

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3

การหาปริพันธ์ด้วยวิธีแยกเศษส่วนย่อย

เนื้อหาประจำบท

1. การแยกเศษส่วนย่อย
2. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้
3. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจภาพรวมของการแยกเศษส่วนย่อย
2. สามารถบอกได้ว่าระดับชั้นของพหุนาม $P(x)$ และ $Q(x)$ ได้
3. แยกตัวประกอบ $Q(x)$ ได้
4. หาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ได้
5. สามารถจัดรูป $\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$ ในกรณี $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ได้
6. หาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 วิธีแยกเศษส่วนย่อย
 - 1.2 ระดับชั้นของพหุนาม $P(x)$ และ $Q(x)$
 - 1.3 การแยกตัวประกอบ $Q(x)$
 - 1.4 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้
 - 1.5 การจัดรูป $\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$ กรณีที่ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้
 - 1.6 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้

2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

- 2.1. ศึกษาข้อมูลจาก เกี่ยวกับเทคนิคปริพันธ์โดยการแยกเศษส่วนย่อยเพิ่มเติม
- 2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation
3. ใบงาน

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. การตอบคำถาม
3. ทดสอบท้ายชั่วโมง
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 3

การหาปริพันธ์ด้วยวิธีแยกเศษส่วนย่อย

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ มีความสำคัญมาก ดังจะเห็นได้ว่านักคณิตศาสตร์พยายามที่จะ สร้างสูตรสำเร็จในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันให้ได้มากที่สุดเท่าที่จะมากได้ แต่ก็ยังมีฟังก์ชันหลายฟังก์ชันหลายรูปแบบที่เราไม่สามารถหาปริพันธ์ได้โดยใช้เพียงสูตรพื้นฐานจึงจำเป็นต้องใช้เทคนิคบางประการของการหาปริพันธ์เข้าช่วยจึงจะหาผลลัพธ์ได้สำเร็จ วัตถุประสงค์ของการศึกษาในบทนี้จึงเน้นในแง่การเพิ่มเติมและพัฒนาเทคนิคของการหาปริพันธ์ให้เป็นระบบ เพื่อที่จะสามารถเลือกใช้ระเบียบวิธีที่เหมาะสมกับรูปแบบของตัวปริพันธ์ ซึ่งจัดเป็นรูปแบบต่าง ๆ ได้ และในบางปัญหาการหาปริพันธ์ทั้งการหาปริพันธ์จำกัดเขตและไม่จำกัดเขต อาจต้องใช้เทคนิคของการหาปริพันธ์มากกว่าหนึ่งเทคนิคผสมผสานกัน สำหรับเนื้อหาในบทนี้เป็นการใช้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยการแยกเศษส่วนย่อยรูปแบบต่าง ๆ

3.1 การแยกเศษส่วนย่อย

เพื่อให้เข้าใจวัตถุประสงค์ของการหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อยโดยรวดเร็ว จะแสดงตัวอย่างวิธีบวกเศษส่วนย่อย 2 จำนวนดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{4}{5x+1} + \frac{3}{x-2} &= \frac{4(x-2) + 3(5x+1)}{(5x+1)(x-2)} \\ &= \frac{4x-8+15x+3}{(5x+1)(x-2)} \\ &= \frac{19x-5}{(5x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

และถ้าเราต้องแก้ปัญหา $\int \frac{19x-5}{(5x+1)(x-2)} dx$

และเนื่องจาก

$$\frac{19x-5}{(5x+1)(x-2)} = \frac{4}{5x+1} + \frac{3}{x-2}$$

จะได้ว่า

$$\int \frac{19x-5}{(5x+1)(x-2)} dx = \int \frac{4}{5x+1} + \frac{3}{x-2} dx = \int \frac{4}{5x+1} dx + \int \frac{3}{x-2} dx$$

แต่ถ้าเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะอื่น ๆ ซึ่งเราไม่ทราบมาก่อนว่าเกิดจากการบวกกันของเศษส่วนใดบ้าง เราต้องการวิธีการคิดย้อนกลับเพื่อหาเศษส่วนย่อยต่าง ๆ เหล่านั้น วิธีการหาเศษส่วนย่อยเหล่านั้นเรียกว่า วิธีการแยกเศษส่วนย่อย นั่นเองและในหัวข้อนี้เป็นการนำเทคนิคการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ เมื่อ } P(x) \text{ และ } Q(x) \neq 0 \text{ เป็นฟังก์ชันพหุนาม}$$

วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ (2558 : 252) และ Heinbockel. J.H. (2012 : 195) ได้แสดงบทนิยามของฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งเป็นพื้นฐานและมีความสำคัญในการหาปริพันธ์ด้วยวิธีการแยกเศษส่วนย่อยแยกเศษส่วนย่อยดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1

กำหนดให้ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ $\deg P(x)$ แทนระดับชั้นของพหุนาม

$P(x)$ และ $\deg Q(x)$ แทนระดับชั้นของพหุนาม $Q(x)$

เรียก $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ว่าฟังก์ชันตรรกยะแท้ ถ้า $\deg P(x) < \deg Q(x)$

เรียก $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ว่าฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ ถ้า $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$

ตัวอย่าง 3.1

$$\frac{x+3}{x^3+2x^2-x-2}$$

เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

$$\frac{x^3+3x+8}{2x^5-2}$$

เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

$$\frac{x^2+3x+8}{(2x-2)(x+1)(x-5)}$$

เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

$$\frac{x^5+3x+8}{2x^5-2}$$

เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้

$$\frac{x^2+x+5}{2x-3}$$

เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้

$$\frac{2x^2+7x+5}{2x^{11}-3}$$

เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

Gilbert. S. (2018 : 300-301) และ อีระศักดิ์ อัจฉนนท์ (2555 : 408) ได้แสดงการหา
 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ ถ้า $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ นั่นหมายความว่าสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ
 ดังต่อไปนี้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

ซึ่ง $F(x)$ เป็นพหุนาม และระดับชั้นของ $\deg S(x) < \deg Q(x)$

3.2 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

ธัญยศ จำปาหวาย (2564 : 216-225) Edwin.J.H. and Gilbert.S (2016 : 303 - 304)
 และ Guichard. D. (2019 : 178-182) ได้แสดงการแยกเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันตรรกยะแท้เป็นได้
 เป็น 4 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ตัวประกอบแต่ละตัวของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็นหนึ่งและไม่มีตัวประกอบซ้ำกันเลย

