7^3)$ และ $(3, 7) = 1$

จะได้ $\phi(1029) = \phi(3) \cdot \phi(7^3)$

พิจารณา

$$\phi(3) = 2$$

$$\phi(7^3) = 7^3 - 7^2 = 294$$

แสดงว่า $\phi(1029) = 2 \cdot 294 = 588$

ดังนั้น $\phi(1029) = 588$

จากตัวอย่าง 5.13 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $\phi(1029)$ ดังภาพประกอบ 5.8



ภาพประกอบ 5.8 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\phi(1029) = 588$

การหาค่า $\phi(n)$ ในกรณีที่ n มีคุณสมบัตินอกเหนือจากที่ได้กล่าวมาแล้ว สำหรับทฤษฎีบทต่อไปจะเป็นการนำรูปแบบบัญญัติของ n มาเพื่อหาค่า $\phi(n)$ ได้สะดวกและรวดเร็วมากยิ่งขึ้น

ทฤษฎีบท 5.7

สำหรับจำนวนเต็มบวก n เขียนในรูปแบบบัญญัติได้เป็น $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ แล้วจะได้ว่า

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

พิสูจน์

โดยทฤษฎีบท 5.5 จะได้ว่า $1 \leq i \leq r$

$$\phi(p_i^{k_i}) = p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1} = p_i^{k_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

โดยทฤษฎีบท 5.6 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi(n) &= p_1^{k_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) p_2^{k_2} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots p_r^{k_r} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \end{aligned}$$

หมายเหตุ 5.2 ในทฤษฎีบท 5.7 เขียน $\phi(n)$ โดยใช้สัญลักษณ์ $\prod$ ดังนี้

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1} = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

ตัวอย่าง 5.14 จงหา $\phi(2000)$

วิธีทำ เนื่องจาก $2000 = 2^4 \cdot 5^3$
จะได้

$$\begin{aligned}\phi(2000) &= \phi(2^4 \cdot 5^3) \\ &= 2000 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 2000 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{4}{5}\right) \\ &= 800\end{aligned}$$

ดังนั้น $\phi(2000) = 800$

จากตัวอย่าง 5.14 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $\phi(2000)$ ดังภาพประกอบ 5.9



ภาพประกอบ 5.9 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\phi(2000) = 800$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาพบว่า ค่าของ $\phi(n)$ จะเป็นจำนวนเต็มคู่เสมอซึ่งไม่ใช่เรื่องบังเอิญแต่เป็นจริงโดยทั่วไป ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.8

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $n > 2$ จะได้ว่า $\phi(n)$ เป็นจำนวนเต็มคู่

พิสูจน์

สมมติให้ $n = 2^k$ โดยที่ $k \geq 2$ โดยทฤษฎีบท 5.7 จะได้

$$\phi(n) = \phi(2^k) = 2^k \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{k-1}$$

ซึ่งเป็นจำนวนเต็มคู่

ถ้า n ไม่มี 2^k เป็นตัวประกอบ จะได้ว่า n มีตัวประกอบเป็นจำนวนเฉพาะคือ p

เขียน n ในรูป $n = p^k m$ โดยที่ $k \geq 1$ และ $(p^k, m) = 1$

และเนื่องจากฟังก์ชัน ϕ เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ จะได้

$$\phi(n) = \phi(p^k m) = \phi(p^k) \phi(m) = p^{k-1} (p-1) \phi(m)$$

ซึ่งเป็นจำนวนเต็มคู่ เนื่องจาก $2|p-1$ ดังนั้น $\phi(n)$ เป็นจำนวนเต็มคู่

5.4 ฟังก์ชันเมอร์บิอุส

ฟังก์ชันเมอร์บิอุส เป็นฟังก์ชันเลขคณิตที่สำคัญอีกฟังก์ชันหนึ่งหรือเรียกว่า ฟังก์ชันมิว ตั้งชื่อตามนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน คือ เอากุสท์ แฟร์ดินันด์ เมอร์บิอุส (August Ferdinand Möbius) ซึ่งมีบทนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.6

สำหรับจำนวนเต็มบวก n นิยาม ฟังก์ชันเมอร์บิอุส ดังนี้

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n = 1 \\ 0 & \text{ถ้ามีจำนวนเฉพาะ บางจำนวนซึ่ง } p^2 | n \\ (-1)^r & \text{ถ้า } n = p_1 p_2 \cdots p_r \text{ โดยที่ } p_i \text{ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน} \end{cases}$$

จากบทนิยามพบว่าสำหรับจำนวนเต็ม n ที่เขียนในรูปแบบบัญญัติ $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$

พบว่า ถ้ามี $k_i \geq 2$ จะได้ $\mu(n) = 0$ และ ทุก ๆ $k_i = 1$ แล้วจะได้ $\mu(n) = (-1)^r$

