

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4

การหาปริพันธ์ที่ละส่วน และปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

เนื้อหาประจำบท

1. การหาปริพันธ์ที่ละส่วน
2. การหาปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำ
3. ลิมิตของปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์
4. ตัวถูกปริพันธ์เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถวิเคราะห์โจทย์ได้ว่ากรณีไหนใช้วิธีการหาปริพันธ์ที่ละส่วนแล้วจะสามารถหาปริพันธ์ได้
2. สามารถเลือก u และ dv จากโจทย์ได้อย่างถูกต้อง
3. หาปริพันธ์ที่ละส่วนได้อย่างถูกต้อง
4. หาปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำได้อย่างถูกต้อง
5. หาปริพันธ์ที่ละส่วนโดยรูปแบบจัดเป็นตารางได้
6. บอกลักษณะของปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้
7. หาปริพันธ์ไม่ตรงแบบในกรณีลิมิตของปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์
8. หาปริพันธ์ไม่ตรงแบบในกรณีตัวถูกปริพันธ์เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 การเลือกใช้วิธีการหาปริพันธ์ที่ละส่วนแล้วจะสามารถหาปริพันธ์ได้
 - 1.2 การใช้สูตร $\int u dv = uv - \int v du$ และเลือก u และ dv
 - 1.3 การหาปริพันธ์ที่ละส่วน
 - 1.4 การหาปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำ
 - 1.5 การหาปริพันธ์ที่ละส่วนโดยรูปแบบจัดเป็นตาราง
 - 1.6 ลักษณะของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ
 - 1.7 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบในกรณีลิมิตของปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์
 - 1.8 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบในกรณีตัวถูกปริพันธ์เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง

2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

- 2.1. ศึกษาข้อมูลจาก เกี่ยวกับเทคนิคปริพันธ์ที่ละส่วน ปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำ ปริพันธ์ที่ละส่วนแบบใช้ตาราง และปริพันธ์ไม่ตรงแบบเพิ่มเติม
- 2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation
3. ใบงาน

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. การตอบคำถาม
3. ทดสอบท้ายชั่วโมง
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 4

การหาปริพันธ์ที่ละส่วน และปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

สำหรับเทคนิคการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในบทที่ผ่านมาเป็นการใช้วิธีแยกเศษส่วนย่อยซึ่งเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ กล่าวคือฟังก์ชันที่อยู่ในรูปเศษส่วนเป็นพหุนาม แต่ก็ยังมีฟังก์ชันหลายฟังก์ชันอีกหลายรูปแบบที่เราไม่สามารถหาปริพันธ์ได้โดยใช้เพียงการแยกเศษส่วนย่อย จึงจำเป็นที่จะต้องใช้เทคนิคอื่น ๆ ในการหาปริพันธ์จึงจะหาผลลัพธ์ได้สำเร็จ การศึกษาในบทนี้จะเป็นการเพิ่มเทคนิคของการหาปริพันธ์ในอีกรูปแบบ เพื่อที่จะสามารถเลือกใช้ระเบียบวิธีที่เหมาะสมกับรูปแบบของตัวปริพันธ์ ซึ่งจัดเป็นรูปแบบต่าง ๆ ได้ และอย่างที่กล่าวมาแล้วในบทที่ผ่านมาว่าปัญหาการหาปริพันธ์ทั้งการหาปริพันธ์จำกัดเขตและไม่จำกัดเขต อาจต้องใช้เทคนิคของการหาปริพันธ์มากกว่า 1 เทคนิค ผสมผสานกัน สำหรับในบทนี้จะเป็นอีกเทคนิคที่ช่วยให้สามารถหาปริพันธ์ได้ในอีกรูปแบบหนึ่งนั่นคือการหาปริพันธ์ที่ละส่วน แต่ในบางครั้งการหาปริพันธ์ที่ละส่วนเพียงครั้งเดียวก็ไม่สามารถแก้ปัญหาการหาปริพันธ์ได้จึงต้องมีการศึกษาหาปริพันธ์ที่ละส่วนมากกว่า 1 ครั้งซึ่งเรียกว่าปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำ และในหัวข้อสุดท้ายจะเป็นการหาปริพันธ์จำกัดเขตแต่ขอบเขตจะไม่ใช้จำนวนจริงและตัวถูกปริพันธ์เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง

4.1 การหาปริพันธ์ที่ละส่วน

การหาปริพันธ์ที่ละส่วนเป็นอีกเทคนิคที่ช่วยให้สามารถคำนวณหาค่าของปริพันธ์ได้หลายลักษณะที่ไม่เหมาะสมกับการใช้เทคนิคอื่น ๆ แล้ว โดยอาศัยหลักที่ว่า ถ้า $u(x)$ และ $v(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จากกฎของการหาอนุพันธ์ของผลคูณของสองฟังก์ชันจากสูตรอนุพันธ์ของผลคูณที่ Sengupta. A.N. (2011 : 286-287) และคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร (2558 : 3) ได้แสดงไว้ดังต่อไปนี้

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

แล้วหาปริพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการจะได้ผลลัพธ์

$$\int \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] dx = \int u(x)v'(x) + v(x)u'(x) dx$$
$$u(x)v(x) + c = \int u(x)v'(x) dx + \int v(x)u'(x) dx$$

หรือ

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx + c$$

Stewart. J. (2016 : 513) ได้ให้สูตรการหาปริพันธ์ที่ละส่วนเนื่องจากปริพันธ์ทางขวาของสมการจะต้องให้ค่าคงตัวของการหาปริพันธ์จึงไม่จำเป็นที่จะต้องใส่ค่า c ดังนี้

