

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1

ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขต

เนื้อหาประจำบท

1. ปฏิยานุพันธ์
2. คุณสมบัติของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
3. การหาปฏิยานุพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร
4. ปริพันธ์จำกัดเขต

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. อธิบายและให้ความหมายของปฏิยานุพันธ์และอนุพันธ์ได้
2. สามารถหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
3. บอกคุณสมบัติของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้
4. สามารถหาปฏิยานุพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร
5. บอกความหมายของปริพันธ์จำกัดเขตได้
6. สามารถหาปริพันธ์จำกัดเขตได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 ปฏิยานุพันธ์
 - 1.2 คุณสมบัติของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
 - 1.3 การหาปฏิยานุพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร
 - 1.4 ปริพันธ์จำกัดเขต
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
 - 2.1. ศึกษาข้อมูลจาก เกี่ยวกับเรื่องปฏิยานุพันธ์เพิ่มเติม
 - 2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation
3. ใบงาน

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. การตอบคำถาม
3. ทดสอบท้ายชั่วโมง
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 1

ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขต

ในการศึกษาแคลคูลัสนั้นโดยทั่ว ๆ ไปจะแบ่งเนื้อหาที่สำคัญ ๆ ออกเป็น 2 สาขา คือสาขาหนึ่งทำการเกี่ยวกับเรื่องการหาอนุพันธ์ ซึ่งได้ทำการศึกษามาแล้วในรายวิชาแคลคูลัส 1 ส่วนอีกสาขาหนึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องการหาปริพันธ์ สำหรับปริพันธ์นี้เมื่อใช้เกี่ยวข้องกับแคลคูลัสกล่าวโดยพื้นฐานคือ การแสดงจำนวนทั้งหมด หรือ ผลบวกของผลรวม แต่ถ้าเป็นความหมายในเชิงคณิตศาสตร์ทั่ว ๆ ไป คือ การหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง การหาปริมาตร การหาความยาวเส้นโค้ง การหาจุดศูนย์กลาง ตลอดจนการประยุกต์ในด้านอื่น ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น โดยทั่วไปแล้ว การศึกษาเกี่ยวกับการหาปริพันธ์จะต้องควบคู่ไปกับการหาอนุพันธ์ นั่นคือ การศึกษาในเรื่องอนุพันธ์นั้นจะเริ่มจากศึกษาการกำหนดฟังก์ชัน f แล้วให้หาอนุพันธ์ของ f คือ f' แต่สำหรับการศึกษาปฏิยานุพันธ์นั้นเราจะศึกษาปัญหาที่ตรงข้ามกับปัญหาที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว จะได้เมื่อกำหนดอนุพันธ์ฟังก์ชัน f' แล้วเราสามารถที่จะหาฟังก์ชัน f ได้

1.1 ปฏิยานุพันธ์

สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย (2563 : 85) และกวิยา เนาวประทีป (2555 : 113) ได้ให้บทนิยามที่สำคัญและเกี่ยวข้องกับการหาปริพันธ์เพื่อให้เข้าใจความหมายของ ฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วงใด ๆ และปฏิยานุพันธ์ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง I ถ้า สำหรับทุก ๆ $x \in I$ แล้วทำให้ $f(x)$ หาค่าได้

บทนิยาม 1.2

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง I ถ้ามีฟังก์ชัน F ซึ่ง $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ ทุก $x \in I$ แล้วจะเรียก F ว่า ปฏิยานุพันธ์ ของ f บน I

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างแสดงปฏิยานุพันธ์ ของฟังก์ชัน $f(x)$ ใด ๆ

ตัวอย่าง 1.1

x^2	เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x$	เพราะ $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$
$\frac{x^4}{4}$	เป็นปฏิยานุพันธ์ของ x^3	เพราะ $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{4} \right) = x^3$
$3x^3 - 1$	เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $9x^2$	เพราะ $\frac{d}{dx} (3x^3 - 1) = 9x^2$
$x^2 - 5$	เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x$	เพราะ $\frac{d}{dx} (x^2 - 5) = 2x$
$3x^3 + 5$	เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $9x^2$	เพราะ $\frac{d}{dx} (3x^3 + 5) = 9x^2$

จากตัวอย่าง 1.1 จะเห็นว่า x^2 และ $x^2 - 5$ ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x$ และ $3x^3 - 1$ กับ $3x^3 + 5$ ก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $9x^2$ ทั้งคู่ ดังนั้นแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันหนึ่งมีปฏิยานุพันธ์ได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน ซึ่งความจริงนี้เป็นจริงสำหรับฟังก์ชันถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ แล้ว $F(x) + c$ ก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ด้วย เมื่อ c เป็นตัวคงค่าใด ๆ ทั้งนี้เพราะว่า

$$\frac{d}{dx} [F(x) + c] = \frac{d}{dx} F(x) + \frac{d}{dx} c = f(x) + 0 = f(x)$$