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n)}$$

สามารถทำฟังก์ชันตรรกยะนี้ให้เป็นเศษส่วนย่อยได้โดยสมมติให้

$$\frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

จะเห็นว่า $Q(x)$ มีตัวประกอบเชิงเส้นที่ไม่ซ้ำกัน n ตัว แต่ละตัวประกอบด้วย $x - a_i$ เกิดเศษส่วน

ย่อย 1 ตัว ในรูปของ $\frac{A_i}{x - a_i}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ และจะต้องหาค่าคงตัว A_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$

ต่อไป

ตัวอย่าง 3.2 การแยกเศษส่วนย่อยกรณีตัวประกอบแต่ละตัวของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็นหนึ่งและไม่มี
 มีตัวประกอบซ้ำกันเลย

$$\frac{x}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

$$\frac{5x}{(2x - 1)(x + 1)(4x - 11)} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{4x - 11}$$

$$\frac{5x}{(2x)(x + 5)(x - 1)} = \frac{A}{2x} + \frac{B}{x + 5} + \frac{C}{x - 1}$$

เมื่อเราสามารถแยกตัวเศษส่วนย่อยกรณีตัวประกอบแต่ละตัวของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็นหนึ่งและไม่มีตัวประกอบซ้ำกันเลยสำหรับตัวอย่างต่อไปเป็นตัวอย่างการหาปริพันธ์ในกรณีดังกล่าวโดยธีระศักดิ์ อรุณานนท์ (2564 : 408-410) และสุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ (2558 : 364-265) ได้แสดงไว้ดังนี้

ตัวอย่าง 3.3 จงหาค่า $\int \frac{x+3}{x^3+2x^2-x-2} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{x+3}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

สมมติให้

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+2)} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A, B และ C ดังนี้

$$\begin{aligned} x+3 &= \left[\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+2)} \right] [(x-1)(x+1)(x+2)] \\ &= \frac{A}{(x-1)} [(x-1)(x+1)(x+2)] + \frac{B}{(x+1)} [(x-1)(x+1)(x+2)] \\ &\quad + \frac{C}{(x+2)} [(x-1)(x+1)(x+2)] \end{aligned}$$

จะได้

$$x+3 = A[(x+1)(x+2)] + B[(x-1)(x+2)] + C[(x-1)(x+1)] \quad \dots(2)$$

แทนค่า x ที่เหมาะสมในสมการที่ (2) ดังนี้

ให้ $x = -1$ จะได้

$$\begin{aligned} (-1)+3 &= B[(-1-1)(-1+2)] \\ 2 &= -2B \\ B &= -1 \end{aligned}$$

ให้ $x = -2$ จะได้

$$\begin{aligned} -2+3 &= C[(-2-1)(-2+1)] \\ 1 &= 3C \\ C &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ให้ $x = 1$ จะได้

$$1 + 3 = A[(1+1)(1+2)]$$

$$4 = 6A$$

$$A = \frac{2}{3}$$

แทนค่า $A = \frac{2}{3}, B = -1$ และ $C = \frac{1}{3}$ ในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^3+2x^2-x-2} dx &= \int \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{3(x+2)} dx \\ &= \int \frac{2}{3(x-1)} dx - \int \frac{1}{(x+1)} dx + \int \frac{1}{3(x+2)} dx \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{2}{3} \ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x+2| + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{x+3}{x^3+2x^2-x-2} dx = \frac{2}{3} \ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x+2| + c$

ตัวอย่าง 3.4 จงหาค่า $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{x^2+2x+3}{x^3-x} = \frac{x^2+2x+3}{x(x-1)(x+1)}$

สมมติให้

$$\frac{x^2+2x+3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A, B และ C ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2+2x+3 &= \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \right] [x(x-1)(x+1)] \\ &= \frac{A}{x} [x(x-1)(x+1)] + \frac{B}{x-1} [x(x-1)(x+1)] \\ &\quad + \frac{C}{x+1} [x(x-1)(x+1)] \end{aligned}$$

จะได้

$$x^2 + 2x + 3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \quad \dots(2)$$

แทนค่า x ที่เหมาะสมในสมการที่ (2) ดังนี้

ให้ $x = 1$ จะได้

$$1^2 + 2(1) + 3 = B(1)(1+1)$$

$$6 = B(2)$$

$$B = 3$$

ให้ $x = -1$ จะได้

$$(-1)^2 + 2(-1) + 3 = C(-1)(-1-1)$$

$$2 = C(2)$$

$$C = 1$$

ให้ $x = 0$ จะได้

$$0^2 + 2(0) + 3 = A(0-1)(0+1)$$

$$3 = A(-1)$$

$$A = -3$$

แทนค่า $A = -3, B = 3$ และ $C = 1$ ในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x} = -\frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x} dx &= \int -\frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+1} dx \\ &= -3 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= -3 \ln|x| + 3 \ln|x-1| + \ln|x+1| + c \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x} dx = -3 \ln|x| + 3 \ln|x-1| + \ln|x+1| + c$$

ตัวอย่าง 3.5 จงหาค่า $\int \frac{17x-3}{3x^2-11x-4} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{17x-3}{3x^2-11x-4} = \frac{17x-3}{(3x+1)(x-4)}$

สมมติให้

$$\frac{17x-3}{(3x+1)(x-4)} = \frac{A}{(3x+1)} + \frac{B}{(x-4)} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A และ B ดังนี้

$$\begin{aligned}
 17x - 3 &= \left[\frac{A}{3x+1} + \frac{B}{x-4} \right] (3x+1)(x-4) \\
 &= \frac{A}{3x+1} (3x+1)(x-4) + \frac{B}{x+4} (3x+1)(x-4)
 \end{aligned}$$