ตัวอย่าง 5.15 จงหาค่าของ $\mu(n)$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

วิธีทำ พิจารณาค่า n และ $\mu(n)$ ดังต่อไปนี้

n	$\mu(n)$
1	$\mu(1) = 1$
2	$\mu(2) = (-1)^1 = -1$
3	$\mu(3) = (-1)^1 = -1$

n	$\mu(n)$
$4 = 2^2$	$\mu(4) = \mu(2^2) = 0$ เพราะว่า $2^2 \mid 4$
5	$\mu(5) = (-1)^1 = -1$
$6 = 2 \cdot 3$	$\mu(6) = \mu(2 \cdot 3) = (-1)^2 = 1$
7	$\mu(7) = (-1)^1 = -1$
$8 = 2^3$	$\mu(8) = \mu(2^3) = 0$ เพราะว่า $2^2 \mid 8$

ตัวอย่าง 5.16 จงหา $\mu(n)$ เมื่อกำหนด $n = 15, 50, 330, 660, 1079, 2425$

วิธีทำ พิจารณาค่า n และ $\mu(n)$ ดังต่อไปนี้

n	$\mu(n)$
15	$\mu(15) = \mu(3 \cdot 5) = (-1)^2 = 1$
50	$\mu(50) = \mu(2 \cdot 5^2) = 0$
330	$\mu(330) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11) = (-1)^4 = 1$
660	$\mu(660) = \mu(2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11) = 0$
1079	$\mu(1079) = \mu(13 \cdot 83) = (-1)^2 = 1$
2425	$\mu(2425) = \mu(5^2 \cdot 97) = 0$

จากตัวอย่าง 5.16 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $\mu(n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และในที่นี้จะเป็นการหา $\mu(660)$ ดังภาพประกอบ 5.10



ภาพประกอบ 5.10 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\mu(660) = 0$

ฟังก์ชันเมอบิอุส หรือ ฟังก์ชันมิว เป็นฟังก์ชันเลขคณิตที่มีบทบาทสำคัญทั้งในการศึกษาทฤษฎีจำนวนและการศึกษาคณิตศาสตร์เชิงการนับ โดยมีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.9

ฟังก์ชัน μ เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ

พิสูจน์

ต้องการแสดงว่า μ เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ นั่นคือต้องแสดงว่า $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$

สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n ซึ่ง $(m, n) = 1$

กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $(m, n) = 1$

ถ้า $m = n = 1$ แล้ว $\mu(1) = \mu(1)\mu(1) = 1$

ต่อไปสมมติว่า $m > 1$ และ $n > 1$

กรณี ถ้ามีจำนวนเฉพาะ p ที่ทำให้ $p^2 \mid m$ หรือ $p^2 \mid n$ แล้ว $p^2 \mid mn$

ดังนั้น

$$\mu(mn) = 0 = \mu(m)\mu(n)$$

กรณี ถ้าไม่มีจำนวนเฉพาะ p ที่ทำให้ $p^2 \mid m$ และไม่มีจำนวนเฉพาะ q ที่ทำให้ $q^2 \mid n$

ดังนั้น m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ปลอดกำลังสองกล่าวคือ

$$m = p_1 p_2 \cdots p_r \text{ และ } n = q_1 q_2 \cdots q_s$$

โดยที่ p_i และ q_j เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน ทั้งนี้เนื่องจาก $(m, n) = 1$

จะได้ว่า

$$\mu(mn) = \mu(p_1 p_2 \cdots p_r q_1 q_2 \cdots q_s) = (-1)^{r+s} = (-1)^r (-1)^s = \mu(m)\mu(n)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน μ เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ

ตัวอย่าง 5.17 จงหา $\mu(8575)$

วิธีทำ เนื่องจาก $8575 = 5^2 \cdot 7^3$

นั่นคือ $\mu(8575) = \mu(5^2 \cdot 7^3)$ และ $(5^2, 7^3) = 1$

จะได้ $\mu(8575) = \mu(5^2)\mu(7^3)$

เนื่องจาก

$$\mu(5^2) = 0$$

$$\mu(7^3) = 0$$

ดังนั้น $\mu(8575) = 0$

ทฤษฎีบท 5.10

สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งนิยามโดย

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n = 1 \\ 0 & \text{ถ้า } n > 1 \end{cases}$$

โดยที่ d เป็นตัวหารที่เป็นบวกทั้งหมดของ n

พิสูจน์

ในกรณีที่ $n = 1$ จะได้ $\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) = 1$

