

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

ปริพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย

เนื้อหาประจำบท

1. ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. ปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันชี้กำลัง
3. ปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก
4. ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. บอกความหมายของฟังก์ชันอดิศัยได้
2. หาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้สูตรพื้นฐานได้
3. หาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรได้
4. หาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันชี้กำลังโดยใช้สูตรพื้นฐานได้
5. หาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันชี้กำลังโดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรได้
6. หาปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโดยใช้สูตรพื้นฐานได้
7. หาปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรได้
8. หาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันโดยใช้สูตรพื้นฐานได้
9. หาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันโดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้อย่างพร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 ปริพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย
 - 1.2 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
 - 1.3 ปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันชี้กำลัง
 - 1.4 ปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก
 - 1.5 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
 - 2.1. ศึกษาข้อมูลจาก เกี่ยวกับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัยเพิ่มเติม
 - 2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation
3. ใบงาน

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. การตอบคำถาม
3. ทดสอบท้ายชั่วโมง
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 2

ปริพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย

ฟังก์ชันอดิศัย คือ ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต แต่มีรูปแบบเฉพาะของตนเอง ได้แก่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัยต้องอาศัยความรู้พื้นฐานและสมบัติที่จำเป็นบางอย่าง เพื่อความสะดวกและรวดเร็วในการหานั้นเอง สำหรับเนื้อหาในบทนี้นั้น จะเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย ดังนี้ ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน โดยการหาปริพันธ์ทั้งหมดที่ได้กล่าวมาข้างต้นจะเป็นการหาปริพันธ์ที่ได้จากสูตรการหาโดยตรง และใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรในการหาปริพันธ์ในกรณีที่ใช้สูตรการหาโดยตรงไม่ได้

2.1 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

วัลลภ เหมวงษ์ (2557 : 162) และธีรศักดิ์ อุไรจนาพันธ์. (2555 : 323) ได้ให้สูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดให้ $u = f(x)$ ดังต่อไปนี้

$$\frac{d}{du} \sin u = \cos u$$
$$\frac{d}{du} \cos u = -\sin u$$

จะได้สูตรปริพันธ์

$$\int \cos u \, du = \sin u + c$$

$$\int \sin u \, du = -\cos u + c$$

Edwin.J.H. and Gilbert.S. (2016 : 763) Harold Jan R.T. (2015 : 8) และจันทนีย์ กาญจนะโรจน์ และชูลี โชติกประคัลภ์ (2557 : 365) ได้ให้สูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปแบบอื่น ๆ ดังต่อไปนี้

$$1. \int \sin u \, du = -\cos u + c$$

$$2. \int \cos u \, du = \sin u + c$$

$$3. \int \sec^2 u \, du = \tan u + c$$

$$4. \int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$$

$$5. \int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$$

$$6. \int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$$

ตัวอย่าง 2.1

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

จากตัวอย่าง 2.1 เป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยตรงใช้เพียงสูตรพื้นฐาน ไม่ได้ใช้เทคนิคใด ๆ เข้ามาช่วยแต่บางครั้งการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิตินอกจากจะใช้สูตรแล้วยังต้องอาศัยเทคนิคต่าง ๆ เข้ามาช่วย แต่สำหรับในบทนี้นั้นใช้เพียงเทคนิคเปลี่ยนตัวแปรเท่านั้นดังที่แสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2 จงหาค่า $\int \sin(3x - 1) \, dx$

วิธีทำ $u = 3x - 1$

$$du = 3dx$$

$$\text{จะได้ } \int \sin(3x - 1) \, dx = \int \sin u \frac{3dx}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \int \sin u \, du$$

$$= -\frac{1}{3} \cos u + c$$

$$= -\frac{1}{3} \cos(3x - 1) + c$$

ดังนั้น $\int \sin(3x-1)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x-1) + c$