จะได้

$$17x - 3 = A(x - 4) + B(3x + 1) \quad \dots(2)$$

แทนค่า x ที่เหมาะสมในสมการที่ (3) ดังนี้

$$\text{ให้ } x = 4$$

$$17(4) - 3 = B[3(4) + 1]$$

$$65 = 13B$$

$$B = 5$$

$$\text{ให้ } x = -\frac{1}{3}$$

$$17\left(-\frac{1}{3}\right) - 3 = A\left(-\frac{1}{3} - 4\right)$$

$$-\frac{26}{3} = -\frac{13}{3}A$$

$$A = 2$$

แทนค่า $A = 2$ และ $B = 5$ ในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{17x - 3}{(3x + 1)(x - 4)} = \frac{2}{3x + 1} + \frac{5}{x - 4}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
 \int \frac{17x - 3}{3x^2 - 11x - 4} dx &= \int \frac{2}{3x + 1} + \frac{5}{x - 4} dx \\
 &= \int \frac{2}{3x + 1} dx + \int \frac{5}{x - 4} dx \\
 &= 2 \int \frac{1}{3x + 1} dx + 5 \int \frac{1}{x - 4} dx \\
 &= \frac{2}{3} \ln|3x + 1| + 5 \ln|x - 4| + c
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \int \frac{17x - 3}{3x^2 - 11x - 4} dx = \frac{2}{3} \ln|3x + 1| + 5 \ln|x - 4| + c$$

กรณีที่ 2 ตัวประกอบแต่ละตัวของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็นหนึ่ง และมีตัวประกอบบางตัวซ้ำกันเช่น

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)^m}$$

สามารถทำฟังก์ชันตรรกยะนี้ให้เป็นเศษส่วนย่อยได้โดยสมมติให้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \frac{B_1}{(x-a_3)^2} + \dots + \frac{B_m}{(x-a_3)^m}$$

จะเห็นว่า $P(x)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ $m+2$ เศษส่วนย่อย

จากตัวประกอบ $(x-a_1)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อย

จากตัวประกอบ $(x-a_2)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อย

จากตัวประกอบ $(x-a_3)^m$ แยกเศษส่วนย่อยได้ m เศษส่วนย่อย

แล้วดำเนินการหา $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, B_m$ ต่อไป

ตัวอย่าง 3.6 การแยกเศษส่วนย่อยกรณีตัวประกอบแต่ละตัวของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็นหนึ่ง และมีตัวประกอบบางตัวซ้ำกัน

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} \\ \frac{5x}{(2x-1)^2(x+1)^3(4x-11)} &= \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \\ &\quad + \frac{E}{(x+1)^3} + \frac{F}{4x-11} \\ \frac{5x}{(2x)(x+5)^2(x-1)} &= \frac{A}{2x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{(x+5)^2} + \frac{D}{x-1} \end{aligned}$$

เมื่อเราสามารถแยกตัวเศษส่วนย่อยกรณีตัวประกอบแต่ละตัวของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็นหนึ่งและมีตัวประกอบบางตัวซ้ำกัน โดย Gilbert. S. (2018 : 301-305) ได้แสดงตัวอย่างไว้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.7 จงหาค่า $\int \frac{x^2 - x + 4}{x^3 + 2x^2 - x} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + 2x^2 - x} = \frac{x^2 - x + 4}{x(x+1)^2}$

สมมติให้

$$\frac{x^2 - x + 4}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A, B และ C ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2 - x + 4 &= \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} \right] x(x+1)^2 \\ &= \frac{A}{x} x(x+1)^2 + \frac{B}{(x+1)} x(x+1)^2 + \frac{C}{(x+1)^2} x(x+1)^2 \end{aligned}$$

จะได้

$$x^2 - x + 4 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \quad \dots(2)$$

แทนค่า x ที่เหมาะสมในสมการที่ (2) ดังนี้

$$\text{ให้ } x = -1$$

$$(-1)^2 - (-1) + 4 = C(-1)$$

$$C = -6$$

$$\text{ให้ } x = 0$$

$$0^2 - 0 + 4 = A$$

$$A = 4$$

$$\text{ให้ } x = 1 \text{ และแทนค่า } A = 4 \text{ และ } C = -6$$

$$1^2 - 1 + 4 = 4(1+1)^2 + B(1)(1+1) - 6(1)$$

$$4 = 16 + 2B - 6$$

$$B = -3$$

แทนค่า $A = 4, B = -3$ และ $C = -6$ ในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{x^2 - x + 4}{x(x+1)^2} = \frac{4}{x} - \frac{3}{(x+1)} - \frac{6}{(x+1)^2}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - x + 4}{x^3 + 2x^2 - x} dx &= \int \frac{4}{x} - \frac{3}{(x+1)} - \frac{6}{(x+1)^2} dx \\ &= \int \frac{4}{x} - \frac{3}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2} dx \\ &= 4 \ln|x| - 3 \ln|x+1| - \int \frac{6}{u^2} du \\ &= 4 \ln|x| - 3 \ln|x+1| - 6 \int u^{-2} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \ln|x| - 3 \ln|x+1| - 6 \left(\frac{u^{-1}}{-1} \right) + c \\
&= 4 \ln|x| - 3 \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{x^2 - x + 4}{x^3 + 2x^2 - x} dx = 4 \ln|x| - 3 \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + c$

ตัวอย่าง 3.8 จงหาค่า $\int \frac{x+5}{x^3 - 3x + 2} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{x+5}{x^3 - 3x + 2} = \frac{x+5}{(x-1)^2(x+2)}$

สมมติให้

$$\frac{x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A, B และ C ดังนี้

$$\begin{aligned}
x+5 &= \left[\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)} \right] (x-1)^2(x+2) \\
&= \frac{A}{(x-1)} (x-1)^2(x+2) + \frac{B}{(x-1)^2} (x-1)^2(x+2) \\
&\quad + \frac{C}{(x+2)} (x-1)^2(x+2)
\end{aligned}$$