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx \quad \dots(1)$$

เรียกสมการที่ (1) ว่าการหาปริพันธ์ที่ละส่วน และโดยการใช้สูตรการหาปริพันธ์ที่ละส่วนนี้ จะทำให้ความยากของปัญหาการหาปริพันธ์ลดลงได้มากมาย ในการนำสูตรปริพันธ์ที่ละส่วนไปใช้นิยามที่จะเขียนสูตร (1) ใหม่ให้จำได้ง่ายขึ้น โดย Guichard. D. (2019 : 175) และ สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ (2558 : 280) ได้ให้สูตรการหาปริพันธ์ที่ละส่วนไว้ดังนี้

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \dots(2)$$

หลักสำคัญของการหาปริพันธ์ที่ละส่วน คือ ต้องแยกตัวที่จะหาปริพันธ์ออกเป็น 2 ส่วน ส่วนหนึ่ง เป็น u และอีกส่วนหนึ่งเป็น dv โดยปกติมีหลักการทั่วไปพอสรุปได้ดังนี้

1. เลือก u ซึ่งเมื่อหา du แล้วทำให้เกิดปริพันธ์ใหม่เป็น $\int v du$ ซึ่งง่ายกว่าปริพันธ์ตัวเดิม คือ $\int u dv$
2. เลือก dv ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ v ได้ง่าย
3. พยายามจัดกลุ่มฟังก์ชันที่มีหลายฟังก์ชันที่เราจะหาปริพันธ์ ให้เป็นกลุ่มใหญ่ที่สุดให้เป็น dv เพื่อลดความยุ่งยากที่จะเกิดขึ้นในการหาปริพันธ์ตัวใหม่

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2554 : 11) ได้แสดงไว้ว่าวิธีการหาปริพันธ์ที่ละส่วน ใช้ได้ดีกับตัวที่เราจะหาปริพันธ์ประเภท เป็นผลคูณของสองฟังก์ชันขึ้นไป มีฟังก์ชันอดิศัย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1 จงหาค่า $\int xe^x dx$

วิธีทำ เราจะหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณ xe^x

$u = x$	$dv = e^x dx$
$du = dx$	$v = \int e^x dx$
	$= e^x$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$ จะได้

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^{3x} dx$$

$$= xe^x - e^x + c$$

ดังนั้น $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$

ตัวอย่าง 4.2 จงหาค่า $\int x e^{3x} dx$

วิธีทำ เราจะหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณ $x e^{3x}$

$u = x$	$dv = e^{3x} dx$
$du = dx$	$v = \int e^{3x} dx$
	$= \frac{1}{3} e^{3x}$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$ จะได้

$$\begin{aligned} \int x e^{3x} dx &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c$

ตัวอย่าง 4.3 จงหาค่า $\int x \sin 2x dx$

วิธีทำ เราจะหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณ $x \sin 2x$

$u = x$	$dv = \sin 2x dx$
$du = dx$	$v = \int \sin 2x dx$
	$= -\frac{1}{2} \cos 2x$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$ จะได้

$$\begin{aligned} \int x \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \int \frac{1}{2} \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

สุวรรณ ถังมณี และบุษราพร เหลืองมลาวัฒน์ (2554 : 105) กล่าวว่าหลักของการหาปริพันธ์ทีละส่วน คือ ต้องแยกตัวที่จะหาปริพันธ์ออกเป็น 2 ส่วน ส่วนหนึ่ง เป็น u และอีกส่วนหนึ่งเป็น dv บางครั้งฟังก์ชันที่เราจะหาปริพันธ์นั้นอาจจะมีแค่ฟังก์ชันเดียวดังนั้นเราเลยกำหนดให้ $dx = dv$ และ u คือฟังก์ชันที่เหลือ แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.4 จงหาค่า $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx$

วิธีทำ เลือก u และ dv ดังต่อไปนี้

$u = \sqrt{x^2 + a^2}$ $du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$	$dv = dx$ $v = x$
---	-------------------

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ จะได้

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \, dx \\
 &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \, dx \\
 &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \, dx \\
 &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \left(\frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) dx \\
 &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \left(\sqrt{x^2 + a^2} \right) dx - a^2 \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) dx
 \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \left(\sqrt{x^2 + a^2} \right) dx - a^2 \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) dx \quad \dots(1)$$

จากสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned}
 2 \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx &= x\sqrt{x^2 + a^2} - a^2 \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) dx \\
 2 \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx &= x\sqrt{x^2 + a^2} - a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c \\
 \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a^2} - a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c \right) \\
 \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$

ตัวอย่าง 4.5 จงหาค่า $\int \arctan x \, dx$

วิธีทำ เลือก u และ dv ดังต่อไปนี้

$u = \arctan x$	$dv = dx$
$du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$	$v = x$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ จะได้

$$\begin{aligned} \int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$

ตัวอย่าง 4.6 จงหาค่า $\int \ln x \, dx$

วิธีทำ เลือก u และ dv ดังต่อไปนี้

$u = \ln x$	$dv = dx$
$du = \frac{1}{x} dx$	$v = x$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ จะได้

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) dx \\ &= x \ln x - \int 1 \, dx \\ &= x \ln x - x + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาค่า $\int \sec^3 x \, dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $A = \int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \sec^2 x \, dx$

หาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณ $\sec x \sec^2 x$

เลือก u และ dv ดังต่อไปนี้

$u = \sec x$ $du = \sec x \tan x \, dx$	$dv = \sec^2 x \, dx$ $v = \int \sec^2 x \, dx$ $= \tan x$
--	--

$$\begin{aligned}
A &= \int \sec^3 x \, dx \\
&= \int \sec x \sec^2 x \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - A - \int \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - A - \ln |\sec x + \tan x| + c \\
2A &= \sec x \tan x - \ln |\sec x + \tan x| + c \\
A &= \frac{\sec x \tan x}{2} - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \sec^3 x \, dx = \frac{\sec x \tan x}{2} - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + c$

4.2 การหาปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำ

Gilbert. S. (2018 284-285) และ มงคล ทองสงคราม (2546 : 270) กล่าวว่า การหาปริพันธ์ที่ละส่วนเพียงแค่ครั้งเดียวบางครั้งเราไม่สามารถแก้ปัญหามาที่เราต้องการ ดังนั้นการที่เราจะหาปริพันธ์นั้นบางครั้งเราต้องหาปริพันธ์ที่ละส่วนมากกว่า 1 ครั้ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.8 จงหาค่า $\int x^2 e^{2x+1} \, dx$

วิธีทำ เราจะหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณ $x^2 e^{2x+1}$

$u = x^2$ $du = 2x \, dx$	$dv = e^{2x+1} \, dx$ $v = \int e^{2x+1} \, dx$ $= \frac{1}{2} e^{2x+1}$
------------------------------	--

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ จะได้

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{2x+1} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x+1} - \int \frac{1}{2} e^{2x+1} 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x+1} - \int e^{2x+1} x dx\end{aligned}$$

ในการหา $\int e^{2x+1} x dx$ เราจะใช้การหาปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำอีก 1 ครั้งโดยกำหนดให้

$u = x$ $du = dx$	$dv = e^{2x+1} dx$ $v = \int e^{2x+1} dx$ $= \frac{1}{2} e^{2x+1}$
----------------------	--

จะได้

$$\begin{aligned}\int e^{2x+1} x dx &= x \left(\frac{1}{2} e^{2x+1} \right) - \int \frac{1}{2} e^{2x+1} dx \\ &= \frac{x}{2} e^{2x+1} - \frac{1}{4} e^{2x+1} + c\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int x^2 e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x+1} - \frac{x}{2} e^{2x+1} + \frac{1}{4} e^{2x+1} + c$

ตัวอย่าง 4.9 จงหาค่า $\int x^2 e^x dx$

วิธีทำ เราจะหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณ $x^2 e^x$

$u = x^2$ $du = 2x dx$	$dv = e^x dx$ $v = \int e^x dx$ $= e^x$
---------------------------	---

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$ จะได้

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int e^x 2x dx \\ &= x^2 e^x - 2 \int e^x x dx\end{aligned}$$

ในการหา $\int e^x x dx$ เราจะใช้การหาปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำอีก 1 ครั้งโดยกำหนดให้

$u = x$ $du = dx$	$dv = e^x dx$ $v = \int e^x dx$ $= e^x$
----------------------	---

จะได้

$$\begin{aligned}\int e^x x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + c\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + c$

ตัวอย่าง 4.10 จงหาค่า $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

แล้วคูณปริพันธ์ด้วย $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ เพื่อแปลงรูปปริพันธ์ให้ง่ายต่อการหาปริพันธ์ต่อไป

$$\begin{aligned}I &= \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \int \sqrt{a^2 - x^2} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - I_1\end{aligned}$$

เมื่อ $I_1 = \int x \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

ดำเนินการหา I_1 โดยการหาปริพันธ์ที่ละส่วนดังนี้

$u_1 = x$ $du_1 = dx$	$dv_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ $v_1 = \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ $= -\sqrt{a^2 - x^2}$
--------------------------	---

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$ จะได้

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int x \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\
&= -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \\
&= -x\sqrt{a^2 - x^2} + I
\end{aligned}$$

ซึ่ง $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

จะเห็นว่า $I = a^2 \arcsin \frac{x}{a} - I_1$

และ $I_1 = -x\sqrt{a^2 - x^2} + I$

โดยการหาปริพันธ์ที่ผ่านมาได้ว่า

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \\
I &= a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - I \\
2I &= a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} \\
I &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c$

ตัวอย่าง 4.11 จงหาค่า $\int x^3 e^{2x-1} dx$

วิธีทำ เราจะหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณ $x^3 e^{2x-1}$

$u = x^3$	$dv = e^{2x-1} dx$
$du = 3x^2 dx$	$v = \int e^{2x-1} dx$
	$= \frac{1}{2} e^{2x-1}$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^{2x-1} dx &= x^3 \left(\frac{1}{2} e^{2x-1} \right) - \int \frac{1}{2} e^{2x-1} (3x^2 dx) \\
&= \frac{x^3}{2} e^{2x-1} - \frac{3}{2} \int x^2 e^{2x-1} dx
\end{aligned}$$

ในการหา $\int x^2 e^{2x-1} dx$ เราจะใช้การหาปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำอีก 1 ครั้งโดยกำหนดให้

$u = x^2$	$dv = e^{2x-1} dx$
$du = 2x dx$	$v = \int e^{2x-1} dx$
	$= \frac{1}{2} e^{2x-1}$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$ จะได้

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x-1} dx &= x^2 \left(\frac{1}{2} e^{2x-1} \right) - \int \frac{1}{2} e^{2x-1} (2x dx) \\ &= \frac{x^2}{2} e^{2x-1} - \int x e^{2x-1} dx \end{aligned}$$