โสภณพรณ ทิพย์โยธา และวีรศักดิ์ วาจาบัณฑิต (2559 : 121) ได้ให้ทฤษฎีบทที่แสดงให้เห็นว่าถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ บนช่วง I แล้วปฏิยานุพันธ์อื่น ๆ ของ $f(x)$ บน I จะอยู่ในรูป $F(x) + c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่าใด ๆ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1

ถ้า $F'(x) = G'(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in I$ แล้วจะมีตัวคงค่า c ซึ่ง $F(x) - G(x) = c$ ทุก ๆ $x \in I$ โดยที่ c เป็นตัวคงค่าใด ๆ

จากทฤษฎีบท 1.1 ทำให้เราสามารถกำหนดรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ได้เป็น $F(x) + c$ เมื่อ F เป็นปฏิยานุพันธ์บางตัวของ f และ c เป็นตัวคงค่าใด ๆ และจะเรียก $F(x) + c$ ว่าเป็นปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ f บน I โดยธีระศักดิ์ อรุณานนท์ (2564 : 368) และ วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ (2558 : 193) ได้ให้บทนิยามที่เกี่ยวข้องไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.3

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง I แล้วจะเรียกปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ f บน I ว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** ของ f แทนด้วย $\int f(x) dx$ หรือเขียนย่อ ๆ ด้วย $\int f$ นั่นคือ $\int f(x) dx = F(x) + c$

เครื่องหมาย $\int dx$ เรียกว่า **เครื่องหมายปริพันธ์เทียบกับ x**

วิธีการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตเรียกว่า **การหาปฏิยานุพันธ์** หรือ **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** ตัวคงค่า c ในปริพันธ์ไม่จำกัดเขต เรียกว่า **ตัวคงค่าของการหาปฏิยานุพันธ์** ฟังก์ชัน f หรือ $f(x)$ เรียกว่า **ปริพันธ์**

และเรียก x ว่า **ตัวแปรหุ่นของการหาปริพันธ์**

ตัวอย่าง 1.2

$$\begin{aligned} \int 4x^3 dx &= x^4 + c & \text{เนื่องจาก } \frac{d}{dx}(x^4 + c) &= 4x^3 \\ \int (x-1)^2 dx &= \frac{1}{3}(x-1)^3 + c & \text{เนื่องจาก } \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}(x-1)^3 + c\right) &= (x-1)^2 \end{aligned}$$

Harold Jan R.T. (2015 : 2) ได้ให้สูตรสำหรับหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตซึ่งสอดคล้องกับบทนิยาม และตัวอย่างที่ผ่านมามาดังต่อไปนี้

1. $\int k dx = kx + c$ เมื่อ k เป็นตัวคงค่าใด ๆ
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $n \neq -1$

ตัวอย่าง 1.3

$$\begin{aligned} \int 8 dx &= 8x + c \\ \int x^3 dx &= \frac{x^4}{4} + c \\ \int 5x^4 dx &= x^5 + c \end{aligned}$$

นอกจากสูตรอย่างง่ายในการหาปริพันธ์ที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้วซึ่งในการหาปริพันธ์บางฟังก์ชันนั้นสูตรอย่างง่ายก็ไม่เพียงพอที่จะหาปริพันธ์ได้ดังนั้นจึงต้องศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการหาปริพันธ์เพิ่มเติมในหัวข้อต่อไป

1.2 คุณสมบัติของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ (2557 : 146) และเบญจวรรณ โรจนดิษฐ์ (2556 : 283) ได้แสดงทฤษฎีบทที่สำคัญสำหรับการหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปแบบการคูณกับค่าคงที่ และการบวก ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีปฏิยานุพันธ์ จะได้ว่า

1. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ เมื่อ k เป็นตัวคงค่าใด ๆ
2. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

จากทฤษฎีบทดังกล่าวทำให้ได้ข้อสรุปโดยทั่วไปว่า ถ้า $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่มีปฏิยานุพันธ์ และ $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ เป็นตัวคงค่าใด ๆ แล้วจะได้ว่า

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)] dx = \int k_1 f_1(x) dx + \int k_2 f_2(x) dx + \dots + \int k_n f_n(x) dx$$

ตัวอย่าง 1.4 จงหาค่า $\int (x^2 + 3x - 1) dx$

วิธีทำ $\int (x^2 + 3x - 1) dx = \int x^2 dx + \int 3x dx - \int 1 dx$

$$= \int x^2 dx + 3 \int x dx - \int 1 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + c_1 \right] + \left[\frac{3x^2}{2} + c_2 \right] - [x + c_3]$$

โดยที่ c_1, c_2 และ c_3 เป็นตัวคงค่าใด ๆ และให้ $c = c_1 + c_2 + c_3$ ได้

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + c$$

ดังนั้น $\int (x^2 + 3x - 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + c$

จากตัวอย่าง 1.3 เราสามารถรวมตัวคงค่าทั้งสามค่าคือ c_1, c_2 , และ c_3 ให้ตัวคงค่าเพียงตัวเดียวคือ c เพียงตัวเดียวตั้งแต่นี้เป็นต้นไป c ที่ได้จากการหาปริพันธ์ หมายถึงตัวคงค่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.5 จงหาปฏิยานุพันธ์ของ $4x^3 - 2x + 5$