จะได้

$$x+5 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2 \quad \dots(2)$$

แทนค่า x ที่เหมาะสมในสมการที่ (2) ดังนี้

ให้ $x = 1$

$$1+5 = B(1+2)$$

$$6 = 3B$$

$$B = 2$$

ให้ $x = -2$

$$(-2)+5 = C[(-2)-1]^2$$

$$3 = C(9)$$

$$C = \frac{1}{3}$$

$$\text{ให้ } x = 0, B = 2 \text{ และ } C = \frac{1}{3}$$

$$0 + 5 = A(0 - 1)(0 + 2) + 2(0 + 2) + \frac{1}{3}(0 - 1)^2$$

$$5 = -2A + 4 + \frac{1}{3}$$

$$A = -\frac{1}{3}$$

แทนค่า $A = -\frac{1}{3}, B = 2$ และ $C = \frac{1}{3}$ ในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{x + 5}{x^3 - 3x + 2} = -\frac{1}{3(x - 1)} + \frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{1}{3(x + 2)}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 5}{x^3 - 3x + 2} dx &= \int -\frac{1}{3(x - 1)} + \frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{1}{3(x + 2)} dx \\ &= \int -\frac{1}{3(x - 1)} dx + \int \frac{2}{(x - 1)^2} dx + \int \frac{1}{3(x + 2)} dx \\ &= -\frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{3} \ln|x + 2| + c \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \int \frac{x + 5}{x^3 - 3x + 2} dx = -\frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{3} \ln|x + 2| + c$$

กรณีที่ 3 กรณีตัวประกอบของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเท่ากับสอง เช่นมี $(ax^2 + bx + c)$ และไม่มีตัวประกอบซ้ำกันเลยดังนี้

$$\frac{P(x)}{x - a_1(x - a_2)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \frac{Bx + D}{ax^2 + bx + c}$$

จะเห็นว่า $P(x)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ 3 เศษส่วนย่อย

$$\text{จากตัวประกอบ } (x - a_1) \text{ แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อยคือ } \frac{A_1}{x - a_1}$$

$$\text{จากตัวประกอบ } (x - a_2) \text{ แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อยคือ } \frac{A_2}{x - a_2}$$

$$\text{จากตัวประกอบ } (ax^2 + bx + c) \text{ แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อยคือ } \frac{Bx + D}{ax^2 + bx + c}$$

แล้วดำเนินการหา A_1, A_2, B, D

ตัวอย่าง 3.9 การแยกเศษส่วนย่อยกรณีตัวประกอบของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเท่ากับสอง และไม่มีตัวประกอบซ้ำกัน

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ \frac{5x}{(2x^2+x-1)(4x-11)} &= \frac{Ax+B}{2x^2+x-1} + \frac{C}{4x-11} \\ \frac{5x}{(3x^2+5)(x^2+3)} &= \frac{Ax+B}{3x^2+5} + \frac{Cx+D}{x^2+3}\end{aligned}$$

เมื่อเราสามารถแยกตัวเศษส่วนย่อยกรณีตัวประกอบของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเท่ากับสอง และไม่มีตัวประกอบซ้ำกันสำหรับตัวอย่างต่อไปเป็นตัวอย่างการหาปริพันธ์ในกรณีดังกล่าว วิชัย วิทยา เกียรติเลิศ (2558 259-261) และ ชีระศักดิ์ อูร์จนานนท์. (2555 : 418 - 420) ได้แสดงตัวอย่างไว้ดังนี้

ตัวอย่าง 3.10 จงหาค่า $\int \frac{2x^2+3x+9}{x^3-27} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{2x^2+3x+9}{x^3-27} = \frac{2x^2+3x+9}{(x^2+3x+9)(x-3)}$
สมมติให้

$$\frac{2x^2+3x+9}{(x^2+3x+9)(x-3)} = \frac{Ax+B}{x^2+3x+9} + \frac{C}{x-3} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A, B และ C ดังนี้

$$\begin{aligned}2x^2+3x+9 &= \left[\frac{Ax+B}{x^2+3x+9} + \frac{C}{x-3} \right] (x^2+3x+9)(x-3) \\ &= \frac{Ax+B}{x^2+3x+9} (x^2+3x+9)(x-3) \\ &\quad + \frac{C}{x-3} (x^2+3x+9)(x-3) \\ &= (Ax+B)(x-3) + C(x^2+3x+9) \\ &= Ax^2 - 3Ax + Bx - 3B + Cx^2 + 3Cx + 9C \\ &= Ax^2 + Cx^2 - 3Ax + Bx + 3Cx - 3B + 9C\end{aligned}$$

จะได้

$$2x^2+3x+9 = (A+C)x^2 + (-3A+B+3C)x + (-3B+9C) \quad \dots(2)$$

จากสมการที่ (2) ใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

$$A + C = 2$$

$$-3A + B + 3C = 3$$

$$-3B + 9C = 9$$

แก้สมการหาค่า A, B และ C ได้ $A = \frac{2}{3}, B = 1$ และ $C = \frac{4}{3}$

แทนค่า A, B และ C ในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{2x^2 + 3x + 9}{x^3 - 27} = \frac{\frac{2}{3}x + 1}{x^2 + 3x + 9} + \frac{\frac{4}{3}}{x - 3}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 3x + 9}{x^3 - 27} dx &= \int \frac{\frac{2}{3}x + 1}{x^2 + 3x + 9} + \frac{\frac{4}{3}}{x - 3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 9} dx + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{2x + 3}{u} dx + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{2x + 3}{u} \frac{(2x + 3)dx}{(2x + 3)} + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{2x + 3}{u} \frac{du}{(2x + 3)} + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|u| + \frac{4}{3} \ln|x - 3| + c \\ &= \frac{1}{3} \ln|x^2 + 3x + 9| + \frac{4}{3} \ln|x - 3| + c \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \int \frac{2x^2 + 3x + 9}{x^3 - 27} dx = \frac{1}{3} \ln|x^2 + 3x + 9| + \frac{4}{3} \ln|x - 3| + c$$

ตัวอย่าง 3.11 จงหาค่า $\int \frac{1}{x^5 - x^2} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{1}{x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)}$