สมมติให้ $n > 1$ และให้ $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$

เนื่องจาก μ เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณจะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ
ดังนั้น ถ้า n เขียนในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะในแบบมาตรฐานได้เป็น

$$F(n) = F(p_1^{k_1}) F(p_2^{k_2}) \cdots F(p_r^{k_r})$$

สำหรับ p^k ใด ๆ ตัวหารที่เป็นบวกของ p^k คือ $1, p, p^2, \dots, p^k$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} F(p^k) &= \sum_{d|p^k} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \cdots + \mu(p^k) \\ &= \mu(1) + \mu(p) = 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.18 จงหา $\sum_{d|n} \mu(d)$ เมื่อ $n = 10$

วิธีทำ ตัวหารที่เป็นบวกทั้งหมดของ 10 คือ 1, 2, 5 และ 10
จะได้

$$\sum_{d|10} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(5) + \mu(10)$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \mu(1) &= 1 & \mu(5) &= -1 \\ \mu(2) &= -1 & \mu(10) &= 1 \end{aligned}$$

จะได้

$$\sum_{d|10} \mu(d) = 1 + (-1) + (-1) + 1 = 0$$

ดังนั้น $\sum_{d|10} \mu(d) = 0$

จากตัวอย่าง 5.18 พบว่า $\sum_{d|10} \mu(d) = 0$ เพราะว่า $10 > 1$

ทฤษฎีบท 5.11 (สูตรการผกผันเมอบีอุส)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเลขคณิต และ F เป็นฟังก์ชันรวมยอดของ f ที่สัมพันธ์โดยสูตร

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

จะได้ว่า $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์

เริ่มจากการแทนค่า $\sum_{e|\frac{n}{d}} f(e)$ ในพจน์ฝั่งขวามือ คือ $F\left(\frac{n}{d}\right)$

จากบทนิยามฟังก์ชัน F เป็นฟังก์ชันรวมยอดของ f จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{e|\left(\frac{n}{d}\right)} f(e) \right) \\ &= \sum_{d|n} \sum_{e|\left(\frac{n}{d}\right)} \mu(d) f(e) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $d|n$ และ $e|\left(\frac{n}{d}\right)$ ก็ต่อเมื่อ $e|n$ และ $d|\left(\frac{n}{e}\right)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \left(\sum_{e|\left(\frac{n}{d}\right)} \mu(d) f(e) \right) &= \sum_{e|n} \left(\sum_{d|\left(\frac{n}{e}\right)} f(e) \mu(d) \right) \\ &= \sum_{e|n} \left(f(e) \sum_{d|\left(\frac{n}{e}\right)} \mu \right) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\sum_{d|\left(\frac{n}{e}\right)} \mu(d) = 0$ ยกเว้นที่ $\frac{n}{e} = 1$

นั่นคือ เมื่อ $n = e$ ผลบวกเท่ากับ 1 ดังนั้น

$$\sum_{e|n} \left(f(e) \sum_{d \left| \frac{n}{e} \right.} (d) \right) = \sum_{e=n} f(e) \cdot 1 = f(n)$$

$$\text{นั่นคือ } f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณและฟังก์ชัน F ซึ่งสัมพันธ์กันโดย $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$

ก็เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณด้วย ในทางกลับกันถ้า F เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณก็จะทำให้ได้ว่า f ก็เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.12

ให้ F เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ และ $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ จะได้ว่า f

เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณด้วย

พิสูจน์

จะแสดงว่า $F(mn) = f(m)f(n)$

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $(m, n) = 1$

เนื่องจากตัวหาร d ของ mn สามารถเขียนได้เป็น $d = d_1 d_2$ ได้เพียงวิธีเดียว

โดยที่ $d_1 | m$, $d_2 | n$ และ $(d_1, d_2) = 1$ โดยใช้สูตรการผกผันเมอบิอุสจะได้

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} \mu(d) F\left(\frac{mn}{d}\right) \\ &= \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} \mu(d_1 d_2) F\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right) \\ &= \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} \mu(d_1) \mu(d_2) F\left(\frac{m}{d_1}\right) F\left(\frac{n}{d_2}\right) \\ &= \sum_{d_1|m} \mu(d_1) F\left(\frac{m}{d_1}\right) \sum_{d_2|n} \mu(d_2) F\left(\frac{n}{d_2}\right) \\ &= f(m)f(n) \end{aligned}$$

5.5 ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุด

ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุด หรือฟังก์ชันวงเล็บ มีส่วนสำคัญในการศึกษาปัญหาการหารลงตัว แม้ว่าฟังก์ชันนี้ไม่ได้เป็นฟังก์ชันเลขคณิตตามบทนิยามที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น แต่จะมีส่วนที่สัมพันธ์กับฟังก์ชันเลขคณิตและใช้กันมากในทฤษฎีจำนวน ซึ่งมีบทนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.7

สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ กำหนดโดย $|x|$ คือจำนวนเต็มมากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x นั่นคือ $x - 1 < |x| \leq x$

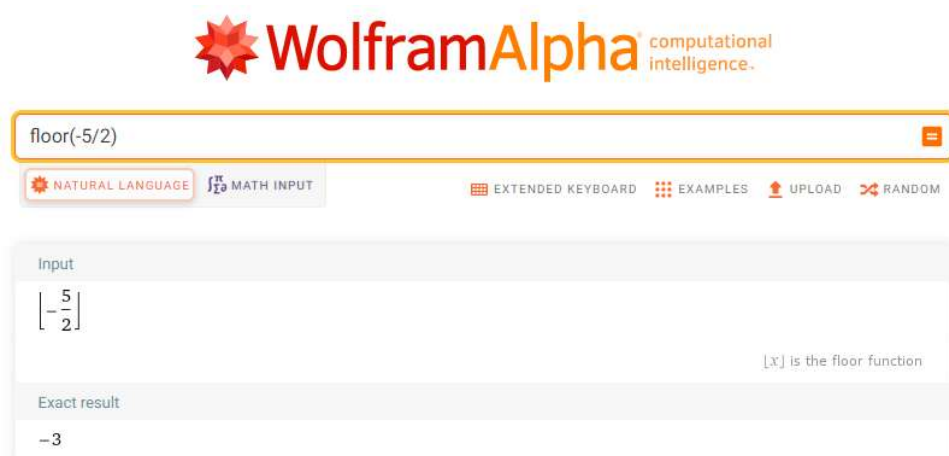
ตัวอย่าง 5.19 จงหาค่าของฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุดต่อไปนี้

1. $|4.2|$
2. $|\sqrt{5}|$
3. $|\frac{5}{2}|$
4. $|-41|$

วิธีทำ

1. $|4.2| = 4$
2. $|\sqrt{5}| = |2.2360679\dots| = 2$
3. $|\frac{5}{2}| = |-2.5| = -3$
4. $|-41| = -41$

จากตัวอย่าง 5.19 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาค่าของฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุด และในที่นี้จะเป็นการหา $|\frac{5}{2}|$ ดังภาพประกอบ 5.11



ภาพประกอบ 5.11 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left\lfloor -\frac{5}{2} \right\rfloor = -3$

สำหรับในกรณี x เป็นจำนวนเต็มจะได้ว่า $\lfloor x \rfloor = x$ จากบทนิยาม 5.7 จำนวนจริง x ใด ๆ จะสามารถเขียนได้เป็น $x = \lfloor x \rfloor + \theta$ โดยที่ $0 \leq \theta < 1$

ทฤษฎีบท 5.13

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุดสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ
2. $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
3. $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \\ 0 & \text{ถ้า } x \text{ ไม่เป็นจำนวนเต็ม} \end{cases}$
4. $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \frac{\lfloor x \rfloor}{n}$

พิสูจน์

1. ให้ $x = \lfloor x \rfloor + \theta, 0 \leq \theta < 1$

จะได้

$$x + n = \lfloor x \rfloor + n + \theta, 0 \leq \theta < 1$$

$$\text{นั่นคือ } \lfloor x + n \rfloor = (x + n) - \theta = (x - \theta) - n = \lfloor x \rfloor + n$$

2. ให้ $x = [x] + \theta_1, 0 \leq \theta_1 < 1$ และ $y = [y] + \theta_2, 0 \leq \theta_2 < 1$
จะได้

$$x + y = [x] + [y] + \theta_1 + \theta_2, 0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 2$$

ถ้า $0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 1$ จะได้

$$[x + y] = [x] + [y]$$

ถ้า $1 \leq \theta_1 + \theta_2 < 2$ จะได้

$$[x + y] = [x] + [y] + 1$$

นั่นคือ $[x + y] \geq [x] + [y]$

3. ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม $[x] = x$ และ $[-x] = -x$
จะได้

$$[x] + [-x] = x + (-x) = 0$$

ถ้า x ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะได้

$$x = [x] + \theta, 0 < \theta < 1$$

คูณด้วย -1 จะได้

$$\begin{aligned} -x &= -x - \theta, 0 < \theta < 1 \\ &= -1 - [x] + (1 - \theta) \end{aligned}$$

ดังนั้น $[-x] = -1 - [x]$ เพราะว่า $0 < 1 - \theta < 1$

จะได้

$$[x] + [-x] = -1$$

นั่นคือ $[x] + [-x] = 0$ ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม หรือ -1 ถ้า x ไม่เป็นจำนวนเต็ม