ตัวอย่าง 2.3 จงหาค่า $\int \cos(2x+9) dx$

วิธีทำ $u = 2x + 9$

$$du = 2dx$$

จะได้ $\int \cos(2x+9) dx = \int \cos u \frac{2dx}{2}$

$$= \frac{1}{2} \int \cos u du$$

$$= \frac{1}{2} \sin u + c$$

$$= \frac{1}{2} \sin(2x+9) + c$$

ดังนั้น $\int \cos(2x+9) dx = \frac{1}{2} \sin(2x+9) + c$

ตัวอย่าง 2.4 จงหาค่า $\int \sec^2(7x-2) dx$

วิธีทำ $u = 7x - 2$

$$du = 7dx$$

จะได้ $\int \sec^2(7x-2) dx = \int \sec^2 u \frac{7dx}{7}$

$$= \frac{1}{7} \int \sec^2 u du$$

$$= \frac{1}{7} \tan u + c$$

$$= \frac{1}{7} \tan(7x-2) + c$$

ดังนั้น $\int \sec^2(7x-2) dx = \frac{1}{7} \tan(7x-2) + c$

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้ยกตัวอย่างมาในข้างต้นนั้น เป็นการหาแบบใช้สูตรโดยตรงเพียงเทคนิคเปลี่ยนตัวแปรเข้ามาช่วยก็สามารถหาปริพันธ์ได้แล้ว แต่สำหรับตัวอย่างต่อไปเราต้องอาศัยทักษะในการเลือกเปลี่ยนตัวแปรให้เหมาะสม เพราะไม่สามารถใช้สูตรโดยตรงได้เหมือนตัวอย่างที่ผ่านมาดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.5 จงหาค่า $\int \sin x \cos^7 x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \cos x$
 $du = -\sin x \, dx$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int \sin x \cos^7 x \, dx &= \int \sin x \, u^7 \frac{-\sin x \, dx}{-\sin x} \\ &= -\int u^7 \, du \\ &= -\frac{u^8}{8} + c \\ &= \frac{-\cos^8 x}{8} + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \sin x \cos^7 x \, dx = \frac{-\cos^8 x}{8} + c$

ตัวอย่าง 2.6 จงหาค่า $\int x^3 \sec x^4 \tan x^4 \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^4$
 $du = 4x^3 \, dx$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int x^3 \sec x^4 \tan x^4 \, dx &= \int x^3 \sec u \tan u \frac{4x^3 \, dx}{4x^3} \\ &= \frac{1}{4} \int \sec u \tan u \, du \\ &= \frac{1}{4} \sec u + c \\ &= \frac{1}{4} \sec x^4 + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int x^3 \sec x^4 \tan x^4 \, dx = \frac{1}{4} \sec x^4 + c$

ตัวอย่าง 2.7 จงหาค่า $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1 - \cos 2x$
 $du = (2 \sin 2x) \, dx$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} \, dx &= \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{u}} \frac{(2 \sin 2x) \, dx}{2 \sin 2x} \\ &= \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2 \sin 2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{1/2}} du \\
&= \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right) + c \\
&= u^{1/2} + c \\
&= \sqrt{1 - \cos 2x} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} dx = \sqrt{1 - \cos 2x} + c$

ตัวอย่าง 2.8 จงหาค่า $\int \sqrt{\tan x \sec^2 x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = \tan x$

$$du = \sec^2 x dx$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \int \sqrt{\tan x \sec^2 x} dx &= \int \sqrt{u} \sec^2 x \frac{(\sec^2 x) dx}{\sec^2 x} \\
&= \int \sqrt{u} \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x} \\
&= \int u^{1/2} du \\
&= \frac{2}{3} u^{3/2} + c \\
&= \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \sqrt{\tan x \sec^2 x} dx = \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + c$

ตัวอย่าง 2.9 จงหาค่า $\int \frac{\cot x}{\csc^4 x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = \csc x$

$$du = -\csc x \cot x dx$$

$$\text{จะได้ } \int \frac{\cot x}{\csc^4 x} dx = \int \frac{\cot x}{u^4} \frac{(-\csc x \cot x) dx}{-\csc x \cot x}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\cot x}{u^4} \frac{du}{(-\csc x \cot x)} \\
&= \int \frac{1}{u^4} \frac{du}{(-\csc x)} \\
&= \int \frac{1}{-u^5} du \\
&= \int -u^{-5} du \\
&= \left(\frac{-u^{-4}}{-4} \right) + c \\
&= \frac{u^{-4}}{4} + c \\
&= \frac{1}{4} (\csc^{-4} x) + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{\cot x}{\csc^4 x} dx = \frac{1}{4} (\csc^{-4} x) + c$

ตัวอย่าง 2.10 จงหาค่า $\int \tan x \, dx$

วิธีทำ $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

ให้ $u = \cos x$

$$du = -\sin x \, dx$$

จะได้ $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\sin x}{u} \frac{-\sin x \, dx}{-\sin x} \\
&= \int \frac{\sin x}{u} \frac{du}{(-\sin x)} \\
&= -\int \frac{1}{u} du \\
&= -\ln |u| + c \\
&= -\ln |\cos x| + c
\end{aligned}$$

$$= \ln |\cos x|^{-1} + c$$

$$= \ln |\sec x| + c$$

ดังนั้น $\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + c$

2.2 ปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันชี้กำลัง

จากสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันชี้กำลัง จะได้สูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันชี้กำลัง ดังนี้เมื่อกำหนดให้ $u = f(x)$ หาอนุพันธ์ได้ซึ่ง สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2554 : 2) และ Sigurd A. (2010 : 101) ได้สรุปสูตรการหาไว้ดังนี้

$$1. \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

$$2. \int e^u du = e^u + c$$

$$3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0 \text{ และ } a \neq 1$$