สมมติให้

$$\frac{1}{x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A, B, C, D และ E ดังต่อไปนี้

$$1 = \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} \right] x^2(x-1)(x^2+x+1)$$

$$1 = Ax(x-1)(x^2+x+1) + B(x-1)(x^2+x+1)$$

$$+ Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1)$$

$$1 = A(x^4-x) + B(x^3-1) + C(x^4+x^3+x^2)$$

$$+ (Dx+E)(x^3-x^2)$$

$$1 = Ax^4 - Ax + Bx^3 - B + Cx^4 + Cx^3 + Cx^2$$

$$+ Dx^4 - Dx^3 + Ex^3 - Ex^2$$

$$1 = Ax^4 + Dx^4 + Cx^4 + Bx^3 + Cx^3 - Dx^3 + Ex^3$$

$$+ Cx^2 - Ex^2 - Ax - B$$

จะได้

$$1 = (A+C+D)x^4 + (B+C+E-D)x^3 + (C-E)x^2 - Ax - B \quad \dots(2)$$

จากสมการที่ (2) ใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

$$A + C + D = 0$$

$$B + C + E - D = 0$$

$$C - E = 0$$

$$-A = 0$$

$$-B = 1$$

และจากการแก้สมการได้แก้สมการหาค่า A, B, C, D และ E

$$\text{ได้ } A = 0, B = -1, C = \frac{1}{3}, D = -\frac{1}{3} \text{ และ } E = \frac{1}{3}$$

แทนค่าในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{0}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2+x+1}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^5 - x^2} dx &= \int \frac{0}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 + x + 1} dx \\
&= -\int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2 + x + 1} dx \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{1}{x^5 - x^2} dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$

กรณีที่ 4 กรณีตัวประกอบของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเท่ากับสอง และมีตัวประกอบบางตัวซ้ำกัน
ตัวอย่างเช่น $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^m(x - a_1)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^m(x - a_1)}$$

$$\frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^m(x - a_1)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m} + \frac{D}{x - a_1}$$

จะเห็นว่า $P(x)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ $m+1$ เศษส่วนย่อย จากตัวประกอบ
 $(ax^2 + bx + c)^m$ แยกเศษส่วนย่อยได้ m เศษส่วนย่อยคือ

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

และจากตัวประกอบ $(x - a_1)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อยคือ $\frac{D}{x - a_1}$ แล้วดำเนินการหา

$A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m, D$ ต่อไป

ตัวอย่าง 3.12 การแยกเศษส่วนย่อยกรณีตัวประกอบของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเท่ากับสอง และมีตัวประกอบบางตัวซ้ำกัน

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^3}$$

$$\begin{aligned}\frac{5x}{(2x^2 + x - 1)^2(4x^2 - 11)} &= \frac{Ax + B}{2x^2 + x - 1} + \frac{Cx + D}{(2x^2 + x - 1)^2} + \frac{Ex + F}{4x^2 - 11} \\ \frac{5x}{(3x^2 + 5)^2(x^2 + 3)^3} &= \frac{Ax + B}{3x^2 + 5} + \frac{Cx + D}{(3x^2 + 5)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 3} \\ &\quad + \frac{Gx + H}{(x^2 + 3)^2} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 3)^3}\end{aligned}$$

เมื่อเราสามารถแยกตัวเศษส่วนย่อยกรณีตัวประกอบของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเท่ากับสอง และมีตัวประกอบบางตัวซ้ำกันสำหรับตัวอย่างต่อไปเป็นตัวอย่างการหาปริพันธ์ในกรณีดังกล่าวนี้ อีระศักดิ์ อัจฉนนท์ (2562 : 421-423) และ ไมตรี ปาชาเดชสุวัฒน์ และไพโรจน์ ตีรณนากุล (2542 : 49-50) ได้แสดงไว้ดังนี้

ตัวอย่าง 3.13 จงหาค่า $\int \frac{2x+1}{x(x^2+4)^2} dx$

วิธีทำ สมมติให้

$$\frac{2x+1}{x(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A, B, C, D และ E ดังนี้

$$\begin{aligned}2x+1 &= \left[\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2} \right] x(x^2+4)^2 \\ &= \frac{A}{x} x(x^2+4)^2 + \left(\frac{Bx+C}{x^2+4} \right) x(x^2+4)^2 + \left(\frac{Dx+E}{(x^2+4)^2} \right) x(x^2+4)^2 \\ &= A(x^2+4)^2 + (Bx+C)x(x^2+4) + (Dx+E)x \\ &= A(x^4+8x^2+16) + (Bx+C)(x^3+4x) + Dx^2 + Ex \\ &= Ax^4 + 8Ax^2 + 16A + Bx^4 + 4Bx^2 + Cx^3 + 4Cx + Dx^2 + Ex \\ &= Ax^4 + Bx^4 + Cx^3 + 8Ax^2 + 4Bx^2 + Dx^2 + 4Cx + Ex + 16A\end{aligned}$$

จะได้

$$2x+1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (8A+4B+D)x^2 + (4C+E)x + 16A \quad \dots(2)$$

จากสมการที่ (2) ใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
A + B &= 0 \\
C &= 0 \\
8A + 4B + D &= 0 \\
4C + E &= 2 \\
16A &= 1
\end{aligned}$$

แก้สมการหาค่า A, B, C, D และ E

ได้ $A = \frac{1}{16}$, $B = -\frac{1}{16}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{4}$ และ $E = 2$

แทนค่าในสมการที่ (1) จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x(x^2+4)^2} &= \frac{1}{16x} + \frac{\left(-\frac{1}{16}\right)x}{x^2+4} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)x+2}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{1}{16x} - \frac{1}{32} \left(\frac{2x}{x^2+4} \right) + \frac{\left(-\frac{1}{4}x+2\right)}{(x^2+4)^2}
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x(x^2+4)^2} dx &= \int \frac{1}{16x} - \frac{1}{32} \left(\frac{2x}{x^2+4} \right) + \frac{\left(-\frac{1}{4}x+2\right)}{(x^2+4)^2} dx \\
&= \int \frac{1}{16x} dx - \int \frac{1}{32} \left(\frac{2x}{x^2+4} \right) dx + \int \frac{\left(-\frac{1}{4}x+2\right)}{(x^2+4)^2} dx \\
&= \frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{32} \ln|x^2+4| \\
&\quad + \frac{1}{8(x^2+4)} + \frac{x}{4(x^2+4)} + \frac{1}{8} \tan^{-1} \frac{x}{2} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{2x+1}{x(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{32} \ln|x^2+4| + \frac{1}{8(x^2+4)} + \frac{x}{4(x^2+4)}$
 $+ \frac{1}{8} \tan^{-1} \frac{x}{2} + c$