4. ให้ $\frac{x}{n} = \left[\frac{x}{n} \right] + \theta, 0 \leq \theta < 1$

$$\text{ดังนั้น } x = n \left[\frac{x}{n} \right] + n\theta$$

$$\text{จะได้ } [x] = n \left[\frac{x}{n} \right] + [n\theta]$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{[x]}{n} = \left[\frac{x}{n} \right] + \frac{[n\theta]}{n}$$

$$\text{แต่ } 0 \leq \frac{[n\theta]}{n} < \frac{n\theta}{n} = \theta < 1$$

$$\text{นั่นคือ } \left[\frac{x}{n} \right] = \left[\frac{[x]}{n} \right]$$

ตัวอย่าง 5.20 จงหาค่าของฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุดต่อไปนี้

$$1. \lfloor 2.5 + 5 \rfloor = \lfloor 2.5 \rfloor + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$2. \lfloor 2.3 \rfloor + \lfloor -2.3 \rfloor = 2 + (-3) = -1$$

$$3. \lfloor 2 \rfloor + \lfloor -2 \rfloor = 2 + (-2) = 0$$

$$4. \lfloor 2 \rfloor + \lfloor -2.5 \rfloor = 2 + (-3) = -1$$

$$5. \left\lfloor \frac{5.2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor 5.2 \rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = \lfloor 2.5 \rfloor = 2$$

$$6. \left\lfloor \frac{6.2}{3} \right\rfloor + \lfloor 3.2 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor 6.2 \rfloor}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$7. \left\lfloor \frac{10.2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{15.2}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor 10.2 \rfloor}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor 15.2 \rfloor}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{15}{7} \right\rfloor = 3 + 2 = 5$$

จากตัวอย่าง 5.20 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $\left\lfloor \frac{5.2}{2} \right\rfloor$ ดังภาพประกอบ 5.12



ภาพประกอบ 5.12 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left\lfloor \frac{5.2}{2} \right\rfloor = 2$

ตัวอย่าง 5.21 จงหา $\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{50}{2^k} \right\rfloor$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{50}{2^k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{50}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{2^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{2^6} \right\rfloor + \dots \\ &= 25 + 12 + 6 + 3 + 1 + 0 + 0 + \dots \\ &= 47 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{50}{2^k} \right\rfloor = 47$$

อีกจุดประสงค์หนึ่งที่สำคัญในการศึกษาฟังก์ชันจำนวนเต็มมากสุดนั้นคือการหาว่ามีจำนวนเฉพาะ p กี่ตัวและมีอะไรบ้างที่เป็นตัวประกอบของ $n!$ ซึ่งเป็นข้อมูลที่ทำให้สามารถเขียน $n!$ ในรูปแบบบัญญัติได้นั่นเอง

ทฤษฎีบท 5.14 (สูตรของเดอโพลิกแนค)

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า กำลังสูงสุด

ของ p ที่ $p^c \mid n!$ คือ $c_p = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

พิสูจน์

ตั้งแต่ 1 ถึง n มีจำนวนที่หารด้วย p ลงตัว ได้แก่ $p, 2p, 3p, \dots, tp$

โดยที่ t เป็นจำนวนเต็มมากที่สุด ซึ่ง $tp \leq n$ นั่นคือ $t = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$

ตั้งแต่ 1 ถึง n มีจำนวนที่หารด้วย p^2 ลงตัว ได้แก่ $p^2, 2p^2, 3p^2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor p^2$

มีทั้งหมด $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ จำนวน ตั้งแต่ 1 ถึง n มีจำนวนที่หารด้วย p^k ลงตัว

เมื่อ $p^k \leq n$ ได้แก่ $p^k, 2p^k, 3p^k, \dots, \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor p^k$ มีทั้งหมด $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

จำนวน จาก $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

ถ้า n ไปหารตัวประกอบทางขวามือแต่ละ 1 ครั้งจะได้ลงตัว $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ ครั้ง

ต่อมา n ไปหารตัวเลขซึ่งเป็นผลมาจากครั้งแรกจะได้ลงตัว $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ ครั้ง

เมื่อนำ p ไปหารตัวเลขทางขวามือแต่ละครั้งไปเรื่อย ๆ จะไม่อาจหารได้อีก

จะได้จำนวนครั้งของการหารด้วย p รวมทั้งสิ้น ดังต่อไปนี้

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

นั่นคือกำลังสูงสุดของ p คือ $c_p = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ ที่ทำให้ $p^c \mid n!$

ผลของทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ทำให้ได้สามารถเขียน $n!$ ในรูปแบบบัญญัติได้โดยมีชื่อว่าสูตร

ของเลอฌ็องดร์ ได้ดังต่อไปนี้ $n! = \prod_{p \leq n} p^{\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor}$

ตัวอย่าง 5.22 จงเขียน $20!$ ในรูปแบบบัญญัติ

วิธีทำ เนื่องจาก $20! = \prod_{p \leq n} p^{\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{20}{p^k} \right\rfloor}$

จำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า 20 ได้แก่ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

พิจารณา

ถ้า $p = 2$ จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{20}{2^k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{20}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^5} \right\rfloor + \dots \\ &= 10 + 5 + 2 + 1 + 0 + \dots \\ &= 18 \end{aligned}$$

ถ้า $p = 3$ จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{20}{3^k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{20}{3^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{3^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{3^5} \right\rfloor + \dots \\ &= 6 + 2 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= 8 \end{aligned}$$

ถ้า $p = 5$ จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{20}{5^k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{20}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{5^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{5^5} \right\rfloor + \dots \\ &= 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= 4 \end{aligned}$$

ถ้า $p = 7$ จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{20}{7^k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{20}{7^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{7^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{7^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{7^5} \right\rfloor + \dots \\ &= 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= 2 \end{aligned}$$

ถ้า $p = 11$ จะได้

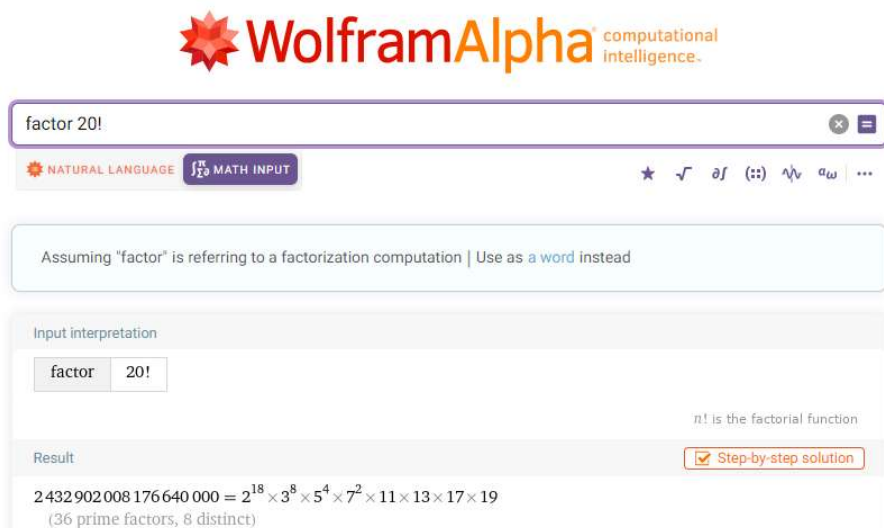
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{20}{11^k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{20}{11^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{11^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{11^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{11^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{11^5} \right\rfloor + \dots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

สำหรับ $p = 13, 17, 19$ จะได้

$$e_p = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 1$$

ดังนั้น $20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

จากตัวอย่าง 5.22 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อเขียน $20!$ ในรูปแบบบัญญัติ ดังภาพประกอบ 5.13



ภาพประกอบ 5.13 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

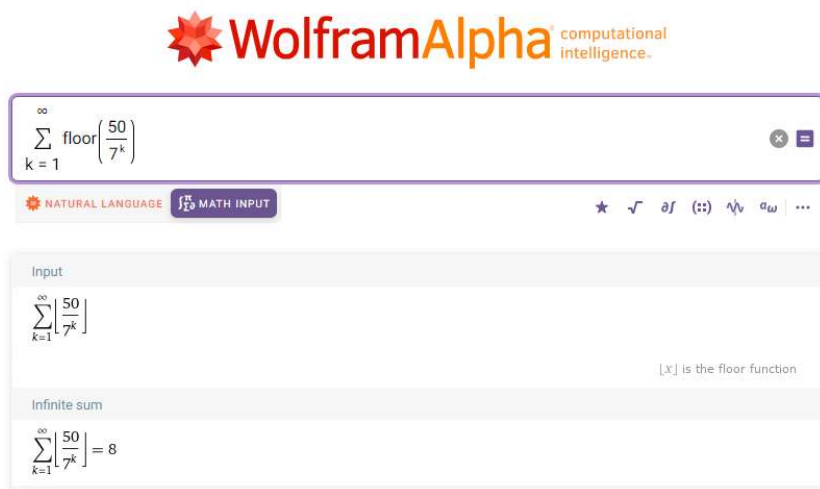
ตัวอย่าง 5.23 จงหาจำนวนเต็ม c ที่มากที่สุดที่ $7^c \mid 50!$

วิธีทำ กำลังสูงสุดของ 7 ใน $50!$ จากสูตรของเดอโพลิกแนค จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{50}{7^k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{50}{7^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{7^3} \right\rfloor + \cdots \\ &= 7 + 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= 8 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเต็ม c ที่มากที่สุดที่ $7^c \mid 50!$ คือ 8