วิธีทำ ปฏิยานุพันธ์ของ $4x^3 - 2x + 5$ คือ $\int (4x^3 - 2x + 5) dx$

$$\begin{aligned}\int (4x^3 - 2x + 5) dx &= \int 4x^3 dx - \int 2x dx + \int 5 dx \\ &= 4 \int x^3 dx - 2 \int x dx + \int 5 dx \\ &= \frac{4x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c \\ &= x^4 - x^2 + 5x + c\end{aligned}$$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $4x^3 - 2x + 5$ คือ $x^4 - x^2 + 5x + c$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาเราใช้ทฤษฎีบท 1.1 และ 1.2 หาปริพันธ์ของฟังก์ชันได้สะดวกและรวดเร็วมากยิ่งขึ้นโดยไม่ต้องทำหลายขั้นตอน ดังนี้

ตัวอย่าง 1.6 จงหาปฏิยานุพันธ์ของ $x^3 - 2x - 1$

วิธีทำ $\int (x^3 - 2x - 1) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} - x + c$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $x^3 - 2x - 1$ คือ $\frac{x^4}{4} - x^2 - x + c$

ตัวอย่าง 1.7 จงหาค่า $\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}} dx$

วิธีทำ $\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^{1/2}} dx$

$$\begin{aligned}&= \int \left(\frac{3x^2}{x^{1/2}} - \frac{2x}{x^{1/2}} + \frac{1}{x^{1/2}} \right) dx \\ &= \int \left(3x^{3/2} - 2x^{1/2} + x^{-1/2} \right) dx \\ &= \frac{6x^{5/2}}{5} - \frac{4x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + c\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}} dx = \frac{6x^{5/2}}{5} - \frac{4x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + c$

ตัวอย่าง 1.8 จงหาค่า $\int \sqrt[3]{x} - x + 5 \, dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int (\sqrt[3]{x} - x + 5) \, dx &= \int (x^{1/3} - x + 5) \, dx \\ &= \int (x^{1/3} - x + 5) \, dx \\ &= \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^2}{2} + 5x + c \\ &= \frac{3x^{4/3}}{4} - \frac{x^2}{2} + 5x + c \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int \sqrt[3]{x} - x + 5 \, dx = \frac{3x^{4/3}}{4} - \frac{x^2}{2} + 5x + c$$

ตัวอย่าง 1.9 จงหาค่า $\int (3x - 1)^2 \, dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int (3x - 1)^2 \, dx &= \int (9x^2 - 6x + 1) \, dx \\ &= \int (9x^2 - 6x + 1) \, dx \\ &= \frac{9x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + x + c \\ &= 3x^3 - 3x^2 + x + c \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int (3x - 1)^2 \, dx = 3x^3 - 3x^2 + x + c$$

ตัวอย่าง 1.10 จงหาค่า $\int (x + 7)^3 \, dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int (x + 7)^3 \, dx &= \int (x^3 + 21x^2 + 147x + 343) \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{21x^3}{3} + \frac{147x^2}{2} + 343x + c \\ &= \frac{x^4}{4} + 7x^3 + \frac{147x^2}{2} + 343x + c \\ &= \frac{1}{4}x^4 + 7x^3 + \frac{147}{2}x^2 + 343x + c \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int (x + 7)^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4 + 7x^3 + \frac{147}{2}x^2 + 343x + c$$

1.3 การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร

จากตัวอย่างที่ผ่านมาพบว่าการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันกำลังสองนั้นทำได้ไม่ยาก เช่นการหาปริพันธ์ของ $\int (3x - 1)^2 dx$ แต่เนื่องจาก $(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$ สำหรับ $\int (3x - 1)^2 dx$ นั้นสามารถหา $\int (9x^2 - 6x + 1) dx$ แทนได้ แต่ถ้าเลขยกกำลังมากกว่าสอง รวมทั้งกรณีที่เลขชี้กำลังไม่เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือเราไม่สามารถกระจายได้ ดังนั้นฟังก์ชันที่เราต้องการหาปริพันธ์นั้นอยู่ในรูปแบบดังกล่าว จึงต้องอาศัยทฤษฎีบทที่ เพื่อองฟ้า ศรีจันทร์พงศ์ และคณะ (2553 : 133-134) ได้แสดงไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3

ให้ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง I และให้ $f(u)$ เป็นฟังก์ชันที่มี $F(u)$ เป็นปฏิยานุพันธ์บนช่วง I จะได้

$$\int f[g(x)] g'(x) dx = F[g(x)] + c$$

หรือ $\int f(u) du = F(u) + c$ โดยที่ c เป็นตัวคงค่าใด ๆ

ตัวอย่าง 1.11 จงแสดงว่า $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

เมื่อ n เป็นจำนวนจริงที่ $n \neq -1$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } \frac{d}{dx} \left[\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \right] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} \right] + \frac{d}{dx} c \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{d}{dx} [f(x)]^{n+1} + 0 \\ &= \frac{1}{n+1} \left[(n+1) [f(x)]^n \frac{d}{dx} f(x) \right] \\ &= [f(x)]^n f'(x) \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