ตัวอย่าง 2.11

$$1. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$2. \int e^x dx = e^x + c$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0 \text{ และ } a \neq 1$$

จากตัวอย่าง 2.11 เป็นการใช้อนุกรมหารหาปริพันธ์โดยตรงโดยไม่ใช้เทคนิคใด ๆ เข้ามาช่วยแต่บางครั้งการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันชี้กำลัง นอกจากจะใช้อนุกรมแล้วยังต้องอาศัยเทคนิคเปลี่ยนตัวแปรและเทคนิคอื่น ๆ เข้ามาช่วยด้วยแต่สำหรับในบทนี้นั้นใช้เพียงเทคนิคเปลี่ยนตัวแปรเท่านั้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.12 จงหาค่า $\int \frac{1}{x+3} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x + 3$

$$du = dx$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้} \quad \int \frac{1}{x+3} dx &= \int \frac{1}{u} du \\
&= \ln|u| + c \\
&= \ln|x+3| + c
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| + c$$

ตัวอย่าง 2.13 จงหาค่า $\int \frac{1}{2x+5} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x + 5$

$$du = 2dx$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้} \quad \int \frac{1}{2x+5} dx &= \int \frac{1}{u} dx \\
&= \int \frac{1}{u} \frac{2dx}{2} \\
&= \int \frac{1}{u} \frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\
&= \frac{1}{2} \ln|u| + c \\
&= \frac{1}{2} \ln|2x+5| + c
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+5| + c$$

ตัวอย่าง 2.14 จงหาค่า $\int e^{3x-1} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x - 1$

$$du = 3dx$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้} \quad \int e^{3x-1} dx &= \int e^u dx \\
&= \int e^u \frac{3dx}{3} \\
&= \int e^u \frac{du}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \int e^u \, du \\
&= \frac{1}{3} e^u + c \\
&= \frac{1}{3} e^{3x-1} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int e^{3x-1} \, dx = \frac{1}{3} e^{3x-1} + c$

ตัวอย่าง 2.15 จงหาค่า $\int 9^{2x-1} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x - 1$
 $du = 2dx$
 จะได้ $\int 9^{2x-1} \, dx = \int 9^u \, dx$

$$\begin{aligned}
&= \int 9^u \frac{2 \, dx}{2} \\
&= \int 9^u \frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2} \int 9^u \, du \\
&= \frac{9^u}{2 \ln 9} + c \\
&= \frac{9^{2x-1}}{2 \ln 9} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int 9^{2x-1} \, dx = \frac{1}{2} 9^{2x-1} \ln 2 + c$

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันชี้กำลังที่ได้ยกตัวอย่างมาในข้างต้นนั้นเป็น การหาแบบใช้สูตรโดยตรงเพียงเพิ่มเทคนิคเปลี่ยนตัวแปรเข้ามาช่วยก็สามารถหาปริพันธ์ได้แล้วแต่ สำหรับตัวอย่างต่อไปเราต้องอาศัยทักษะในการเลือกเปลี่ยนตัวแปรให้เหมาะสมเพราะไม่สามารถใช้ สูตรโดยตรงได้เหมือนตัวอย่างที่ผ่านมาดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.16 จงหาค่า $\int \frac{x}{2-x^2} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2 - x^2$
 $du = -2x \, dx$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้} \quad \int \frac{x}{2-x^2} dx &= \int \frac{x}{u} dx \\
&= \int \frac{x}{u} \frac{(-2x)dx}{-2x} \\
&= \int \frac{x}{u} \frac{du}{-2x} \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\
&= -\frac{1}{2} \ln|u| + c \\
&= -\frac{1}{2} \ln|2-x^2| + c
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int \frac{x}{2-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln|2-x^2| + c$$

ตัวอย่าง 2.17 จงหาค่า $\int 3x^2 e^{x^3} dx$

$$\begin{aligned}
\text{วิธีทำ} \quad \text{ให้} \quad u &= x^3 \\
du &= 3x^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้} \quad \int 3x^2 e^{x^3} dx &= \int 3x^2 e^u dx \\
&= \int 3x^2 e^u \frac{3x^2 dx}{3x^2} \\
&= \int 3x^2 e^u \frac{du}{3x^2} \\
&= \int e^u du \\
&= e^u + c \\
&= e^{x^3} + c
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int 3x^2 e^{x^3} dx = e^{x^3} + c$$