ตัวอย่าง 3.14 จงหาค่า $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$

วิธีทำ สมมติให้

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A, B, C และ D ดังนี้

$$\begin{aligned} x^3 - 2x &= \left[\frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} \right] (x^2 + 1)^2 \\ &= \frac{Ax + B}{x^2 + 1} (x^2 + 1)^2 + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} (x^2 + 1)^2 \\ &= (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D \\ &= Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + B + D \end{aligned}$$

จะได้

$$x^3 - 2x = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + B + D \quad \dots(2)$$

จากสมการที่ (2) ใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$A + C = -2$$

$$B + D = 0$$

แก้สมการหาค่า A, B, C และ D

ได้ $A = 1, B = 0, C = -3$ และ $D = 0$

แทนค่าในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{3x}{(x^2 + 1)^2}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{3x}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - 3 \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{3}{2(x^2 + 1)} + c$$

$$\text{ดังนั้น } \int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{3}{2(x^2 + 1)} + c$$

3.3 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้

การหาปริพันธ์โดยเทคนิคแยกเศษส่วนย่อย $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ในหัวข้อที่ผ่านมาจะเป็นการแยกเศษส่วนย่อยในกรณี $\deg P(x) < \deg Q(x)$ และในหัวข้อนี้จะเป็นการแยกเศษส่วนย่อยในกรณีที่ $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังที่ Guichard. D. (2019 : 181) และ วิตน์ สุวรรณภาชี (2548 : 218) ได้แสดงไว้ดังนี้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

เมื่อ $F(x)$ เป็นผลลัพธ์จากการหาร และ $S(x)$ คือเศษที่เหลือซึ่งมีระดับชั้นน้อยกว่าระดับชั้นของ

$Q(x)$ จะเรียก $\frac{S(x)}{Q(x)}$ ว่าฟังก์ชันตรรกยะแท้ แล้วนำ $\frac{S(x)}{Q(x)}$ มาแยกเศษส่วนย่อยตามกรณีที่ได้อีกแล้วมาแล้วทั้ง 4 กรณี แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.13 จงหาค่า $\int \frac{2x^2 + 10x - 7}{x^2 + 3x - 10} dx$

วิธีทำ เนื่องจากปริพันธ์มีระดับชั้นของเศษเท่ากับส่วน จัดให้อยู่ในรูปทั่วไปโดยการตั้งหารดังนี้

$$\begin{array}{r} 2 \\ x^2 + 3x - 10 \overline{) 2x^2 + 10x - 7} \\ \underline{2x^2 + 6x - 20} \\ 4x + 13 \end{array}$$

แสดงว่า

$$\frac{2x^2 + 10x - 7}{x^2 + 3x - 10} = 2 + \frac{4x + 13}{x^2 + 3x - 10}$$

นำ $\frac{4x + 13}{x^2 + 3x - 10}$ ไปแยกเศษส่วนย่อยดังต่อไปนี้

$$\text{เนื่องจาก } \frac{4x + 13}{x^2 + 3x - 10} = \frac{4x + 13}{(x - 2)(x + 5)}$$

สมมติให้

$$\frac{4x+13}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A และ B ดังนี้

$$\begin{aligned} 4x+13 &= \left[\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} \right] (x-2)(x+5) \\ &= \frac{A}{x-2} (x-2)(x+5) + \frac{B}{x+5} (x-2)(x+5) \\ &= A(x+5) + B(x-2) \end{aligned}$$

จะได้

$$4x+13 = A(x+5) + B(x-2) \quad \dots(2)$$

จากสมการที่ (2) ใช้วิธีแทนค่า x ที่เหมาะสมดังนี้

แทนค่า $x = -5$ ในสมการ (2) จะได้

$$4(-5) + 13 = B(-5-2)$$

$$-7 = -7B$$

$$B = 1$$

แทนค่า $x = 2$ ในสมการ (10) จะได้

$$4(2) + 13 = A(2+5)$$

$$21 = 7A$$

$$A = 3$$

แทนค่า $A = 3$ และ $B = 1$ ในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{4x+13}{(x-2)(x+5)} = \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+5}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+10x-7}{x^2+3x-10} dx &= \int 2 + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+5} dx \\ &= \int 2 dx + \int \frac{3}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+5} dx \\ &= 2x + 3 \ln|x-2| + \ln|x+5| \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{2x^2+10x-7}{x^2+3x-10} dx = 2x + 3 \ln|x-2| + \ln|x+5| + c$

ตัวอย่าง 3.14 จงหาค่า $\int \frac{6x^3 + 11x^2 - 2x + 1}{6x^2 + 11x - 10} dx$

วิธีทำ เนื่องจากปริพันธ์มีระดับชั้นของเศษเท่ากับส่วน จัดให้อยู่ในรูปทั่วไปโดยการตั้งหารดังนี้

$$\begin{array}{r} x \\ 6x^2 + 11x - 10 \overline{) 6x^3 + 11x^2 - 2x + 1} \\ \underline{6x^3 + 11x^2 - 10x} \\ 8x + 1 \end{array}$$

แสดงว่า

$$\frac{6x^3 + 11x^2 - 2x + 1}{6x^2 + 11x - 10} = x + \frac{8x + 1}{6x^2 + 11x - 10}$$

นำ $\frac{8x + 1}{6x^2 + 11x - 10}$ ไปแยกเศษส่วนย่อยดังต่อไปนี้

$$\text{เนื่องจาก } \frac{8x + 1}{6x^2 + 11x - 10} = \frac{8x + 1}{(3x - 2)(2x + 5)}$$

สมมติให้

$$\frac{8x + 1}{(3x - 2)(2x + 5)} = \frac{A}{3x - 2} + \frac{B}{2x + 5} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A และ B ดังนี้

$$\begin{aligned} 8x + 1 &= \left[\frac{A}{3x - 2} + \frac{B}{2x + 5} \right] (3x - 2)(2x + 5) \\ &= \frac{A}{3x - 2} (3x - 2)(2x + 5) + \frac{B}{2x + 5} (3x - 2)(2x + 5) \\ &= A(2x + 5) + B(3x - 2) \end{aligned}$$