จากตัวอย่าง 1.11 ถ้าให้ $u = f(x)$ จะได้ $du = f'(x) dx$ ดังนั้น

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

จึงทำให้ได้สูตรสำหรับการหาปริพันธ์ฟังก์ชันยกกำลัง คือ

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนจริงที่ } n \neq -1 \text{ และ } c \text{ เป็นตัวคงค่าใด ๆ}$$

ตัวอย่าง 1.12 จงหาค่า $\int (3x - 1)^{20} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x - 1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x - 1)$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

หรือ $dx = \frac{du}{3}$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \int (3x - 1)^{20} dx &= \int u^{20} \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{20} du \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{u^{21}}{21} \right) + c \\ &= \frac{u^{21}}{63} + c \\ &= \frac{(3x - 1)^{21}}{63} + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int (3x - 1)^{20} dx = \frac{(3x - 1)^{21}}{63} + c$

ตัวอย่าง 1.13 จงหาค่า $\int \sqrt{3x - 1} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x - 1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x - 1)$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

หรือ $dx = \frac{du}{3}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int \sqrt{3x - 1} dx &= \int \sqrt{u} \frac{du}{3} \\ &= \int u^{1/2} \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{9} u^{3/2} + c \\
&= \frac{2}{9} (3x-1)^{3/2} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \sqrt{3x-1} \, dx = \frac{2}{9} (3x-1)^{3/2} + c$

ตัวอย่าง 1.14 จงหาค่า $\int x^2 \sqrt{5x^3+1} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 5x^3 + 1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} (5x^3 + 1)$$

$$\frac{du}{dx} = 15x^2$$

หรือ $dx = \frac{du}{15x^2}$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \int x^2 \sqrt{5x^3+1} \, dx &= \int x^2 \sqrt{u} \frac{du}{15x^2} \\
&= \int x^2 u^{1/2} \frac{du}{15x^2} \\
&= \int u^{1/2} \frac{du}{15} \\
&= \frac{1}{15} \int u^{1/2} \, du \\
&= \frac{1}{15} \left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2} + 1} \right] + c \\
&= \frac{2}{45} u^{3/2} + c \\
&= \frac{2}{45} (5x^3 + 1)^{3/2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int x^2 \sqrt{5x^3+1} \, dx = \frac{2}{45} (5x^3 + 1)^{3/2}$

ตัวอย่าง 1.15 จงหาค่า $\int x(5x^2 + 1)^{31} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 5x^2 + 1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^2 + 1)$$

$$\frac{du}{dx} = 10x$$

หรือ $dx = \frac{du}{10x}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int x(5x^2 + 1)^{31} dx &= \int xu^{31} \frac{du}{10x} \\ &= \int u^{31} \frac{du}{10} \\ &= \frac{1}{10} \int u^{31} du \\ &= \frac{1}{10} \left(\frac{u^{32}}{32} \right) + c \\ &= \frac{u^{32}}{320} + c \\ &= \frac{(5x^2 + 1)^{32}}{320} + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int x(5x^2 + 1)^{31} dx = \frac{(5x^2 + 1)^{32}}{320} + c$

ตัวอย่าง 1.16 จงหาค่า $\int (x+1)\sqrt{3x^2 + 6x - 9} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x^2 + 6x - 9$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^2 + 6x - 9)$$

$$\frac{du}{dx} = 6x + 6$$

หรือ $dx = \frac{du}{6x + 6}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int (x+1)\sqrt{3x^2 + 6x - 9} dx &= \int (x+1)\sqrt{u} \frac{du}{6x + 6} \\ &= \int (x+1)\sqrt{u} \frac{du}{6(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{u} \frac{du}{6} \\
&= \frac{1}{6} \int \sqrt{u} \, du \\
&= \frac{1}{6} \int u^{1/2} \, du \\
&= \frac{1}{6} \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c \\
&= \frac{2}{18} u^{3/2} + c \\
&= \frac{1}{9} (3x^2 + 6x - 9)^{3/2} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int (x+1)\sqrt{3x^2+6x-9} \, dx = \frac{1}{9}(3x^2+6x-9)^{3/2} + c$

ตัวอย่าง 1.17 จงหาค่า $\int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^5} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^4 - x^2 + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4 - x^2 + 1) \\
\frac{du}{dx} &= 4x^3 - 2x
\end{aligned}$$

หรือ $dx = \frac{du}{(4x^3 - 2x)}$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^5} \, dx &= \int \frac{2x^3 - x}{u^5} \, dx \\
&= \int \frac{2x^3 - x}{u^5} \frac{du}{(4x^3 - 2x)} \\
&= \int \frac{2x^3 - x}{u^5} \frac{du}{2(2x^3 - x)} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^5} \, du \\
&= \frac{1}{2} \int u^{-5} \, du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{-4}}{-4} \right) + c \\
&= -\frac{1}{8} u^{-4} + c \\
&= -\frac{1}{8} (x^4 - x^2 + 1)^{-4} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^5} dx = -\frac{1}{8} (x^4 - x^2 + 1)^{-4} + c$

สำหรับเทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรที่ผ่านมานั้นถ้าเราเริ่มมีความเข้าใจมากขึ้นแล้วเราสามารถใช้วิธีการดังตัวอย่างที่จะกล่าวต่อไปนี้ได้เพราะจะทำให้การแสดงวิธีทำนั้นสะดวกและรวดเร็วมากยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง 1.18 จงหาค่า $\int (3x + 5)^{99} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x + 5$

จะได้ $du = 3dx$

นั่นคือ $\int (3x + 5)^{99} dx = \int u^{99} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int u^{99} \frac{3dx}{3} \\
&= \int u^{99} \frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{3} \int u^{99} du \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{u^{100}}{100} \right) + c \\
&= \frac{(3x + 5)^{100}}{300} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int (3x + 5)^{99} dx = \frac{(3x + 5)^{100}}{300} + c$

ตัวอย่าง 1.19 จงหาค่า $\int \sqrt{4x + 7} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 4x + 7$

$du = 4dx$

จะได้ $\int \sqrt{4x + 7} dx = \int \sqrt{u} \frac{4dx}{4}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int \sqrt{u} \, du \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right) + c \\
&= \frac{1}{6} (4x + 7)^{3/2} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \sqrt{4x + 7} \, dx = \frac{1}{6} (4x + 7)^{3/2} + c$

ตัวอย่าง 1.20 จงหาค่า $\int x^3 \sqrt{x^4 - 12} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^4 - 12$

$$du = 4x^3 dx$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \int x^3 \sqrt{x^4 - 12} \, dx &= \int x^3 \sqrt{u} \frac{4x^3 dx}{4x^3} \\
&= \frac{1}{4} \int u^{1/2} \, du \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right) + c \\
&= \frac{1}{6} u^{3/2} + c \\
&= \frac{1}{6} (x^4 - 12)^{3/2} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int x^3 \sqrt{x^4 - 12} \, dx = \frac{1}{6} (x^4 - 12)^{3/2} + c$

ตัวอย่าง 1.21 จงหาค่า $\int 30x^2 (5x^3 + 1)^3 \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 5x^3 + 1$

$$du = 15x^2 dx$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \int 30x^2 (5x^3 + 1)^3 \, dx &= \int 30x^2 u^3 \frac{15x^2 dx}{15x^2} \\
&= 2 \int u^3 \, du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2u^4}{4} + c \\
&= \frac{(5x^3 + 1)^4}{2} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int 30x^2 (5x^3 + 1)^3 dx = \frac{(5x^3 + 1)^4}{2} + c$

ตัวอย่าง 1.22 จงหาค่า $\int (2x + 1)\sqrt{3x^2 + 3x - 17} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x^2 + 3x - 17$

$$du = (6x + 3)dx$$

จะได้
$$\begin{aligned}
\int (2x + 1)\sqrt{3x^2 + 3x - 17} dx &= \int (2x + 1)\sqrt{u} \frac{(6x + 3)dx}{6x + 3} \\
&= \int (2x + 1)\sqrt{u} \frac{(6x + 3)dx}{3(2x + 1)} \\
&= \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du \\
&= \frac{1}{3} \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} du \\
&= \frac{2}{9} (3x^2 + 3x - 17)^{3/2} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int (2x + 1)\sqrt{3x^2 + 3x - 17} dx = \frac{2}{9} (3x^2 + 3x - 17)^{3/2} + c$

ตัวอย่าง 1.23 จงหาค่า $\int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^5} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^4 - x^2 + 1$

$$du = (4x^3 - 2x)dx$$

จะได้
$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^5} dx &= \int \frac{2x^3 - x}{u^5} \frac{(4x^3 - 2x)dx}{4x^3 - 2x} \\
&= \int \frac{2x^3 - x}{u^5} \frac{du}{(4x^3 - 2x)} \\
&= \int \frac{2x^3 - x}{u^5} \frac{du}{2(2x^3 - x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^5} du \\
&= \frac{1}{2} \int u^{-5} du \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{-4}}{-4} \right) + c \\
&= -\frac{1}{8} (x^4 - x^2 + 1)^{-4} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^5} dx = -\frac{1}{8} (x^4 - x^2 + 1)^{-4} + c$

1.4 ปริพันธ์จำกัดเขต

Ross, F.L. Maurice, W.D. and Frank, G.R. 2001 : 231) ได้แสดงตัวอักษรกรีก Σ อ่านว่า “ซิกมา” โดยใช้สำหรับระบุมการบวกซ้ำ ๆ ซึ่งสัญลักษณ์ดังกล่าวนี้มีความสำคัญอย่างมากในการศึกษาปริพันธ์จำกัดเขต