จากตัวอย่าง 5.23 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหากำลังสูงสุดของ 7 ใน $50!$ ดังภาพประกอบ 5.14



ภาพประกอบ 5.14 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า กำลังสูงสุดของ 7 ใน $50!$ คือ 8

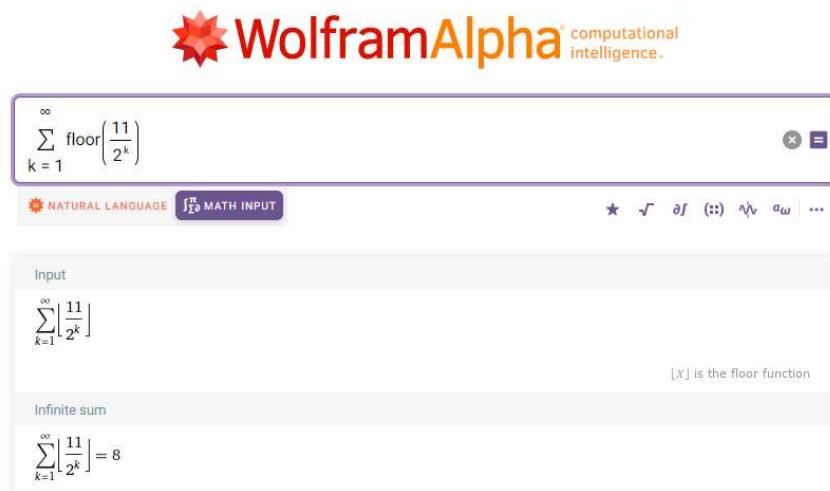
ตัวอย่าง 5.24 จงหาเลขชี้กำลังสูงสุดของ 2 ใน 11!

วิธีทำ กำลังสูงสุดของ 2 ใน 11! จากสูตรของเดอโพลิกแนค จะได้

$$\begin{aligned} e_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{11}{2^k} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{11}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{11}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{11}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{11}{2^4} \right\rfloor + \cdots \\ &= 5 + 2 + 1 + 0 + 0 + \cdots \\ &= 8 \end{aligned}$$

ดังนั้น เลขชี้กำลังสูงสุดของ 2 ใน 11! คือ 8

จากตัวอย่าง 5.24 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหากำลังสูงสุดของ 2 ใน 11! ดังภาพประกอบ 5.15



ภาพประกอบ 5.15 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาเลขชี้กำลังสูงสุดของ 2 ใน 11! คือ 8

การหากำลังสูงสุดของ p ที่ $p|n!$ ในกรณีที่ p ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ แสดงในตัวอย่างต่อไปนี

ตัวอย่าง 5.25 จงหาจำนวนเต็ม k ที่มากที่สุดที่ทำให้ 12^k หาร 100! ลงตัว

วิธีทำ เนื่องจาก $12 = 2^2 \cdot 3$ พิจารณากำลังสูงสุดของจำนวนเฉพาะ 2 และ 3 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} c_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{100}{2^k} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{100}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^7} \right\rfloor + \cdots \\ &= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 + 0 + \cdots \\ &= 97 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{100}{3^k} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{100}{3^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^7} \right\rfloor + \dots \\
&= 33 + 11 + 3 + 1 + 0 + 0 + 0 + \dots
\end{aligned}$$

แสดงว่า $100!$ เขียนในรูปแบบบัญญัติได้เป็น

$$100! = 2^{97} \cdot 3^{48} \cdot 5^a \cdot 7^b \dots 97^w$$

$$\text{เนื่องจาก } 2^{97} \cdot 3^{48} = 2(2^2)^{48} \cdot 3^{48} = 2(2^2 \cdot 3)^{48} = 2 \cdot (12)^{48}$$

ดังนั้น $k = 48$ เป็นจำนวนเต็มมากที่สุดที่ทำให้ 12^k หาร $100!$ ลงตัว

5.6 สรุปท้ายบทที่ 5

ฟังก์ชันทฤษฎีจำนวน หรือ ฟังก์ชันเลขคณิต คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก และเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนเชิงซ้อน ฟังก์ชันที่ศึกษาในบทนี้ล้วนเป็นฟังก์ชันที่มีบทประยุกต์ทั้งใน การศึกษาทฤษฎีจำนวนและการศึกษาคณิตศาสตร์เชิงการนับ ในหัวข้อแรกจะกล่าวถึง ฟังก์ชันของ จำนวนตัวหารที่เป็นบวกของ n แทนด้วย $\tau(n)$ และผลบวกของตัวหารที่เป็นบวกของ n แทนด้วย

$\sigma(n)$ และนอกจากนี้ยังได้ศึกษาฟังก์ชันในรูปแบบ $\sum_{d|n} f(d)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของผลบวกของค่า