จะได้

$$8x + 1 = A(2x + 5) + B(3x - 2) \quad \dots(2)$$

จากสมการที่ (2) ใช้วิธีแทนค่า x ที่เหมาะสมดังนี้

แทนค่า $x = -\frac{5}{2}$ ในสมการ (2) จะได้

$$\begin{aligned} 8\left(-\frac{5}{2}\right) + 1 &= A\left[2\left(-\frac{5}{2}\right) + 5\right] + B\left[3\left(-\frac{5}{2}\right) - 2\right] \\ B &= 2 \end{aligned}$$

แทนค่า $x = -\frac{2}{3}$ ในสมการ (2) จะได้

$$8\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = A\left[2\left(-\frac{2}{3}\right) + 5\right] + B\left[3\left(-\frac{2}{3}\right) - 2\right]$$

$$A = 1$$

แทนค่า $A = 1$ และ $B = 2$ ในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{8x+1}{(3x-2)(2x+5)} = \frac{1}{3x-2} + \frac{2}{2x+5}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^3 + 11x^2 - 2x + 1}{6x^2 + 11x - 10} dx &= \int x + \frac{1}{3x-2} + \frac{2}{2x+5} dx \\ &= \int x dx + \int \frac{1}{3x-2} dx + \int \frac{2}{2x+5} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \ln|3x-2| + \frac{1}{2} \ln|2x+5| + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{6x^3 + 11x^2 - 2x + 1}{6x^2 + 11x - 10} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \ln|3x-2| + \frac{1}{2} \ln|2x+5| + c$

ตัวอย่าง 3.15 จงหาค่า $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

วิธีทำ เนื่องจากปริพันธ์มีระดับชั้นของเศษเท่ากับส่วน จัดให้อยู่ในรูปทั่วไปโดยการตั้งหารดังนี้

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^3 - x^2 - 2x \overline{) x^4 + 0x^3 - 3x^2 - 3x - 2} \\ \underline{x^4 - x^3 - 2x^2} \\ x^3 - x^2 - 3x \\ \underline{x^3 - x^2 - 2x} \\ -x - 2 \end{array}$$

แสดงว่า

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 + \frac{-x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

หรือ

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{x + 2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

นำ $\frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x}$ ไปแยกเศษส่วนย่อยดังต่อไปนี้

เนื่องจาก $\frac{x+2}{x^3-x^2-2x} = \frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}$

สมมติให้

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \quad \dots(1)$$

ดำเนินการหา A, B และ C ดังนี้

$$\begin{aligned} x+2 &= \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \right] x(x-2)(x+1) \\ &= \frac{A}{x} x(x-2)(x+1) + \frac{B}{x-2} x(x-2)(x+1) \\ &\quad + \frac{C}{x+1} x(x-2)(x+1) \\ &= A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) \end{aligned}$$

จะได้

$$x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) \quad \dots(2)$$

จากสมการที่ (2) ใช้วิธีแทนค่า x ที่เหมาะสมดังนี้

แทน $x = 2$ ในสมการ (2) ได้

$$2+2 = +B2(2+1)$$

$$4 = 6B$$

$$B = \frac{2}{3}$$

แทน $x = 0$ ในสมการ (2) ได้

$$0+2 = A(0-2)(0+1)$$

$$2 = -2A$$

$$A = -1$$

แทน $x = -1$ ในสมการ (2) ได้

$$-1+2 = C(-1)(-1-2)$$

$$1 = 3C$$

$$C = \frac{1}{3}$$

แทนค่า $A = -1, B = \frac{2}{3}$ และ $C = \frac{1}{3}$ ในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x-2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} \right)$$

แสดงว่า

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 - \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x-2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} \right) \right)$$

หรือ

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x-2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} \right)$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x-2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} \right) \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{2}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{2}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + c$

การหาปริพันธ์โดยเทคนิคแยกเศษส่วนย่อยในรูป $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ระดับชั้นของ $P(x)$ มากกว่าหรือ

เท่ากับ $Q(x)$ เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไป

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

แล้วหลังจากนั้นเรานำ $\frac{S(x)}{Q(x)}$ ไปแยกเศษส่วนย่อยตามกรณีที่ได้อีกขึ้นมาทั้ง 4 กรณี แต่

บางครั้งเราสามารถนำ $\frac{S(x)}{Q(x)}$ ไปหาปริพันธ์ได้เลยโดยไม่ต้องแยกเศษส่วนย่อยดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.16 จงหาค่า $\int \frac{9x^3 - 6x^2 + 3x - 1}{3x - 2} dx$

วิธีทำ เนื่องจากปริพันธ์มีระดับชั้นของเศษมากกว่าส่วนจัดให้อยู่ในรูปทั่วไปโดยการตั้งหารดังนี้

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 1 \\ 3x - 2 \overline{) 9x^3 - 6x^2 + 3x - 1} \\ \underline{9x^3 - 6x^2} \\ 3x - 1 \\ \underline{3x - 2} \\ 1 \end{array}$$

แสดงว่า

$$\frac{9x^3 - 6x^2 + 3x - 1}{3x - 2} = 3x^2 + 1 + \frac{1}{3x - 2}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int \frac{9x^3 - 6x^2 + 3x - 1}{3x - 2} dx &= \int 3x^2 + 1 + \frac{1}{3x - 2} dx \\ &= x^3 + x + \frac{1}{3} \ln|3x - 2| + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{9x^3 - 6x^2 + 3x - 1}{3x - 2} dx = x^3 + x + \frac{1}{3} \ln|3x - 2| + c$

ตัวอย่าง 3.17 จงหาค่า $\int \frac{x^3 - x^2 - 5x + 8}{x - 2} dx$

วิธีทำ เนื่องจากปริพันธ์มีระดับชั้นของเศษมากกว่าส่วน จัดให้อยู่ในรูปทั่วไปโดยการตั้งหารดังนี้

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 3 \\ x - 2 \overline{) x^3 - x^2 - 5x + 8} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 5x \\ \underline{x^2 - 2x} \\ -3x + 8 \\ \underline{-3x + 6} \\ 2 \end{array}$$

แสดงว่า

$$\frac{x^3 - x^2 - 5x + 8}{x - 2} = x^2 + x - 3 + \frac{2}{x - 2}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - x^2 - 5x + 8}{x - 2} dx &= \int x^2 + x - 3 + \frac{2}{x - 2} dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \ln|x - 2| + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{x^3 - x^2 - 5x + 8}{x - 2} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \ln|x - 2| + c$