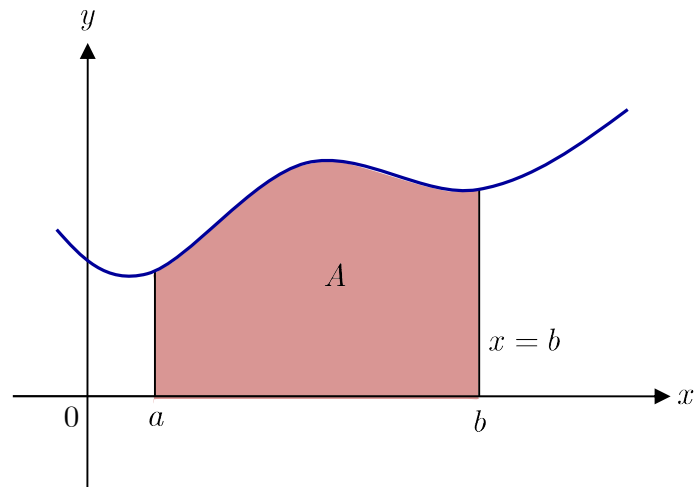
ตัวอย่าง 1.24

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\
\sum_{i=1}^{100} i &= 1 + 2 + 3 + \dots + 100 \\
\sum_{i=2}^5 2i + 1 &= 5 + 7 + 9 + 11
\end{aligned}$$

ในกรณีทั่ว ๆ ไปเมื่อกำหนดฟังก์ชัน f ที่นิยามบนเซตของจำนวนเต็ม และกำหนดจำนวนเต็ม k และ $n \geq k$ แทนด้วย

$$\sum_{i=k}^n f(i) = f(k) + f(k+1) + \dots + f(n)$$

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x บนช่วงปิด $[a, b]$ กราฟของ f เป็นเส้นโค้งอยู่เหนือแกน x การหาพื้นที่ซึ่งอยู่ใต้เส้นโค้งเหนือแกน x และอยู่ระหว่างเส้น $x = a$ และ $x = b$ ในหัวข้อนี้เราจะพัฒนาวิธีการสำหรับหาพื้นที่ดังกล่าว



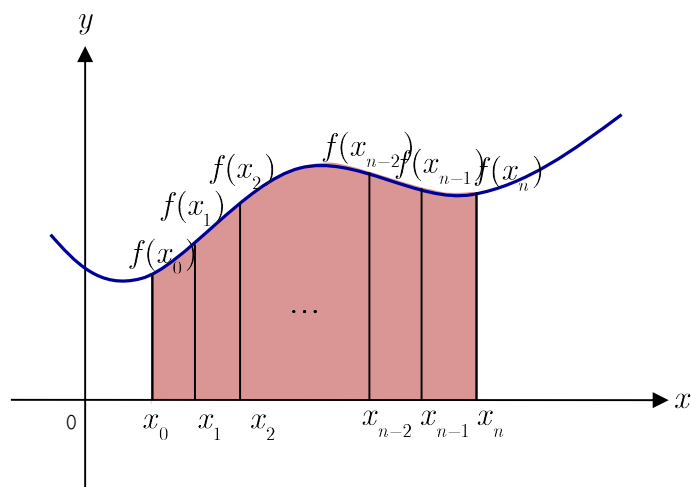
ภาพประกอบ 1.1 แสดงพื้นที่ A บนช่วงปิด $[a, b]$

Edwin.J.H. and Gilbert.S. (2016 : 519-521) และ เลิศ สิทธิโกศล (2541 : 141-142) ได้แสดงวิธีการหาพื้นที่ A บนช่วงปิด $[a, b]$ ไว้ดังนี้ ให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ส่วนที่เท่ากัน โดยมีจุดแบ่งคือ $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ โดยที่

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

ดังนั้นแต่ละช่วงจะต้องยาว $\frac{b-a}{n} = \Delta x_i$ ในแต่ละช่วง $[x_i, x_{i+1}]$ ให้ $f(x_i)$ เป็นค่าของฟังก์ชัน f ณ จุด x_i และให้ S_n แทนผลบวกที่กำหนดดังนี้

$$S_n = f(x_1)[x_1 - x_0] + f(x_2)[x_2 - x_1] + \dots + f(x_n)[x_n - x_{n-1}]$$



ภาพประกอบ 1.2 แสดงการหา S_n ช่วง $[a, b]$

Veselin. J. and Jamie. M. (2018 : 4) และ โสภภาพรรณ ทิพย์โยธา และวีรศักดิ์ วาจา
บัณฑิตย์ (2559 : 198) ได้ให้บทนิยามของปริพันธ์จำกัดเขตไว้ดังนี้

บทนิยาม 1.4

กำหนดให้ a และ b เป็นตัวคงค่าใด ๆ โดยที่ $a = x_0$ และ $x_n = b$

ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f จาก a ถึง b หาค่าได้เมื่อ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)[x_1 - x_0] + f(x_2)[x_2 - x_1] + \cdots + f(x_n)[x_n - x_{n-1}]]$$

หาค่าได้จะใช้สัญลักษณ์ $\int_a^b f(x) dx$ เรียก a ว่าค่าลิมิตล่าง และเรียก b ว่าค่าลิมิตบน

