

คำนำ

เอกสารคำสอนนี้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการสอนรายวิชาแคลคูลัส 2 รหัสวิชา 4091102 ซึ่งเป็นวิชาในหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากเอกสารคำสอนนี้มีส่วนสำคัญที่จะช่วยให้นักศึกษาได้ฝึกฝนทบทวนเนื้อหา และทดลองทำแบบฝึกหัดในลักษณะต่าง ๆ เพื่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจในทฤษฎีบทอย่างถ่องแท้ อันจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการเรียนการสอนและการทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพในอนาคต

แคลคูลัส 2 เป็นรายวิชาที่เน้นการศึกษาเรื่องราวของอนุพันธ์และปริพันธ์ รวมถึงลำดับและอนุกรมของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นหลักการสำคัญในการพัฒนาทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ รายวิชานี้จะเป็นตัวกลางในการพัฒนาทักษะคณิตศาสตร์ให้สูงขึ้นอีกขั้นหนึ่ง และเป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาหลายสาขาวิชาทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี รวมทั้งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในหลายสาขาวิชา เช่น วิทยาศาสตร์ คอมพิวเตอร์ ฟิสิกส์ ทางเศรษฐศาสตร์ การเงิน เป็นต้น เอกสารคำสอนนี้ได้บรรจุเนื้อหาออกเป็น 8 บท ประกอบด้วย ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขต ปริพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย การหาปริพันธ์ด้วยวิธีแยกเศษส่วนย่อย การหาปริพันธ์ที่ละส่วนและปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ปริพันธ์สองชั้น การประยุกต์ปริพันธ์จำกัดเขต ลำดับและอนุกรม อนุกรมและการลู่เข้า โดยในเนื้อหาแต่ละบทมีแบบฝึกหัดท้ายบทของแต่ละบท เพราะมีความสำคัญในการทำความเข้าใจในเนื้อหาที่ได้เรียนในแต่ละหัวข้อ และเป็นการตรวจสอบความเข้าใจในหัวข้อต่าง ๆ ในบทนั้น ๆ ซึ่งมีความหลากหลายทั้งยากและง่าย เพื่อพัฒนาความคิดและเป็นพื้นฐานที่ดีในการเรียนคณิตศาสตร์ต่อไป

ผู้เขียนขอขอบพระคุณท่านผู้แต่งและเรียบเรียงโดยผู้ทรงคุณวุฒิหลายท่านดังที่ปรากฏอยู่ในบรรณานุกรมเป็นอย่างสูง และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารคำสอนรายวิชาแคลคูลัส 2 เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนของนักศึกษา และผู้สนใจทั่วไป

วชิราภักษ์ โอธรรมย์

กันยายน 2564

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	(1)
สารบัญ	(3)
สารบัญรูปภาพ	(7)
แผนบริหารการสอน	1
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1	11
บทที่ 1 ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขต	13
1.1 ปฏิยานุพันธ์	13
1.2 คุณสมบัติของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	16
1.3 การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร	18
1.4 ปริพันธ์จำกัดเขต	27
1.5 สรุปท้ายบท	32
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1	33
เอกสารอ้างอิง	35
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2	37
บทที่ 2 ปริพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย	39
2.1 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	39
2.2 ปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันชี้กำลัง	45
2.3 ปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	50
2.4 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน	55
2.5 สรุปท้ายบท	58
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	61
เอกสารอ้างอิง	63
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3	65
บทที่ 3 การหาปริพันธ์ด้วยวิธีแยกเศษส่วนย่อย	67

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง	หน้า
3.1 การแยกเศษส่วนย่อย	67
3.2 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้	69
3.3 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้	85
3.4 สรุปท้ายบท	91
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3	93
เอกสารอ้างอิง	95
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4	97
บทที่ 4 การหาปริพันธ์ที่ละส่วน และปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	99
4.1 การหาปริพันธ์ที่ละส่วน	99
4.2 การหาปริพันธ์ที่ละส่วนซ้ำ	104
4.3 ลิ้มิตของปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์	111
4.4 ตัวถูกปริพันธ์เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง	117
4.5 สรุปท้ายบท	123
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4	125
เอกสารอ้างอิง	127
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5	129
บทที่ 5 ปริพันธ์สองชั้น	131
5.1 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	131
5.2 สมบัติของปริพันธ์สองชั้น	137
5.3 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนทั่วไป	140
5.4 สรุปท้ายบท	148
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5	149
เอกสารอ้างอิง	151

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง	หน้า
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6	153
บทที่ 6 การประยุกต์ปริพันธ์จำกัดเขต	155
6.1 พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งระหว่างแกน X หรือ Y	155
6.2 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง	162
6.3 ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน	169
6.4 สรุปท้ายบท	178
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6	179
เอกสารอ้างอิง	181
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7	183
บทที่ 7 ลำดับและอนุกรม	185
7.1 ลำดับ	185
7.2 การลู่เข้าของลำดับ	188
7.3 อนุกรม	192
7.4 อนุกรมเรขาคณิต และอนุกรมฮาร์มอนิก	197
7.5 สรุปท้ายบท	205
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7	207
เอกสารอ้างอิง	209
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 8	211
บทที่ 8 อนุกรมและการลู่เข้า	213
8.1 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม	213
8.2 อนุกรมสลับ	220
8.3 อนุกรมกำลัง	226
8.4 อนุกรมเทย์เลอร์	233

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง	หน้า
8.5 สรุปท้ายบท	238
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8	241
เอกสารอ้างอิง	243
บรรณานุกรม	245

สารบัญรูปภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
ภาพประกอบ 1.1 แสดงพื้นที่ A บนช่วงปิด $[a, b]$	28
ภาพประกอบ 1.2 แสดงการหา S_n ช่วง $[a, b]$	28
ภาพประกอบ 4.1 แสดง $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$	118
ภาพประกอบ 4.2 แสดง $\int_a^b f(x) dx$	120
ภาพประกอบ 5.1 กราฟแสดงพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก D_{ij}	132
ภาพประกอบ 5.2 กราฟแสดงโดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปร	140
ภาพประกอบ 5.3 กราฟแสดงบริเวณ $S = [h_1(y), h_2(y)] \times [c, d]$	144
ภาพประกอบ 5.4 กราฟแสดงบริเวณ $S = [a, b] \times [g_1(x), g_2(x)]$	144
ภาพประกอบ 6.1 แสดงพื้นที่บนช่วงปิด $[a, b]$ เส้นโค้ง $y = f(x) \geq 0$	155
ภาพประกอบ 6.2 แสดงพื้นที่บนช่วงปิด $[a, b]$ เส้นโค้ง $y = f(x) \leq 0$	156
ภาพประกอบ 6.3 แสดงพื้นที่บนช่วงปิด $[c, d]$ เส้นโค้ง $y = f(x) \leq 0$	156
ภาพประกอบ 6.4 แสดงพื้นที่บนช่วงปิด $[c, d]$ เส้นโค้ง $x = g(y) \leq 0$	157
ภาพประกอบ 6.5 แสดงพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้งบนช่วง $[a, b]$	163
ภาพประกอบ 6.6 แสดงพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้งบนช่วง $[c, d]$	163
ภาพประกอบ 6.7 แสดงรูปทรงกระบอกและกรวยกลมที่เกิดจากการหมุน	169
ภาพประกอบ 6.8 แสดงการหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของพื้นที่ R รอบแกน X	170
ภาพประกอบ 6.9 แสดงการหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของพื้นที่ R รอบแกน Y	171