และในการหา $\int x e^{2x-1} dx$ เราจะใช้การหาปริพันธ์ทีละส่วนซ้ำอีก 1 ครั้งโดยกำหนดให้

$u = x$	$dv = e^{2x-1} dx$
$du = dx$	$v = \int e^{2x-1} dx$
	$= \frac{1}{2} e^{2x-1}$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$ จะได้

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x-1} dx &= x \left(\frac{1}{2} e^{2x-1} \right) - \int \frac{1}{2} e^{2x-1} dx \\ &= \frac{x}{2} e^{2x-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) e^{2x-1} \\ &= \frac{x}{2} e^{2x-1} - \frac{1}{4} e^{2x-1} \end{aligned}$$

$$\text{จาก } \int x^3 e^{2x-1} dx = \frac{x^3}{2} e^{2x-1} - \frac{3}{2} \int x^2 e^{2x-1} dx$$

$$\text{และ } \int x^2 e^{2x-1} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x-1} - \int x e^{2x-1} dx$$

$$\text{เนื่องจาก } \int x e^{2x-1} dx = \frac{x}{2} e^{2x-1} - \frac{1}{4} e^{2x-1}$$

จะได้

$$\int x^3 e^{2x-1} dx = \frac{x^3}{2} e^{2x-1} - \frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{2} e^{2x-1} - \frac{x}{2} e^{2x-1} + \frac{1}{4} e^{2x-1} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } \int x^3 e^{2x-1} dx = \frac{x^3}{2} e^{2x-1} - \frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{2} e^{2x-1} - \frac{x}{2} e^{2x-1} + \frac{1}{4} e^{2x-1} \right)$$

Guichard. D. (2019 : 176-177) และ วิรัตน์ สุวรรณภิกขิต (2548 240-244) แสดงวิธีการหาปริพันธ์ทีละส่วนโดยใช้ตารางเพื่อลดเวลาและกระบวนการทำให้เกิดข้อผิดพลาดได้น้อยลง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.12 จงหาค่า $\int x^2 e^{2x-1} dx$

วิธีทำ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = e^{2x-1}$ จัดเป็นตารางดังนี้

$f(x)$ และอนุพันธ์ของ $f(x)$	$g(x)$ และปริพันธ์ของ $g(x)$
x^2	e^{2x-1}
$2x$	$\frac{1}{2} e^{2x-1}$
2	$\frac{1}{4} e^{2x-1}$
0	$\frac{1}{8} e^{2x-1}$

ดังนั้น $\int x^2 e^{2x-1} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x-1} - \frac{x}{2} e^{2x-1} + \frac{1}{4} e^{2x-1} + c$

ตัวอย่าง 4.13 จงหาค่า $\int x^2 e^x dx$

วิธีทำ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = e^x$ จัดเป็นตารางดังนี้

$f(x)$ และอนุพันธ์ของ $f(x)$	$g(x)$ และปริพันธ์ของ $g(x)$
x^2	e^x
$2x$	e^x
2	e^x
0	e^x

ดังนั้น $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$

ตัวอย่าง 4.13 จงหาค่า $\int x^2 \cos 3x dx$

วิธีทำ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = \cos 3x$ จัดเป็นตารางดังนี้

$f(x)$ และอนุพันธ์ของ $f(x)$	$g(x)$ และปริพันธ์ของ $g(x)$
x^2	$\cos 3x$
$2x$	$\frac{1}{3} \sin 3x$
2	$-\frac{1}{9} \cos 3x$
0	$-\frac{1}{27} \sin 3x$

ดังนั้น $\int x^2 \cos 3x \, dx = x^2 \left(\frac{1}{3} \sin 3x \right) - 2x \left(-\frac{1}{9} \cos 3x \right) + 2 \left(-\frac{1}{27} \sin 3x \right)$

ตัวอย่าง 4.14 จงหาค่า $\int x^3 e^{2x} \, dx$

วิธีทำ $f(x) = x^3$ และ $g(x) = e^{2x}$ จัดเป็นตารางดังนี้

$f(x)$ และอนุพันธ์ของ $f(x)$	$g(x)$ และปริพันธ์ของ $g(x)$
x^3	e^{2x}
$3x^2$	$\frac{1}{2} e^{2x}$
$6x$	$\frac{1}{4} e^{2x}$
6	$\frac{1}{8} e^{2x}$
0	$\frac{1}{16} e^{2x}$

ดังนั้น $\int x^3 e^{2x} \, dx = \frac{x^3}{2} e^{2x} - \frac{3x^2}{4} e^{2x} + \frac{3x}{4} e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x} + c$

จากที่ได้ศึกษามาแล้วว่าการหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$ จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อลิมิตของการหาปริพันธ์ คือ a และ b ต้องเป็นจำนวนจริงที่กำหนดค่าให้ชัดเจน และฟังก์ชัน f ต้องต่อเนื่อง หรือมีขอบเขตบนช่วงของการหาปริพันธ์คือ $[a, b]$ ในหัวข้อนี้จะพิจารณาปริพันธ์จำกัดเขตในกรณีที่ลิมิตของการหาปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์ (∞) หรือ f ไม่ต่อเนื่องแบบที่มีค่าเป็นอนันต์ที่บางจุด $c \in [a, b]$ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.1

$\int_a^b f(x) dx$ เรียกว่า**ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ** (Improper Integral) ถ้า

