

คำนำ

ตำราเล่มนี้ เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนในรายวิชาทฤษฎีจำนวน หลักสูตร วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ และเพื่อให้ผู้ที่สนใจทั่วไปสามารถนำไปใช้ประกอบการศึกษาค้นคว้าได้ โดยมีจุดประสงค์หลักเพื่อให้ผู้อ่านเกิดความรู้ ความเข้าใจในวิชาทฤษฎีจำนวน ทั้งในมิติของทฤษฎีบทและการประยุกต์ใช้ ในการนำเสนอเนื้อหาแต่ละเรื่อง ผู้เขียนได้สอดแทรกแนวคิดพื้นฐานเพื่อนำไปสู่บทนิยาม ทำให้ผู้อ่านสามารถเชื่อมโยงองค์ความรู้สู่การใช้งานจริงได้อย่างเป็นระบบ

เนื้อหาภายในตำราแบ่งออกเป็น 9 บท ประกอบด้วย ความรู้เบื้องต้นของทฤษฎีจำนวน การหารลงตัว จำนวนเฉพาะ สมภาค ฟังก์ชันในทฤษฎีจำนวน ทฤษฎีสมภาค สมการไดโอแฟนไทน์ รากปฐมฐาน และดัชนี และส่วนตกค้างกำลังสอง โดยผู้เขียนได้นำองค์ความรู้จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้องสอดแทรกเข้าไปในเนื้อหาบางส่วนเพื่อให้มีความทันสมัยยิ่งขึ้น นอกจากนี้ ตำราเล่มนี้ยังได้นำเสนอตัวอย่างการประยุกต์ใช้ วูลแฟรมแอลฟา (Wolfram Alpha) ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์ประมวลผลความรู้ผ่านระบบอินเทอร์เน็ต ผ่านเว็บไซต์ www.wolframalpha.com สำหรับแก้ปัญหาบางปัญหาในทฤษฎีจำนวน โดยมีวัตถุประสงค์สำคัญเพื่อให้ผู้เรียนใช้เป็นเครื่องมือในการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ และช่วยสังเกตความสัมพันธ์ของตัวเลข ในกรณีที่โจทย์มีความซับซ้อนหรือมีค่ามากเกินไปจะคำนวณด้วยมือได้โดยง่าย ทั้งนี้เพื่อให้ผู้เรียนสามารถมุ่งเน้นไปที่กระบวนการคิดวิเคราะห์และความเข้าใจในเนื้อหาทฤษฎีได้อย่างเต็มที่ มิใช่เพื่อทดแทนการแสดงวิธีทำหรือการพิสูจน์ตามขั้นตอนของทฤษฎีจำนวนแต่อย่างใด ในส่วนท้ายของแต่ละบท ได้จัดทำแบบฝึกหัดที่มีความหลากหลายตั้งแต่ระดับพื้นฐานไปจนถึงระดับสูง เพื่อให้ผู้เรียนได้ตรวจสอบความเข้าใจ พัฒนาทักษะกระบวนการคิด และใช้เป็นเครื่องมือในการทบทวนเนื้อหา ซึ่งจะนี้เป็นพื้นฐานที่มั่นคงในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป

ผู้เขียนขอขอบพระคุณครูอาจารย์ นักวิชาการ และผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ปรากฏรายนามในบรรณานุกรม รวมถึงผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการให้คำแนะนำอันเป็นประโยชน์ ทำให้ตำราเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า ตำราเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนวิชาทฤษฎีจำนวนและรายวิชาที่เกี่ยวข้อง ตลอดจนเป็นรากฐานสำคัญในการศึกษาต่อและการวิจัยทางคณิตศาสตร์สืบไป

วชิรารักษ์ โอธรรมย์

มกราคม 2566

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	(1)
สารบัญ	(3)
สารบัญรูปภาพ	(7)
สารบัญตาราง	(11)
บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นของทฤษฎีจำนวน	1
1.1 วิวัฒนาการของวิชาทฤษฎีจำนวน	1
1.2 ระบบจำนวนเต็ม	4
1.3 การพิสูจน์เบื้องต้น	10
1.4 ข้อเสนอแนะบางประการเกี่ยวกับจำนวนเต็ม	20
1.5 สรุปท้ายบทที่ 1	24
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1	25
บทที่ 2 การหารลงตัว	27
2.1 ขั้นตอนวิธีการหาร	27
2.2 การหารลงตัว	32
2.3 ตัวหารร่วมมาก	38
2.4 ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด	46
2.5 ตัวคูณร่วมน้อย	50
2.6 สรุปท้ายบทที่ 2	55
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	57
บทที่ 3 จำนวนเฉพาะ	59
3.1 นิยามและสมบัติบางประการของจำนวนเฉพาะ	59
3.2 ทฤษฎีบทหลักมูลเลขคณิต	64
3.3 การค้นหาจำนวนเฉพาะ	69
3.4 จำนวนเฉพาะแฟร์มาและจำนวนเฉพาะเมอร์แซน	77
3.5 สรุปท้ายบทที่ 3	84