ตัวอย่าง 2.18 จงหาค่า $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

$$\begin{aligned}
\text{วิธีทำ} \quad \text{ให้} \quad u &= e^x + 1 \\
du &= e^x dx
\end{aligned}$$

$$\text{จะได้} \quad \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{e^x}{u} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{e^x}{u} \frac{e^x dx}{e^x} \\
&= \int \frac{e^x}{u} \frac{du}{e^x} \\
&= \int \frac{1}{u} du \\
&= \ln|u| + c \\
&= \ln|e^x + 1| + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln|e^x + 1| + c$

ตัวอย่าง 2.29 จงหาค่า $\int \sqrt{10^{3x}} dx$

วิธีทำ $\int \sqrt{10^{3x}} dx = \int 10^{3x/2} dx$

ให้ $u = \frac{3x}{2}$

$$du = \frac{3}{2} dx$$

จะได้ $\int \sqrt{10^{3x}} dx = \int 10^{3x/2} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int 10^u dx \\
&= \int 10^u \frac{\frac{3}{2} dx}{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{3} \int 10^u du \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{10^u}{\ln 10} \right) + c \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{10^{3x/2}}{\ln 10} \right) + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \sqrt{10^{3x}} dx = \frac{2}{3} \left(\frac{10^{3x/2}}{\ln 10} \right) + c$

2.3 ปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

จากสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก จะทำให้ได้สูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก เมื่อกำหนดให้ $u = f(x)$ ซึ่งคณาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร (2558 : 47) ได้แสดงไว้ดังนี้

$$\frac{d}{du} \sinh u = \cosh u$$

$$\frac{d}{du} \cosh u = \sinh u$$

จะได้สูตรปริพันธ์

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + c \text{ และ}$$

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + c$$

นอกจากปริพันธ์ของ $\sinh u$ และ $\cosh u$ ที่ได้แสดงไว้ข้างต้นแล้วยังมีสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกในรูปแบบอื่น ๆ อีก โดย เบญจวรรณ โรจนดิษฐ์ (2537 : 255) ได้สรุปไว้ดังนี้

$$1. \int \sinh u \, du = \cosh u + c$$

$$2. \int \cosh u \, du = \sinh u + c$$

$$3. \int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + c$$

$$4. \int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + c$$

$$5. \int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + c$$

$$6. \int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + c$$

ตัวอย่าง 2.30

$$1. \int \sinh x \, dx = \cosh x + c$$

$$2. \int \cosh x \, dx = \sinh x + c$$

$$3. \int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + c$$

$$4. \int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + c$$

$$5. \int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + c$$

$$6. \int \operatorname{csch} x \coth x \, du = -\operatorname{csch} x + c$$

จากตัวอย่าง 2.30 เป็นการใช้อนุกรมหารหาค่าปริพันธ์โดยตรงโดยไม่ใช้เทคนิคใด ๆ เข้ามาช่วยแต่บางครั้งการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกนอกจากจะใช้อนุกรมแล้วยังต้องอาศัยเทคนิคเปลี่ยนตัวแปรและเทคนิคอื่น ๆ เข้ามาช่วย แต่สำหรับในบทนี้นั้นใช้เพียงเทคนิคเปลี่ยนตัวแปรเท่านั้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.31 จงหาค่า $\int \sinh(3x + 8) dx$

วิธีทำ

$$u = 3x + 8$$

$$du = 3dx$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int \sinh(3x + 8) dx &= \int \sinh u \frac{3dx}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int \sinh u du \\ &= \frac{1}{3} \cosh u + c \\ &= \frac{1}{3} \cosh(3x + 8) + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \sinh(3x + 8) dx = \frac{1}{3} \cosh(3x + 8) + c$

ตัวอย่าง 2.32 จงหาค่า $\int \cosh(2x - 1) dx$

วิธีทำ

$$u = 2x - 1$$

$$du = 2dx$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int \cosh(2x - 1) dx &= \int \cosh u \frac{2dx}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int \cosh u du \\ &= \frac{1}{2} \sinh u + c \\ &= \frac{1}{2} \sinh(2x - 1) + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \cosh(2x - 1) dx = \frac{1}{2} \sinh(2x - 1) + c$