นั่นคือ $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ เมื่อ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ สำหรับ

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

วัลลภ เหมวงษ์ (2557 : 175) และประภาศรี อัครกุล (2555 : 5) ได้แสดงทฤษฎีบทสำหรับการหาปริพันธ์จำกัดเขต เนื่องจากในการหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้บทนิยามนั้นจะมีมากมายหลายขั้นตอน ซึ่งทำให้ไม่สะดวกและเสียเวลาในการหา

ทฤษฎีบท 1.4

ถ้า $\int f(x) dx = F(x) + c$ (หมายถึง $F(x) + c$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$)

แล้ว ปริพันธ์จำกัดเขตของ $f(x)$ จาก a ถึง b ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x) dx$

มีค่าเท่ากับ $F(x) \Big|_a^b$ หรือ $F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$

จาก $\int f(x) dx = F(x) + c$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= [F(x) + c] \Big|_a^b \\ &= [F(b) + c] - [F(a) + c] \\ &= F(b) + c - F(a) - c \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ เนื่องจากตัวคงค่า c ลบกันไปหมดจึงไม่จำเป็นต้องบวกเข้าไปในการหาปริพันธ์จำกัดเขต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.25 จงหาค่า $\int_1^3 2x dx$

วิธีทำ $2x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[1, 3]$

$$\begin{aligned}\text{ได้} \quad \int_1^3 2x dx &= \left[\frac{2x^2}{2} \right]_1^3 \\ &= [x^2]_1^3 \\ &= 3^2 - 1^2 \\ &= 9 - 1 \\ &= 8\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int_1^3 2x dx = 8$$

ตัวอย่าง 1.24 จงหาค่า $\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 1) dx$

วิธีทำ $x^2 - 3x + 1$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 2]$

$$\begin{aligned}\text{ได้} \quad \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 1) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right]_{-1}^2 \\ &= \left[\frac{2^3}{3} - \frac{3(2)^2}{2} + 2 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{3(-1)^2}{2} + (-1) \right] \\ &= \left[\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 2 \right] - \left[-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 1 \right] \\ &= \frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 2 + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 \\ &= \frac{9}{3} - \frac{9}{2} + 3 \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 1) dx = \frac{3}{2}$$

ตัวอย่าง 1.25 จงหาค่า $\int_0^2 (3x-1)^{20} dx$

วิธีทำ $(3x-1)^{20}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, 2]$

$$\text{จาก } \int (3x-1)^{20} dx = \frac{(3x-1)^{21}}{63} + c$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \int_0^2 (3x-1)^{20} dx &= \left[\frac{(3x-1)^{21}}{63} \right]_0^2 \\ &= \left[\frac{(3(2)-1)^{21}}{63} \right] - \left[\frac{(3(0)-1)^{21}}{63} \right] \\ &= \frac{5^{21}}{63} - \frac{(-1)}{63} \\ &= \frac{5^{21} + 1}{63} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \int_0^2 (3x-1)^{20} dx = \frac{5^{21} + 1}{63}$$

ตัวอย่าง 1.26 จงหาค่า $\int_0^1 x^2 \sqrt{5x^3+1} dx$

วิธีทำ $x^2 \sqrt{5x^3+1}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, 1]$

$$\text{จากตัวอย่าง 1.14 } \int x^2 \sqrt{5x^3+1} dx = \frac{2}{45} (5x^3+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int_0^1 x^2 \sqrt{5x^3+1} dx &= \left[\frac{2}{45} (5x^3+1)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{2}{45} (5(1^3)+1)^{3/2} \right] - \left[\frac{2}{45} (5(0)^3+1)^{3/2} \right] \\ &= \frac{2}{45} (6^{3/2}) - \frac{2}{45} (1^{3/2}) \\ &= \frac{2}{45} [(6^{3/2}) - 1] \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \int_0^1 x^2 \sqrt{5x^3+1} dx = \frac{2}{45} [(6^{3/2}) - 1]$$

1.5 สรุปท้ายบท

การหาปริพันธ์ในบทนี้นั้นเป็นเพียงการใช้คุณสมบัติพื้นฐานเพียง 4 ข้อดังนี้

$$\int k \, dx = kx + c \text{ เมื่อ } k \text{ เป็นตัวคงค่าใด ๆ}$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง } n \neq -1$$

$$\int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx \text{ เมื่อ } k \text{ เป็นตัวคงค่าใด ๆ}$$

$$\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

ในบทนี้ยังเป็นการหาปริพันธ์โดยเทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรแบบง่าย ๆ เพราะถ้าใช้เพียงคุณสมบัติพื้นฐานทั้ง 4 ข้อที่ได้กล่าวมาแล้วไม่สามารถหาปริพันธ์ได้ และในหัวข้อสุดท้ายจะเป็นการหา

ปริพันธ์จำกัดเขตจาก $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$ จะใช้สูตรนี้ได้นั้นฟังก์ชัน $f(x)$ ต้องต่อเนื่องบน