1. ลิมิตของการปริพันธ์ a หรือ b อย่างน้อยหนึ่งค่ามีค่าเป็นอนันต์ หรือ
2. ตัวถูกปริพันธ์ $f(x)$ มีจุดที่ไม่ต่อเนื่องอย่างน้อย 1 จุดบนช่วง $[a, b]$

จากบทนิยามของปริพันธ์ไม่ตรงแบบเราจะแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 เรื่องคือ ลิมิตของปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์ และ ตัวถูกปริพันธ์เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง

4.3 ลิมิตของปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์

อำพล ธรรมเจริญ (2546 : 145-147) ได้แสดงกรณีที่ลิมิตของการปริพันธ์ a หรือ b อย่างน้อยหนึ่งค่ามีค่าเป็นอนันต์ หรือ ลิมิตของปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์โดย ไว้ดังนี้

4.3.1 ลิมิตบนเป็นอนันต์ ($b = \infty$)

ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a, \infty)$ จะกำหนดว่า

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

หมายความว่า $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$ ต้องหาค่าได้ และจะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x) dx$ นี้ **ลู่เข้า**

แต่ถ้า $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$ หาค่าไม่ได้แสดงว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x) dx$ นี้ **ลู่ออก**

ตัวอย่าง 4.15 จงแสดงว่า $\int_1^{\infty} 4x^3 \, dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int_1^{\infty} 4x^3 \, dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b 4x^3 \, dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{4x^4}{4} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [x^4]_1^b \\ &= -\lim_{b \rightarrow \infty} [b^4 - 1^4] \\ &= \infty \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_1^{\infty} 4x^3 \, dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 4.16 จงแสดงว่า $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \, dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \, dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^3} \, dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^t \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2t^2} \right]_1^t \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2(1)^2} \right] \\ &= -[0 - 1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \, dx$ ลู่เข้าสู่ 1

ตัวอย่าง 4.17 จงแสดงว่า $\int_0^{\infty} e^x \, dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int_0^{\infty} e^x \, dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^x \, dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [e^x]_0^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow \infty} [e^t - e^0] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} e^t - \lim_{t \rightarrow \infty} 1 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^{\infty} e^x dx$ ลู่ออกสู่อินฟินิตี้

ตัวอย่าง 4.18 จงแสดงว่า $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$ ลู่อเข้าหรือลู่อออก ถ้าลู่อเข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

วิธีทำ $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t xe^{-x} dx$

การหา $\int xe^x dx$ ใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ที่ละส่วนในหัวข้อที่ผ่านมา

จะได้ $\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} xe^{-x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t xe^{-x} dx \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} [-xe^{-x} - e^{-x}] \Big|_0^t \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} [(-te^{-t} - e^{-t}) - (-0e^{-0} - e^{-0})] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} [(-te^{-t} - e^{-t}) - (-0e^{-0} - e^{-0})] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-t}(t+1) + 1] \\
&= -\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}(t+1) + \lim_{t \rightarrow \infty} 1 \\
&= -\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}(t+1) + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{เนื่องจาก } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}(t+1) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+1}{e^t} \quad (\text{รูปแบบยังไม่กำหนด } \frac{\infty}{\infty}) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} \quad (\text{โดยกฎของโลปีตาล}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$ ลู่อเข้าสู่ 0

4.3.2 ลิมิตล่างเป็นอนันต์ ($a = -\infty$)

ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1 ถ้า f ต่อเนื่องบน $(-\infty, b]$ จะกำหนดว่า

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

ตัวอย่าง 4.19 จงแสดงว่า $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4} \, dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4} \, dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x^4} \, dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_t^{-1} \\ &= -\lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3x^3} \right]_t^{-1} \\ &= -\lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3(-1)^3} - \frac{1}{3(t)^3} \right] \\ &= -\lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{3t^3} \right] \\ &= \frac{1}{3} + 0 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4} \, dx$ ลู่เข้าสู่ $\frac{1}{3}$

ตัวอย่าง 4.20 จงแสดงว่า $\int_{-\infty}^0 e^x \, dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int_{-\infty}^0 e^x \, dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^x \, dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [e^x]_t^0 \\ &= -\lim_{t \rightarrow -\infty} [e^x]_0^t \\ &= -\lim_{t \rightarrow -\infty} [e^t - e^0] \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^0 e^x \, dx$ ลู่เข้าสู่ 1

ตัวอย่าง 4.21 จงแสดงว่า $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [-2\sqrt{1-x}] \Big|_t^0 \\ &= -\lim_{t \rightarrow -\infty} (2\sqrt{1-0}) - (2\sqrt{1-t}) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} 2\sqrt{1-t} - 2 \\ &= \infty \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ ลู่ออกสู่ ∞

4.3.3 ทั้งลิมิตล่างและลิมิตบนเป็นอนันต์ ($a = -\infty, b = \infty$)

โดยอาศัยลิมิตล่างเป็นอนันต์ และลิมิตบนเป็นอนันต์ ในหัวข้อที่ผ่านมา ถ้า f ต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ จะกำหนดว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

สำหรับค่า c ในสมการ จะเลือกใช้ค่าใดก็ได้ เพราะจะไม่ทำให้ค่าของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบเปลี่ยนแปลง ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^d f(x) dx + \int_d^{\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