ตัวอย่าง 2.33 จงหาค่า $\int \operatorname{sech}^2(7x - 2) dx$

วิธีทำ

$$u = 7x - 2$$

$$du = 7dx$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \int \operatorname{sech}^2(7x-2) \, dx &= \int \operatorname{sech}^2 u \, \frac{7dx}{7} \\
&= \frac{1}{7} \int \operatorname{sech}^2 u \, du \\
&= \frac{1}{7} \tanh u + c \\
&= \frac{1}{7} \tanh(7x-2) + c
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \int \operatorname{sech}^2(7x-2) \, dx = \frac{1}{7} \tanh(7x-2) + c$$

ตัวอย่าง 2.34 จงหาค่า $\int \sinh x \cosh^{17} x \, dx$

$$\begin{aligned}
\text{วิธีทำ ให้ } u &= \cosh x \\
du &= \sinh x \, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \int \sinh x \cosh^{17} x \, dx &= \int \sinh x \, u^{17} \frac{\sinh x \, dx}{\sinh x} \\
&= \int \sinh x \, u^{17} \frac{u}{\sinh x} \\
&= \int u^{17} \, du \\
&= \frac{u^{18}}{18} + c \\
&= \frac{\cosh^{18} x}{18} + c
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \int \sinh x \cosh^{17} x \, dx = \frac{\cosh^{18} x}{18} + c$$

ตัวอย่าง 2.35 จงหาค่า $\int 5x^4 \operatorname{sech} x^5 \tanh x^5 \, dx$

$$\begin{aligned}
\text{วิธีทำ ให้ } u &= x^5 \\
du &= 5x^4 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \int 5x^4 \operatorname{sech} x^5 \tanh x^5 \, dx &= \int 5x^4 \operatorname{sech} u \tanh u \, dx \\
&= \int 5x^4 \operatorname{sech} u \tanh u \frac{5x^4 dx}{5x^4}
\end{aligned}$$

$$= \int \operatorname{sech} u \tanh u \, du$$

$$= -\sec u + c$$

$$= -\sec x^5 + c$$

ดังนั้น $\int 5x^4 \operatorname{sech} x^5 \tanh x^5 \, dx = -\sec x^5 + c$

ตัวอย่าง 2.36 จงหาค่า $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1 - \cosh 2x$

$$du = -2 \sinh 2x \, dx$$

จะได้
$$\begin{aligned} \int \frac{\sinh 2x}{\sqrt{1 - \cosh 2x}} \, dx &= \int \frac{\sinh 2x}{\sqrt{u}} \frac{(-2 \sinh 2x) \, dx}{(-2 \sinh 2x)} \\ &= \int \frac{\sinh 2x}{\sqrt{u}} \frac{du}{-2 \sinh 2x} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{1/2}} \, du \\ &= -\frac{1}{2} \int u^{-1/2} \, du \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right) + c \\ &= -u^{1/2} + c \\ &= -\sqrt{1 - \cosh 2x} + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{\sinh 2x}{\sqrt{1 - \cosh 2x}} \, dx = -\sqrt{1 - \cosh 2x} + c$

ตัวอย่าง 2.37 จงหาค่า $\int \sqrt{\tanh x} \operatorname{sech}^2 x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \tanh x$

$$du = \operatorname{sech}^2 x \, dx$$

จะได้
$$\begin{aligned} \int \sqrt{\tanh x} \operatorname{sech}^2 x \, dx &= \int \sqrt{u} \operatorname{sech}^2 x \frac{(\operatorname{sech}^2 x) \, dx}{\operatorname{sech}^2 x} \\ &= \int \sqrt{u} \operatorname{sech}^2 x \frac{du}{\operatorname{sech}^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int u^{1/2} du \\
&= \frac{2}{3} u^{3/2} + c \\
&= \frac{2}{3} \tanh^{3/2} x + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \sqrt{\tanh x \operatorname{sech}^2 x} dx = \frac{2}{3} \tanh^{3/2} x + c$

ตัวอย่าง 2.38 จงหาค่า $\int \frac{\coth x}{\operatorname{csch}^4 x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = \operatorname{csch} x$
 $du = -\operatorname{csch} x \coth x dx$