3.4 สรุปท้ายบท

การแยกเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันตรรกยะ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามที่ไม่มี

ตัวประกอบร่วม สามารถทำได้โดยมีลำดับขั้นตอนดังนี้

1. ถ้าระดับชั้นของ $P(x)$ ไม่น้อยกว่า $Q(x)$ ให้หาร $P(x)$ ด้วย $Q(x)$ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ดังนี้ $\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$ ซึ่ง $F(x)$ เป็นพหุนาม และระดับชั้นของ $S(x)$ น้อยกว่า $Q(x)$
2. แยกตัวประกอบของ $Q(x)$ ซึ่งตัวประกอบของ $Q(x)$ จะมีแต่ตัวประกอบเชิงเส้นในรูปของ $(x - a)$ และตัวประกอบกำลังสองในรูป $ax^2 + bx + c$ (ซึ่งแยกตัวประกอบต่อไปไม่ได้) เท่านั้น
3. ถ้า $(x - a)^m$ เป็นตัวประกอบของ $Q(x)$ แล้วจะเกิดผลบวกของเศษส่วนย่อย m เศษส่วนย่อยจากตัวประกอบ $(x - a)^m$ ในรูปของ
$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \frac{A_3}{(x - a)^3} + \cdots + \frac{A_m}{(x - a)^m}$$
4. ถ้า $(ax^2 + bx + c)^n$ เป็นตัวประกอบของ $Q(x)$ แล้วจะเกิดผลบวกของเศษส่วนย่อย n เศษส่วนย่อยจากตัวประกอบ $(ax^2 + bx + c)^n$ ในรูปของ
$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{A_3x + B_3}{(ax^2 + bx + c)^3} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$
5. แล้วหาค่าของสัมประสิทธิ์ทุกตัว โดยวิธีหนึ่งวิธีใดก็ได้ แต่โดยทั่ว ๆ ไปนิยมวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์
6. หาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ โดยแยกเป็นผลบวกของปริพันธ์ของแต่ละเศษส่วนย่อย แล้วหาผลลัพธ์โดยวิธีต่าง ๆ ตามความเหมาะสม

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. จงตรวจสอบฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่าเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้หรือไม่แท้

1.1 $\frac{3x-5}{x^2-3x+2}$

1.2 $\frac{5x-4}{3(x-2)(x+1)}$

1.3 $\frac{7x^2+48x+67}{(x+3)^2(3x+2)}$

1.4 $\frac{4}{x^3-4x}$

1.5 $\frac{3x^2-2x+12}{(x-2)(x^2+6)}$

1.6 $\frac{x^2+x-16}{(x+1)(x-3)^2}$

1.7 $\frac{2x+12}{(x-2)(x^2+6)}$

1.8 $\frac{x^2-1}{(x+1)(x-3)^2}$

2. จงแยกเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันที่กำหนดให้

2.1 $\frac{3x-5}{x^2-3x+2}$

2.2 $\frac{5x-4}{3(x-2)(x+1)}$

2.3 $\frac{7x^2+48x+67}{(x+3)^2(3x+2)}$

2.4 $\frac{4}{x^3-4x}$

2.5 $\frac{3x^2-2x+12}{(x-2)(x^2+6)}$

2.6 $\frac{x^2+x-16}{(x+1)(x-3)^2}$

2.7 $\frac{2x+12}{(x-2)(x^2+6)}$

2.8 $\frac{x^2-1}{(x+1)(x-3)^2}$

3. จงแสดงวิธีทำเพื่อหาปริพันธ์

3.1 $\int \frac{3x-5}{x^2-3x+2} dx$

3.2 $\int \frac{5x-4}{3(x-2)(x+1)} dx$

3.3 $\int \frac{7x^2+48x+67}{(x+3)^2(3x+2)} dx$

3.4 $\int \frac{4}{x^3-4x} dx$

3.5 $\int \frac{1}{x^3+x} dx$

3.6 $\int \frac{x}{x^2-3x-4} dx$

3.7 $\int \frac{3x^2-2x+12}{(x-2)(x^2+6)} dx$

3.8 $\int \frac{x^2+x-16}{(x+1)(x-3)^2} dx$

3.9 $\int \frac{3x^2-4x-1}{(x-2)(x^2-1)} dx$

3.10 $\int \frac{x^2-9x-9}{x^3-9x} dx$

4. จงหาค่าของ

4.1 $\int \frac{6x+11}{3x+2} dx$

4.3 $\int \frac{x^2-2x-1}{x-3} dx$

4.5 $\int \frac{10x-3}{2x-1} dx$

4.7 $\int \frac{x^3-x+1}{x^2-1} dx$

4.9 $\int \frac{x^3-3x^2-5x-18}{x^2-3x-10} dx$

4.2 $\int \frac{x^2+5x+2}{x+5} dx$

4.4 $\int \frac{x^3-6x^2+9x+2}{(x-3)^2} dx$

4.6 $\int \frac{x^3-x^2-2x+1}{(x-2)(x+1)} dx$

4.8 $\int \frac{x^3+2x^2+3x+10}{x+2} dx$

4.10 $\int \frac{3x^3+20x^2+17x-16}{(x+5)(x^2-1)} dx$

เอกสารอ้างอิง

ธัญยศ จำปาหวาย. (2564). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

ธีระศักดิ์ อัจฉนนนท์. (2555) **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร**. ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์.

_____. (2564). **แคลคูลัส 1**. ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์.

ไมตรี ปาเดชะสุวัฒน์ และไพโรจน์ ตีรณธนากุล. (2542) **เทคนิคการอินทิเกรต**. กรุงเทพมหานคร :
ประกอบเมโทร.

วิรัตน์ สุวรรณภักดี. (2548). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. (2558). **แคลคูลัส 1** กรุงเทพมหานคร : ปลาทอง ก๊อปปี้ ปริ้นท์.

Edwin.J.H. and Gilbert.S. (2016). **Calculus Volume 2**. Texas : OpenStax Rice University.

Gilbert. S. (2018). **Calculus**. Massachusetts : MIT Department of Mathematics.

Heinbockel. J.H. (2012). **Introduction to Calculus Volume I**. Norfolk : Old Dominion
University.

Guichard. D. (2019). **Single Variable Calculus**. Washington : Whitman College.