โดยมีเงื่อนไขว่าลิมิตที่เกี่ยวข้องทั้งหมดต้องหาค่าได้ (ในกรณี $c > d$ ก็แสดงได้ในทำนองเดียวกัน) และถ้า c ที่เลือกมาทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบทางซ้ายของสมการ (9) ลู่ออก ก็จะได้ว่าทุกจำนวนจริง d ที่เลือกมาทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบทางซ้ายของสมการ (10) ลู่ออก ก็จะได้ว่าทุกจำนวนจริง d ที่ใช้แทน c ก็จะทำให้ปริพันธ์ดังกล่าวลู่ออกด้วยซึ่งแสดงได้ดังนี้

เพราะว่า

$$\begin{aligned} \int_c^{\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^t f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [F(x)] \Big|_c^t \quad (F \text{ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ } f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow \infty} [F(t) - F(c)] \\
&= \left[\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) \right] - F(c)
\end{aligned}$$

ดังนั้นถ้า $\int_c^\infty f(x) dx$ ลู่ออกแสดงว่า $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$ หาค่าไม่ได้ และสำหรับจำนวนจริง d ใด ๆ
 จะได้ทำนองเดียวกันว่า $\int_d^\infty f(x) dx = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) \right] - F(d)$ ซึ่งลู่ออกเมื่อ $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$ หาค่าไม่ได้
 เช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง 4.22 จงแสดงว่า $\int_{-\infty}^\infty e^x dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

วิธีทำ $\int_{-\infty}^\infty e^x dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^\infty e^x dx$ (เลือกค่า $c = 0$)

จากตัวอย่าง 4.17 พบว่า $\int_0^\infty e^x dx$ ลู่ออกสู่อนันต์ ไม่ต้องพิจารณา $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^\infty e^x dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 4.23 จงแสดงว่า $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x} dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

วิธีทำ $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x} dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x} dx + \int_0^\infty xe^{-x} dx$ (เลือกค่า $c = 0$)

จากตัวอย่าง 4.18 พบว่า $\int_0^\infty xe^{-x} dx$ ลู่เข้าสู่ 0

ต่อไปพิจารณา $\int_{-\infty}^0 xe^{-x} dx$

การหา $\int xe^x dx$ ใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ที่ละส่วนในหัวข้อที่ผ่านมา

จะได้ $\int xe^x dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

ทำให้ $\int_{-\infty}^0 xe^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 xe^x dx$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} [-xe^{-x} - e^{-x}] \Big|_a^0 \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} [(-0e^{-0} - e^{-0}) - (-ae^{-a} - e^{-a})] \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} [(-1) - (-ae^{-a} - e^{-a})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^{-a}(a+1) - 1] \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-a}(a+1) - \lim_{a \rightarrow -\infty} 1 \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^{-a}(a+1)] - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{เนื่องจาก } \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-a}(a+1) &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{a+1}{e^a} \quad (\text{รูปแบบยังไม่กำหนด } \frac{\infty}{\infty}) \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^a} \quad (\text{โดยกฎของโลปีตาล}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } \int_{-\infty}^0 xe^{-x} dx \text{ ลู่เข้าสู่ } 0$$

$$\text{เนื่องจาก } \int_0^{\infty} xe^{-x} dx \text{ ลู่เข้าสู่ } 0 \text{ และ } \int_{-\infty}^0 xe^{-x} dx \text{ ลู่เข้าสู่ } 0$$

$$\text{ดังนั้น } \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x} dx \text{ ลู่เข้าสู่ } 0$$

Bittinget.M.L Ellenbogen.D.J and Surgent.S.A (2012 : 493-494) ได้สรุปนิยามของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ลิมิตของการหาปริพันธ์เป็นอนันต์ สำหรับ f ต่อเนื่องทุกจุดบนช่วงของการหาปริพันธ์ และทุกลิมิตที่ปรากฏในสมการข้างล่างหาค่าได้จะได้อัตงนี้

1. $\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$
2. $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$

4.4 ตัวถูกปริพันธ์เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง

วีรตัน สุวรรณภาิชาติ (2548 : 292) ได้ให้นิยามในกรณีทีตัวถูกปริพันธ์เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องซึ่งเรียกว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบสำหรับ f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ยกเว้นบางจุด $c \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty \text{ จะกำหนดค่าของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ } \int_a^b f(x) dx \text{ ดังนี้}$$

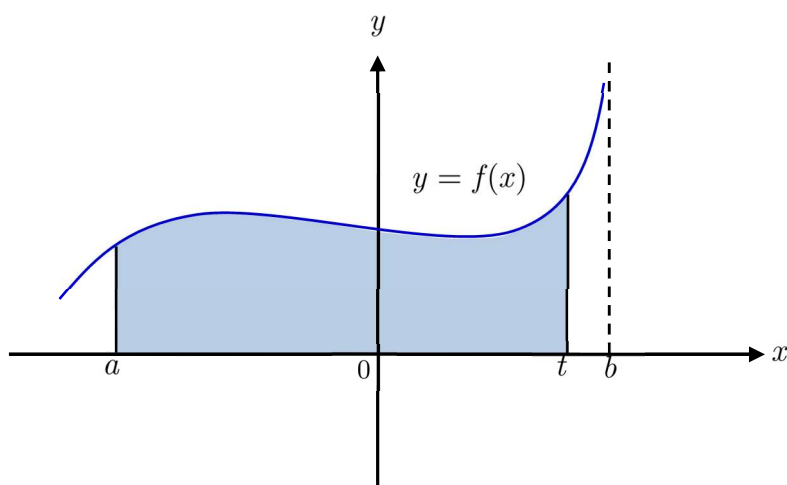
บทนิยาม 4.2

ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b)$ และ $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$ ถ้าลิมิตหาค่าได้ (เท่ากับบางค่า L) จะกล่าวว่า