จะได้
$$\begin{aligned}
\int \frac{\coth x}{\operatorname{csch}^4 x} dx &= \int \frac{\coth x}{u^4} \frac{(-\operatorname{csch} x \coth x) dx}{-\operatorname{csch} x \coth x} \\
&= \int \frac{\coth x}{u^4} \frac{du}{(-\operatorname{csch} x \coth x)} \\
&= \int \frac{1}{u^4} \frac{du}{(-\operatorname{csch} x)} \\
&= \int \frac{1}{-u^5} du \\
&= \int -u^{-5} du \\
&= \left(\frac{-u^{-4}}{-4} \right) + c \\
&= \frac{u^{-4}}{4} + c \\
&= \frac{1}{4} (\operatorname{csch}^{-4} x) + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{\coth x}{\operatorname{csch}^4 x} dx = \frac{1}{4} (\operatorname{csch}^{-4} x) + c$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่า การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกใช้วิธีคล้ายกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพียงแต่ใช้สูตรความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนดังตัวอย่างไว้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.39 จงหาค่า $\int \tanh^2 2x \, dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ ให้ } \int \tanh^2 2x \, dx &= \int (1 - \operatorname{sech}^2 2x) \, dx \\ &= \int 1 \, dx - \int \operatorname{sech}^2 2x \, dx \\ &= x - \frac{1}{2} \tanh 2x + c \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \int \tanh^2 2x \, dx = x - \frac{1}{2} \tanh 2x + c$$

2.4 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน

ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ และคณะ (2561 : 109) และ Harold Jan R.T. (2015 : 14). ได้ให้สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ทำให้ได้สูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันดังต่อไปนี้ โดยกำหนดให้ $u = f(x)$

$$\frac{d}{du} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{และ} \quad \frac{d}{du} \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

จะได้สูตรปริพันธ์

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du &= \sin^{-1} u + c \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du &= -\cos^{-1} u + c \end{aligned}$$

นอกจากปริพันธ์ที่ได้แสดงไว้ข้างต้นแล้วยังมีสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปแบบอื่น ๆ อีก โดย จันทนีย์ กาญจนะโรจน์ และชูลี โชติกประคัลภ์ (2557 : 365) ได้สรุปไว้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du &= \begin{cases} \sin^{-1} u + c \\ -\cos^{-1} u + c \end{cases} \\ \int \frac{1}{1+u^2} \, du &= \begin{cases} \tan^{-1} u + c \\ -\cot^{-1} u + c \end{cases} \\ \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \, du &= \begin{cases} \sec^{-1} u + c \\ -\csc^{-1} u + c \end{cases} \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} \, du &= \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c \\ \int \frac{1}{a^2+u^2} \, du &= \frac{1}{a} \sin^{-1} \frac{u}{a} + c \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.40

1. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$
2. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$
3. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$
4. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = -\csc^{-1} x + c$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{3^2-x^2}} dx = \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x}{3} + c$
6. $\int \frac{1}{7^2+x^2} dx = \frac{1}{7} \sin^{-1} \frac{x}{7} + c$

จากตัวอย่าง 2.40 เป็นการใช้อนุกรมหารหาค่าปริพันธ์โดยตรงโดยไม่ใช้เทคนิคใด ๆ เข้ามาช่วยแต่บางครั้งการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันนอกจากจะใช้อนุกรมแล้วยังต้องอาศัยเทคนิคเปลี่ยนตัวแปรและเทคนิคอื่น ๆ เข้ามาช่วยด้วยแต่สำหรับในบทนี้นั้นใช้เพียงเทคนิคเปลี่ยนตัวแปรเท่านั้นดังตัวอย่างไว้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.41 จงหาค่า $\int \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \sin^{-1} u + c$

$$\text{ให้} \quad u = 3x$$

$$du = 3 dx$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \int \frac{3}{1-9x^2} dx &= \int \frac{3}{1-(3x)^2} dx \\ &= \int \frac{3}{1-u^2} dx \\ &= \int \frac{3}{1-u^2} \frac{3dx}{3} \\ &= \int \frac{3}{1-u^2} \frac{du}{3} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{1-u^2} du$$

$$= \sin^{-1} u + c$$

$$= \sin^{-1} 3x + c$$

ดังนั้น $\int \frac{3}{1-9x^2} dx = \sin^{-1} 3x + c$

ตัวอย่าง 2.42 จงหาค่า $\int \frac{7}{x^2 - 6x + 25} dx$

วิธีทำ $\int \frac{7}{x^2 - 6x + 25} dx = \int \frac{7}{(x^2 - 6x + 9) + 16} dx$

$$= \int \frac{7}{(x-3)^2 + 4^2} dx$$

ให้ $u = x - 3$

$$du = dx$$

จะได้ $\int \frac{7}{(x-3)^2 + 4^2} dx = \int \frac{7}{u^2 + 4^2} du$

$$= \int \frac{7}{u^2 + 4^2} du$$

$$= 7 \int \frac{1}{u^2 + 4^2} du$$

$$= 7 \left(\frac{1}{4} \tan^{-1} u \right) + c$$

$$= \frac{7}{4} \tan^{-1}(x-3) + c$$

ดังนั้น $\int \frac{3}{1-9x^2} dx = \frac{7}{4} \tan^{-1}(x-3) + c$

นอกจากปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันแล้วก็มีปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผันซึ่งสูตรและวิธีการทำก็จะคล้ายกันกับปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันเพียงแค่ใช้คุณสมบัติของไฮเพอร์โบลิกผกผันดังที่ ทศพร ค้ายอุดม และคณะ (2558 : 2) ได้สรุปสูตรการหาไว้ดังนี้