ช่วง $[a, b]$ เสมอ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. จงแสดงว่า $x^2 + 1$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x$
2. จงแสดงว่า $3x^5 + 7x^2 - 1$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $15x^4 + 14x$
3. จงแสดงว่า $x^{10} + x^6 - x^4 - 3x + 2$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $10x^9 + 6x^5 - 4x^3 - 3$
4. จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

4.1 $\int (x^2 + 3x - 1) dx$

4.2 $\int (2x - 1) dx$

4.3 $\int (x^2\sqrt{x} + 2x) dx$

4.4 $\int (\sqrt{x} + 2x^{20}) dx$

4.5 $\int \frac{\sqrt{x} + 2x^{20} + 5}{x^2} dx$

4.6 $\int \frac{x\sqrt{x} + 2x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

4.7 $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} - 9}{x} dx$

4.8 $\int \frac{x\sqrt{x^3} + 2\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} dx$

4.9 $\int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{x^9} dx$

4.10 $\int \frac{\sqrt{x} + 2x^{14} + 5x - 6}{x^{11}} dx$

5. จงใช้เทคนิคเปลี่ยนตัวแปรเพื่อหาปริพันธ์ต่อไปนี้

5.1 $\int (x + 2)^{77} dx$

5.2 $\int (4x - 100)^3 dx$

5.3 $\int \sqrt{6x + 7} dx$

5.4 $\int \sqrt[3]{(2x + 7)^8} dx$

5.5 $\int (2 + 3x)^{2/3} dx$

5.6 $\int (\sqrt{x} + 2x)^2 dx$

5.7 $\int \frac{dx}{(3x - 2)^2}$

5.8 $\int (x\sqrt{5x^2 - 3}) dx$

5.9 $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx$

5.10 $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$

6. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

6.1 $\int (3x + 2)^2 dx$

6.2 $\int x^2 - 4 dx$

6.3 $\int \frac{x^2 + 7x - 9}{\sqrt[3]{x}} dx$

6.4 $\int \frac{(x + 2)^2}{x} dx$

$$6.5 \int 15x(2 + 3x^5)^{2/3} dx$$

$$6.6 \int x(\sqrt{x} + x)^2 dx$$

$$6.7 \int \frac{3x}{(3x^2 - 2)^2} dx$$

$$6.8. \int (x^2 + 1)\sqrt{x^3 + 3x - 33} dx$$

$$6.9 \int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2 + 4x - 99}} dx$$

$$6.10. \int \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x^4 - 4x + 21}} dx$$

7. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$7.1 \int_0^2 (x^2 + 3x - 1) dx$$

$$7.2 \int_{-1}^2 (3x^2 - 1) dx$$

$$7.3 \int_0^2 (x^2\sqrt{x} + 2x^2) dx$$

$$7.4 \int_1^2 (\sqrt{x} + 2x^{20}) dx$$

$$7.5 \int_2^5 (3x + 2)^2 dx$$

$$7.6 \int_0^2 x(x^2 + 2x)^{20} dx$$

$$7.7 \int_2^3 \frac{x^2 + 7x - 9}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$7.8 \int_1^2 \frac{(x+2)^2}{x} dx$$

$$7.9 \int_0^5 15x(2 + 3x^5)^{2/3} dx$$

$$7.10 \int_3^5 x^2\sqrt{x} + 2x^2) dx$$

เอกสารอ้างอิง

- กวิยา เนาวประทีป. (2555). **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ แคลคูลัสเบื้องต้น**. กรุงเทพมหานคร : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.
- ธีระศักดิ์ อัจฉนนนท์. (2564). **แคลคูลัส 1**. ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์.
- เบญจวรรณ โรจนดิษฐ์. (2556). **แคลคูลัส1**. นครราชสีมา : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- ประภาศรี อัสวกุล. (2555). **แคลคูลัสสำหรับวิทยาศาสตร์สุขภาพ**. นครราชสีมา : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- เฟื่องฟ้า ศรีจันทร์พงศ์ และคณะ. (2553). **แคลคูลัส 1**. พิมพ์ครั้งที่ 5. ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- วัลลภ เหมวงษ์. (2557). **แคลคูลัส 1**. อุตรธานี : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรธานี
- วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. (2558). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : ปลาทอง ก๊อปปี้ ปรีนท์.
- สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย. (2563). **คณิตศาสตร์**. กรุงเทพมหานคร : แม็คเ็ดดูเคชั่น.
- สุรวิทย์ ต้นแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ. (2557). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- โสภาพรรณ ทิพย์โยธา และวีรศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์. (2559). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- Edwin.J.H. and Gilbert.S. (2016). **Calculus Volume 1**. Texas : OpenStax Rice University.
- Harold Jan R.T. (2015). **Calculus 2**. London : Lap Lambert Academic.
- Ross, F.L. Maurice,W.D. and Frank, G.R. (2001). **Calculus with analytic geometry**. New Yok : Addison-wesley.
- Veselin. J. and Jamie. M. (2018). **Calculus II**. Canada : Department of Mathematics Simon Fraser University