$\int_a^b f(x) dx$ ลู่เข้า (สู่ L) ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้จะกล่าวว่า $\int_a^b f(x) dx$ ลู่ออก

เพื่อให้เข้าใจบทนิยามให้มากขึ้น พิจารณาภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 4.1 แสดง $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$

ตัวอย่าง 4.24 จงหาค่าของ $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ต่อเนื่องบน $[-1, 0)$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$

$$\text{จะได้ } \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{t} - 1 \right]$$

$$= \infty$$

ดังนั้น $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 4.25 จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$ ต่อเนื่องบน $[0, 1)$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} = \infty$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int_0^1 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{(x^2 - 1)} \right]_0^t \\ &= -\lim_{t \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{(x^2 - 1)} + 1 \right] \\ &= \infty \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 4.26 จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ต่อเนื่องบน $[0, 1)$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

$$\begin{aligned} \text{และ } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} &= \infty \text{ ดังนั้น} \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} [\arcsin x]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} [\arcsin t - \arcsin 0] \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ ลู่ออกสู่ $\frac{\pi}{2}$

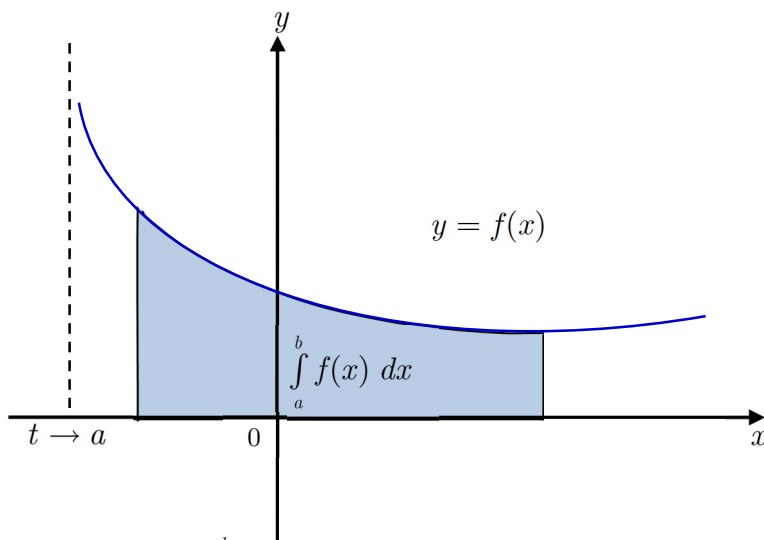
บทนิยาม 4.3

ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $(a, b]$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$ ถ้าลิมิตหาค่าได้ (เท่ากับบางค่า L) จะกล่าวว่า

$\int_a^b f(x) dx$ ลู่เข้า (สู่ L) ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้จะกล่าวว่า $\int_a^b f(x) dx$ ลู่ออก

เพื่อให้เข้าใจบทนิยามให้มากขึ้น พิจารณาภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 4.2 แสดง $\int_a^b f(x) dx$

ตัวอย่าง 4.27 จงหาค่าของ $\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ต่อเนื่องบน $(0, 2]$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

$$\text{จะได้ } \int_0^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^2 \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_t^2$$

$$= -\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{t} \right]$$

$$= \infty$$

ดังนั้น $\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 4.28 จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ ต่อเนื่องบน $(1, 2]$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

$$\begin{aligned} \text{และ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} &= \infty \\ \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} [\operatorname{arc sec} x]_t^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} [\operatorname{arc sec} 2 - \operatorname{arc sec} t] \\ &= \frac{\pi}{3} - 0 \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ ลู่เข้าสู่ $\frac{\pi}{3}$

อำพล ธรรมเจริญ (2546 : 147) ได้แสดงกรณีที่ f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ยกเว้นที่จุด $c \in (a, b)$ ซึ่งลิมิตทางซ้ายหรือทางขวาของ f ที่ $x = c$ มีค่าอนันต์ ไว้ดังต่อไปนี้

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

โดยที่ปริพันธ์ไม่ตรงแบบทั้งสองทางต้องลู่เข้า ถ้าปริพันธ์ใดปริพันธ์หนึ่งลู่ออกจะได้ว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบนั้นลู่ออก

ตัวอย่าง 4.29 จงหาค่าของ $\int_1^{10} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = \frac{1}{(x-2)^{2/3}}$ ต่อเนื่องทุกจุดยกเว้น $x = 2$ และ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} = \infty$

$$\text{จะได้ } \int_1^{10} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx + \int_2^{10} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx$$

$$\text{พิจารณา } \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_1^t \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 2^-} 3(x-2)^{1/3} \Big|_1^t \\
&= 3 \lim_{t \rightarrow 2^-} \left((t-2)^{1/3} - (-1) \right) \\
&= 3(0+1) \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{พิจารณา } \int_2^{10} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx &= \lim_{s \rightarrow 2^+} \int_s^{10} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx \\
&= \lim_{s \rightarrow 2^+} 3(x-2)^{1/3} \Big|_s^{10} \\
&= 3 \lim_{s \rightarrow 2^+} \left[(10-2)^{1/3} - (s-2)^{1/3} \right] \\
&= 3(2+0) \\
&= 6
\end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก } \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx = 3 \text{ และ } \int_2^{10} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx = 6$$

$$\text{ดังนั้น } \int_1^{10} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx = 9$$