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง	หน้า
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3	85
บทที่ 4 สมภาค	87
4.1 สมบัติเบื้องต้นของสมภาค	87
4.2 ชั้นส่วนตกค้าง	97
4.3 สมภาคเชิงเส้น	100
4.4 ระบบสมภาคเชิงเส้น	113
4.5 สรุปท้ายบทที่ 4	121
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4	123
บทที่ 5 ฟังก์ชันในทฤษฎีจำนวน	125
5.1 ฟังก์ชันเลขคณิต	125
5.2 จำนวนและผลบวกของตัวหารที่เป็นบวก	126
5.3 ฟังก์ชันฟอยเลอร์	134
5.4 ฟังก์ชันเมอร์บิอุส	142
5.5 ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุด	148
5.6 สรุปท้ายบทที่ 5	156
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5	157
บทที่ 6 ทฤษฎีบทสมภาค	159
6.1 ทฤษฎีบทเล็กแฟร์มา	159
6.2 ทฤษฎีบทวิลสัน	167
6.3 จำนวนเฉพาะเทียม	173
6.4 ทฤษฎีบททอยเลอร์	177
6.5 สรุปท้ายบทที่ 6	184
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6	185
บทที่ 7 สมการไดโอแฟนไทน์	187
7.1 สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น	187

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง	หน้า
7.2 ระบบสมการไดโอฟานไทน์เชิงเส้น	202
7.3 สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส	206
7.4 สมการไดโอฟานไทน์เลขชี้กำลัง	213
7.5 สรุปท้ายบทที่ 7	223
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7	225
บทที่ 8 รากปฐมฐานและดัชนี	227
8.1 อันดับของจำนวนเต็มมอดุโล m	227
8.2 รากปฐมฐาน	234
8.3 รากปฐมฐานสำหรับจำนวนเฉพาะและการมีรากปฐมฐาน	238
8.4 ทฤษฎีบทของดัชนี	246
8.5 สรุปท้ายบทที่ 8	255
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8	257
บทที่ 9 ส่วนตกค้างกำลังสอง	259
9.1 ส่วนตกค้างกำลังสอง	259
9.2 สัญลักษณ์เลอฌ็องดร์	264
9.3 กฎส่วนกลับกำลังสอง	277
9.4 สัญลักษณ์ยาโคบี	284
9.5 สรุปท้ายบทที่ 9	294
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9	295
บรรณานุกรม	297
ภาคผนวก	301
เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท	303
ดรรชนี	317

สารบัญรูปภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
1.1 แผนภาพแสดงจำนวนเต็มบนเส้นจำนวน	4
2.1 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $13 \mid 182$	32
2.2 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $15 \nmid 145$	33
2.3 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาตัวประกอบทั้งหมดของ 225	33
2.4 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $(28, 64)$	39
2.5 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $(927, 315)$	45
2.6 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $(42, 64, 78)$	46
2.7 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $[30, 45]$	51
2.8 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $[500, 150]$	53
2.9 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $[3, 8, 10, 15, 32, 60]$	55
3.1 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดง 15750 ในรูปแบบบัญญัติ	66
3.2 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาตัวหารทั้งหมดของ 504	68
3.3 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า 103 เป็นจำนวนเฉพาะ	70
3.4 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า 2807 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ	71
3.5 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาจำนวนเฉพาะทั้งหมดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 50	72
4.1 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $7 \equiv 2 \pmod{5}$	88
4.2 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $25 \not\equiv 2 \pmod{4}$	88
4.3 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงเศษจากการหาร 3^{25} ด้วย 5	95
4.4 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาเศษจากการหาร $2^{20} - 1$ หารด้วย 41	96
4.5 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยของ $2x \equiv 3 \pmod{5}$	102
4.6 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $9x \equiv 11 \pmod{15}$ ไม่มีผลเฉลย	107
4.7 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่าไม่มีผกผันของ 2 มอดุโล 4	109
4.8 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า 3 เป็นผกผันของ 7 มอดุโล 4	110
4.9 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมภาค $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$	115