$$1. \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \sinh^{-1} u + c = \ln(u + \sqrt{1+u^2}) + c$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du = \cosh^{-1} u + c = \ln(u + \sqrt{u^2-1}) + c$$

$$\begin{aligned}
3. \int \frac{1}{1-u^2} du &= \begin{cases} \tan^{-1} u + c, & |u| < 1 \\ \coth^{-1} u + c, & |u| > 1 \end{cases} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + c \\
4. \int \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} du &= -\operatorname{sech}^{-1} |u| + c \\
5. \int \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} du &= -\operatorname{csch}^{-1} |u| + c
\end{aligned}$$

2.5 สรุปท้ายบท

ปริพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัยในบทนี้จะศึกษาทั้งหมด 4 เรื่องได้แก่ ปริพันธ์ของชั้นตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน โดยการหาปริพันธ์ในบทนี้นั้นจะเป็นการใช้สูตรการหาปริพันธ์ทั้งหมดดังนี้

ปริพันธ์ของชั้นตรีโกณมิติ

$$\begin{aligned}
1. \int \sin u \, du &= -\cos u + c & 2. \int \cos u \, du &= \sin u + c \\
3. \int \sec^2 u \, du &= \tan u + c & 4. \int \csc^2 u \, du &= -\cot u + c \\
5. \int \sec u \tan u \, du &= \sec u + c & 6. \int \csc u \cot u \, du &= -\csc u + c
\end{aligned}$$

ปริพันธ์ฟังก์ชันชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

$$\begin{aligned}
1. \int \frac{1}{u} du &= \ln |u| + c & 2. \int e^u du &= e^u + c \\
3. \int a^u du &= \frac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0 \text{ และ } a \neq 1
\end{aligned}$$

ปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

$$\begin{aligned}
1. \int \sinh u \, du &= \cosh u + c & 2. \int \cosh u \, du &= \sinh u + c \\
3. \int \operatorname{sech}^2 u \, du &= \tanh u + c & 4. \int \operatorname{csch}^2 u \, du &= -\coth u + c \\
5. \int \operatorname{sech} u \tanh u \, du &= -\operatorname{sech} u + c \\
6. \int \operatorname{csch} u \coth u \, du &= -\operatorname{csch} u + c
\end{aligned}$$

ปริพันธ์ของฟังก์ตรีโกณมิติผกผัน

$$\begin{aligned}
 1. \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du &= \begin{cases} \sin^{-1} u + c \\ -\cos^{-1} u + c \end{cases} & 2. \int \frac{1}{1+u^2} du &= \begin{cases} \tan^{-1} u + c \\ -\cot^{-1} u + c \end{cases} \\
 3. \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du &= \begin{cases} \sec^{-1} u + c \\ -\csc^{-1} u + c \end{cases} & 4. \int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} du &= \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c \\
 5. \int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}} du &= \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c & 6. \int \frac{1}{a^2+u^2} du &= \frac{1}{a} \sin^{-1} \frac{u}{a} + c
 \end{aligned}$$

ปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน

$$\begin{aligned}
 1. \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du &= \sinh^{-1} u + c = \ln(u + \sqrt{1+u^2}) + c \\
 2. \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du &= \cosh^{-1} u + c = \ln(u + \sqrt{u^2-1}) + c \\
 3. \int \frac{1}{1-u^2} du &= \begin{cases} \tan^{-1} u + c, & |u| < 1 \\ \coth^{-1} u + c, & |u| > 1 \end{cases} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1-u}{1+u} \right] + c \\
 4. \int \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} du &= -\operatorname{sech}^{-1} |u| + c \\
 5. \int \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} du &= -\operatorname{csch}^{-1} |u| + c
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad \int \sin(2x - 1) dx$$

$$1.2 \quad \int \cos(2x - 1) dx$$

$$1.3 \quad \int \sec^2(x - 1) dx$$

$$1.4 \quad \int \csc^2(3x + 5) dx$$

$$1.5 \quad \int \sec(2x + 9) \tan(2x + 9) dx$$

$$1.6 \quad \int \csc(x - 2) \cot(x - 2) dx$$

$$1.7 \quad \int 3x^2 \sec x^3 \tan x^3 dx$$

$$1.8 \quad \int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1 - \sin 3x}} dx$$