$f(d)$ เมื่อ d คือจำนวนเต็มบวกที่เป็นตัวหารของจำนวนเต็ม n การหา $\tau(n)$ และ $\sigma(n)$ หาได้

โดยใช้หลักการนับแต่ไม่สะดวกในกรณีที่ n มีค่ามาก ๆ จึงมีทฤษฎีบทสำหรับการหาโดยใช้การเขียน ในรูปบัญญัติของ n เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุด หัวข้อที่สองจะเป็นการศึกษาฟังก์ชันฟอยเลอร์ $\phi(n)$

หาได้โดยใช้หลักการนับแต่ไม่สะดวกในกรณีที่ n มีค่ามากจึงมีทฤษฎีบทสำหรับการหาโดยเริ่มจากที่ n เป็นจำนวนเฉพาะไปจนถึงจำนวน n ใด ๆ ฟังก์ชันที่สามคือฟังก์ชันเมอร์บิอูสพบว่าสำหรับจำนวน

เต็ม n ที่เขียนในรูปแบบบัญญัติ $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ ถ้ามี $k_i \geq 2$ จะได้ $\mu(n) = 0$ และ ทุก ๆ

$k_i = 1$ แล้วจะได้ $\mu(n) = (-1)^r$ ฟังก์ชันทฤษฎีจำนวนที่ได้ศึกษานั้นยังพบว่า τ, σ, ϕ และ μ

เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณภายใต้เงื่อนไขบางอย่าง จากคุณสมบัติดังกล่าวนี้ทำให้สามารถหาค่า $\tau(n), \sigma(n), \phi(n)$ และ $\mu(n)$ ได้ง่ายมากยิ่งขึ้น และในหัวข้อสุดท้ายเป็นการศึกษาฟังก์ชันจำนวน

เต็มมากที่สุด ฟังก์ชันนี้ไม่ได้เป็นฟังก์ชันเลขคณิตแต่มีส่วนสำคัญในการศึกษาปัญหาการหารลงตัว แต่จะมีส่วนที่สัมพันธ์กับฟังก์ชันเลขคณิตและเป็นฟังก์ชันที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาทฤษฎีจำนวน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จงยกตัวอย่างฟังก์ชันเลขคณิตมา 5 ฟังก์ชัน
2. จงหา $\tau(n)$ และ $\sigma(n)$ เมื่อ $n = 10, 11, 12$
3. จงหา $\sum_{d|n} f(d)$ เมื่อ $n = 12$
4. จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าต่อไปนี้
 - 4.1 $\tau(120)$ และ $\sigma(120)$
 - 4.2 $\tau(810)$ และ $\sigma(810)$
 - 4.3 $\tau(1550)$ และ $\sigma(1550)$
5. จงแสดงว่า $\tau(242) = \tau(243) = \tau(244) = \tau(245)$
6. จงหา $\phi(n)$ เมื่อกำหนดจำนวนเต็ม n ให้ดังต่อไปนี้
 - 6.1 406
 - 6.2 1001
 - 6.3 1228
 - 6.4 36000
7. จงหาค่าของฟังก์ชันเมอบีอุส ต่อไปนี้
 - 7.1 $\mu(12)$
 - 7.2 $\mu(50)$
 - 7.3 $\mu(129)$
 - 7.4 $\mu(1001)$
8. จงพิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว $|x| + |-x| = 0$
9. ถ้า n เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว $\sigma(n) + \phi(n) = n\pi(n)$
10. จงหาค่าของฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุดต่อไปนี้
 - 10.1 $|2.5 + 5.9|$
 - 10.2 $|2.3| + |-2.3|$
 - 10.3 $|2.3| + |-2.5|$
 - 10.4 $|-9.2| + |-2.5|$
11. จงหาค่า c_p ที่มากที่สุด ที่ $p^c | 60!$ เมื่อ $p = 3, 5, 11$
12. จงหาเลขชี้กำลังสูงสุดของจำนวนต่อไปนี้
 - 12.1 3 ใน $20!$
 - 12.2 3 ใน $50!$
 - 12.3 7 ใน $60!$
 - 12.4 7 ใน $85!$
 - 12.5 19 ใน $100!$
 - 12.6 23 ใน $120!$

13. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปแบบสัญกรณ์

13.1 $5!$

13.2 $7!$

13.3 $10!$

13.4 $11!$

13.5 $15!$

13.6 $21!$

13.7 $40!$

13.8 $80!$

14. จงหาจำนวนเต็ม k ที่มากที่สุดที่ทำให้ 12^k หารจำนวนต่อไปนี้ลงตัว

14.1 $5!$

14.2 $8!$

14.3 $11!$

14.4 $12!$

14.5 $15!$

14.6 $18!$