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
4.10 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่าระบบสมภาคเชิงเส้น $x \equiv 4 \pmod{5}$ $x \equiv 6 \pmod{15}$ ไม่มีผลเฉลย	118
4.11 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมภาคเชิงเส้น	119
4.12 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมภาคเชิงเส้น	121
5.1 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\tau(9) = 3$	127
5.2 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\sigma(9) = 13$	127
5.3 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\tau(720) = 30$	131
5.4 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\sigma(720) = 2418$	131
5.5 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\phi(12) = 4$	136
5.6 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\phi(23) = 22$	137
5.7 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\phi(625) = 500$	138
5.8 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\phi(1029) = 588$	140
5.9 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\phi(2000) = 800$	141
5.10 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\mu(660) = 0$	143
5.11 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left\lfloor -\frac{5}{2} \right\rfloor = -3$	149
5.12 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left\lceil \frac{5.2}{2} \right\rceil = 3$	151
5.13 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	154
5.14 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า กำลังสูงสุดของ 7 ใน 50! คือ 8	154
5.15 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาเลขชี้กำลังสูงสุดของ 2 ใน 11! คือ 8	155
6.1 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงเศษที่เกิดจากการหาร 12^{7113} ด้วย 29 คือ	161
6.2 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า 9 เป็นส่วนตกค้างที่ไม่เป็นลบน้อยสุด ของ 3^{29} มอดุโล 13	163
6.3 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า 6 เป็นผกผันของ 2 มอดุโล 11	164
6.4 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $x \equiv 15 \pmod{17}$ เป็นผลเฉลยของ สมภาคเชิงเส้น $6x \equiv 5 \pmod{17}$	166

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
6.5 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $x \equiv 9 \pmod{17}$ เป็นผลเฉลยของสมภาคเชิงเส้น $7x \equiv 12 \pmod{17}$	166
6.6 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงส่วนตกค้างที่ไม่เป็นลบน้อยสุดของ $22!$ มอดุโล 23 คือ 22	168
6.7 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่าเศษจากการหาร $109 + 18!$ ด้วย 19 คือ 13	169
6.8 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงเศษจากการหาร $14!$ ด้วย 13 คือ 0	170
6.9 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงเศษจากการหาร $57!$ ด้วย 61 คือ 51	171
6.10 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่าเศษเหลือที่เกิดจากการหาร 11^{146} ด้วย 180 คือ 121	181
6.11 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า 81 เป็นเลขโดดสองหลักสุดท้ายของ 3^{2004}	182
6.12 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า 5 เป็นผกผันของ 2 มอดุโล 9	183
6.13 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $x \equiv 9 \pmod{13}$ เป็นผลเฉลยของสมภาคเชิงเส้น $2x \equiv 5 \pmod{13}$	184
7.1 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 6y = 11$ ไม่มีผลเฉลย	190
7.2 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงผลเฉลยสมการไดโอแฟนไทน์ $21x + 14y = 70$ กรณีที่ $x, y \geq 0$	197
7.3 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $x = 83n + 40$ และ $y = 4n + 2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มเป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $4x - 83y = -6$	198
7.4 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $x = 3 - 2n_1 + 2n_2$, $y = n_2$ และ $z = 1 + 3n_1$ เมื่อ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนเต็ม เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3x - 6y + 2z = 11$	201
7.5 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 3y + 5z = 23$, $5x + 7y - z = 16$	205
8.1 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $ord_5 3 = 4$	228

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
8.2 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $ord_4 19 = 2$	229
8.3 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า 2 ไม่เป็นรากปฐมฐานของ 7	235
8.4 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า 3 เป็นรากปฐมฐานของ 4	246
9.1 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $x \equiv 2, 3 \pmod{5}$ เป็นผลเฉลย ของสมภาค $x^2 + 5x + 6 \equiv 0 \pmod{5}$	261
9.2 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า 1, 3, 4, 9, 10, 12 เป็นส่วนตกค้าง กำลังสองของ 13	262
9.3 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left(\frac{2}{11}\right) = -1$	266
9.4 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left(\frac{-25}{11}\right) = -1$	269
9.5 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left(\frac{6}{17}\right) = -1$	274
9.6 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left(\frac{559}{53}\right) = 1$	282
9.7 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left(\frac{2}{9}\right) = 1$	285
9.8 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left(\frac{109}{385}\right) = -1$	286
9.9 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left(\frac{21}{55}\right) = -1$	288
9.10 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $\left(\frac{10}{21}\right) = -1$	291

สารบัญตาราง

ตาราง		หน้า
3.1	ลักษณะการคั่นพบของจำนวนแฟร์มา F_n เมื่อ $0 \leq n \leq 30$	80
3.2	แสดงจำนวนเฉพาะแมร์แซนและจำนวนสมบูรณ์	83