$$1.9 \quad \int \sqrt{\tan 2x} \sec^2 2x dx$$

$$1.10 \quad \int \sec^{10} 2x \tan 2x dx$$

2. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad \int \frac{1}{x - 5} dx$$

$$2.2 \quad \int \frac{x}{x^2 - 5} dx$$

$$2.3 \quad \int \frac{4}{2x - 5} dx$$

$$2.4 \quad \int \frac{3x}{x^2 - 5} dx$$

$$2.5 \quad \int \frac{7}{x - 5} dx$$

$$2.6 \quad \int \frac{4x^3}{x^4 - 5} dx$$

$$2.7 \quad \int \frac{3}{6x + 7} dx$$

$$2.8 \quad \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 9} dx$$

3. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

$$3.1 \quad \int e^{2x-3} dx$$

$$3.2 \quad \int 3e^{-5x} dx$$

$$3.3 \quad \int e^{-2x} dx$$

$$3.4 \quad \int xe^{-5x^2+7} dx$$

$$3.5 \quad \int xe^{2x^2-3} dx$$

$$3.6 \quad \int e^{5x+100} dx$$

$$3.7 \quad \int 11^{2x-3} dx$$

$$3.8 \quad \int 3^{-5x} dx$$

$$3.9 \quad \int x100^{2x^2-3} dx$$

$$3.10 \quad \int 12^{5x+100} dx$$

4. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

4.1 $\int \sinh(2x - 1) dx$

4.2 $\int \cosh(2x - 1) dx$

4.3 $\int \operatorname{sech}^2(x - 1) dx$

4.4 $\int \operatorname{csch}^2(3x + 5) dx$

4.5 $\int 3x^2 \operatorname{sech} x^3 \tanh x^3 dx$

4.6 $\int \operatorname{sech}(2x + 9) \tanh(2x + 9) dx$

4.7 $\int \frac{\cosh 3x}{\sqrt{1 - \sinh 3x}} dx$

4.8 $\int \operatorname{csch}(x - 2) \coth(x - 2) dx$

4.9 $\int \sqrt{\tanh 2x} \sec^2 2x dx$

4.10 $\int \operatorname{sech}^{10} 2x \tanh 2x dx$

5. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

5.1 $\int \frac{1}{\sqrt{1 - (2x + 1)^2}} dx$

5.2 $\int \frac{x}{\sqrt{1 - (3x^2 - 1)^2}} dx$

5.3 $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{1 - (x^2 + 5x)^2}} dx$

5.4 $\int \frac{1}{\sqrt{1 + (7x + 1)^2}} dx$

5.5 $\int \frac{6x - 1}{\sqrt{1 + (3x^2 - x)^2}} dx$

5.6 $\int \frac{1}{\sqrt{1 + 16x^2}} dx$

5.7 $\int \frac{1}{x\sqrt{3x^2 - 1}} dx$

5.8 $\int \frac{1}{(3x + 7)\sqrt{(3x + 7)^2 - 1}} dx$

6. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

6.1 $\int_0^{\pi} \sin(2x - 1) dx$

6.2 $\int_{-1}^0 \sin(2x - 1) dx$

6.3 $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\tan 2x} \sec^2 2x dx$

6.4 $\int_0^3 \frac{1}{-6x + 2} dx$

6.5 $\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 9} dx$

6.6 $\int_{-1}^0 e^{3x} dx$

6.7 $\int_0^1 xe^{x^2} dx$

6.8 $\int_2^5 e^{3x-9} dx$

เอกสารอ้างอิง

คณาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร. (2558). **คณิตศาสตร์**

เบื้องต้น. พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยนเรศวร.

จันทนีย์ กาญจนะโรจน์ และชูลี โชติกประคัลภ์. (2557). **แคลคูลัส 1**. ปทุมธานี :

มหาวิทยาลัยกรุงเทพ.

ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ และคณะ (2561). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

ทศพร ค้ายอุดม และคณะ. (2558). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2**. กรุงเทพมหานคร :

มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ธีรศักดิ์ อูร์จนาพันธ์. (2555) **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร**. ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์.

วัลลภ เหมวงศ์. (2557). **แคลคูลัส 1**. อุตรธานี : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. (2554).

แคลคูลัส 2 มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

Edwin.J.H. and Gilbert.S. (2016). **Calculus Volume 1**. Texas : OpenStax Rice University.

Harold Jan R.T. (2015). **Calculus 2**. London : Lap Lambert Academic.

Sigurd A. (2010). **First Semester Calculus**. Minneapolis : University of Minnesota.