ตัวอย่าง 4.30 จงหาค่าของ $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$

วิธีทำ เพราะว่า $\frac{1}{x^2}$ ต่อเนื่องทุกจุดยกเว้น $x = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

$$\text{ดังนั้น } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$\text{เพราะว่า } \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^t \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{t} - 1 \right] \\
&= \infty
\end{aligned}$$

$$\text{ไม่ต้องตรวจสอบ } \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$\text{ดังนั้น } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \text{ ลู่ออก}$$

4.5 สรุปท้ายบท

การหาปริพันธ์ที่ละส่วนเป็นเทคนิคที่จะช่วยให้สามารถคำนวณค่าของปริพันธ์ได้หลายลักษณะที่ไม่เหมาะสมกับการใช้เทคนิคอื่น ๆ แล้วโดยใช้สูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ หลักสำคัญของการหาปริพันธ์ที่ละส่วน คือ ต้องแยกตัวที่จะหาปริพันธ์ออกเป็น 2 ส่วน ส่วนหนึ่ง เป็น u และอีกส่วนหนึ่งเป็น dv บางครั้งฟังก์ชันที่เราจะหาปริพันธ์นั้นมีแค่ฟังก์ชันเดียวดังนั้นเราเลยกำหนดให้ $dx = dv$ และ u คือฟังก์ชันที่เหลือ การหาปริพันธ์ที่ละส่วนเพียงแค่ครั้งเดียวบางครั้งเราไม่สามารถแก้ปัญหาตามที่เราต้องการดังนั้นการที่เราจะหาปริพันธ์นั้นบางครั้งเราต้องหาปริพันธ์ที่ละส่วนมากกว่า 1 ครั้งสำหรับการหาปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำ ๆ หลาย ๆ ครั้งอาจทำให้ยุ่งยากดังนั้นจึงเปลี่ยนมาใชการจัดตารางได้ สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x) \, dx$ กรณี a หรือ b อย่างน้อยหนึ่งค่ามีค่าเป็นอนันต์สามารถใช้วิธีการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1. \int_a^\infty f(x) \, dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx \\ 2. \int_{-\infty}^b f(x) \, dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx \\ 3. \int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx &= \int_{-\infty}^c f(x) \, dx + \int_c^\infty f(x) \, dx \end{aligned}$$

และสำหรับกรณีตัวถูกปริพันธ์ $f(x)$ มีจุดที่ไม่ต่อเนื่องอย่างน้อย 1 จุดบนช่วง $[a, b]$ การหานี้แน่นอน ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b)$ และ $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) \, dx$$

และถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $(a, b]$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \infty$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) \, dx$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad \int x e^{-x} dx$$

$$1.2 \quad \int x^2 e^{-3x} dx$$

$$1.3 \quad \int x \sin 6x dx$$

$$1.4 \quad \int x^2 e^x dx$$

$$1.5 \quad \int x^2 \cos x dx$$

$$1.6 \quad \int \sqrt{x} \ln x dx$$

$$1.7 \quad \int e^x \sin x dx$$

$$1.8 \quad \int \ln(2x + 3) dx$$

$$1.9 \quad \int x \sec^2 x dx$$

$$1.10 \quad \int \sin \ln(x) dx$$

2. จงแสดงว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบในข้อใดต่อไปนี้ลู่เข้า หรือ ลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

$$2.1 \quad \int_3^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$2.2 \quad \int_5^{\infty} \frac{1}{x^{3/4}} dx$$

$$2.3 \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{3x+2} dx$$

$$2.4 \quad \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^{1/4}} dx$$

$$2.5 \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$2.6 \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x(x-1)} dx$$

$$2.7 \quad \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 dx$$

$$2.8 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+2x^2} dx$$

3. จงแสดงว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบในข้อใดต่อไปนี้ลู่เข้า หรือ ลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

$$3.1 \quad \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} dx$$

$$3.2 \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$3.3 \quad \int_0^3 \frac{1}{x^2} dx$$

$$3.4 \quad \int_{-1}^1 \frac{2}{(x+1)^2} dx$$

$$3.5 \quad \int_0^3 \frac{1}{x-2} dx$$

$$3.6 \quad \int_{-2}^1 \frac{2}{(x+2)^3} dx$$

$$3.7 \quad \int_1^3 \frac{x}{x(x-2)} dx$$

$$3.8 \quad \int_{-5}^0 \frac{x+1}{x^2+2x-3} dx$$

เอกสารอ้างอิง

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร. (2558). **คณิตศาสตร์**

เบื้องต้น. พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยนเรศวร.

มงคล ทองสงคราม. (2546). **แคลคูลัส 2**. กรุงเทพมหานคร : รามการพิมพ์จำกัด.

วิรัตน์ สุวรรณภาชี. (2548). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. (2554).

แคลคูลัส 2 มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ. (2558). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : พิมพ์ดีการพิมพ์.

สุวรรณ ถังมณี และบุษราพร เหลืองมาลาวัฒน์. (2554). **แคลคูลัสเบื้องต้นสำหรับผู้เริ่มเรียน**

กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อำพล ธรรมเจริญ. (2546). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ตอนที่ 3**. กรุงเทพมหานคร :

พิทักษ์การพิมพ์.

Gilbert. S. (2018). **Calculus**. Massachusetts : MIT Department of Mathematics.

Guichard. D. (2019). **Single Variable Calculus**. Washington : Whitman College.

Sengupta. A.N. (2011). **Introductory Calculus Notes**. Los Angeles : Louisiana State University.

Stewart. J. (2016). **Calculus**. Boston : Cengage Learning.

