

ภาคผนวก

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. 1.1 ให้ a เป็นจำนวนคู่และ b เป็นจำนวนเต็มคี่
จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม s และ t ซึ่ง $a = 2s$ และ $b = 2t + 1$
$$a + b = 2s + (2t + 1) = 2(s + t) + 1$$
แสดงว่า $a + b$ เป็นจำนวนเต็มคี่
1.2 -1.5 พิสูจน์คล้าย 1.1
2. กรณีที่ 1 ถ้า $a = 0$ จะได้ตามที่ต้องการ
กรณีที่ 2 ถ้า $a \neq 0$ จะต้องมีย a^{-1}
$$ab = 0 .$$
$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0 \quad \text{สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน}$$
$$(a^{-1}a)b = a^{-1}0 \quad \text{สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ}$$
$$1b = a^{-1}0 \quad \text{สมบัติของอินเวอร์สการคูณ}$$
$$b = a^{-1}0 \quad \text{สมบัติของเอกลักษณ์การคูณ}$$
$$b = 0$$
3. ให้ a เป็นจำนวนเต็ม(เต็มคู่ หรือ เต็มคี่)
กรณี a เป็นจำนวนเต็มคู่จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม s ซึ่ง $a = 2s$
$$a^2 + a + 1 = (2s)^2 + 2s + 1 = 4s^2 + 2s + 1 = 2(2s^2 + s) + 1$$
แสดงว่า $a^2 + a + 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่
กรณี a เป็นจำนวนเต็มคี่จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม t ซึ่ง $a = 2t + 1$
$$a^2 + a + 1 = (2t + 1)^2 + 2(2t + 1) + 1 = 2(2t^2 + 4t + 1) + 1$$
แสดงว่า $a^2 + a + 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่
4. ขั้นที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งตัวเลือก $x = 0$ จะได้ว่า $5^x = 5^0 = 1$
ขั้นที่ 2 มีเพียงตัวเดียว ให้ $x, y \in \mathbb{R}$
$$\text{สมมติ } 5^x = 1 \text{ และ } 5^y = 1 \text{ แล้ว } 5^x = 1 = 5^y$$
ดังนั้น $5^x = 5^y$ จากสมบัติของเลขยกกำลังจะได้ว่า $x = y$
5. กรณี $x = 3$
$$3 + 3 \leq 10$$
$$3 + 4 \leq 10 \quad \text{เป็นจริงทุกค่า } y$$
$$3 + 5 \leq 10$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{กรณี } x = 4 & 4 + 3 \leq 10 \\
 & 4 + 4 \leq 10 \quad \text{เป็นจริงทุกค่า } y \\
 & 4 + 5 \leq 10 \\
 \text{กรณี } x = 5 & 5 + 3 \leq 10 \\
 & 5 + 4 \leq 10 \quad \text{เป็นจริงทุกค่า } y \\
 & 5 + 5 \leq 10
 \end{array}$$

6. พิสูจน์คล้ายข้อ 5.

7. 7.1 ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{ขั้นฐาน} \quad 1^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} \quad \text{ดังนั้น } P(1) \text{ เป็นจริง}$$

$$\text{ขั้นอุปนัย} \quad \text{ให้ } k \in \mathbb{N} \text{ สมมติ } P(k) \text{ เป็นจริง นั่นคือ}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \text{เป็นจริง}$$

โดยสมมติฐาน จะได้ว่า

7.2 - 7.4 พิสูจน์คล้าย 7.1 โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบที่ 1

7.5 - 7.8 พิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบที่ 2

$$\begin{array}{ll}
 8. \quad 8.1 \quad \text{เนื่องจาก} & ab = ac \quad \text{กำหนดให้} \\
 & a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \quad a \neq 0 \text{ และสมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน} \\
 & (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c \quad \text{สมบัติเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ} \\
 & (1)b = (1)c \quad \text{สมบัติของอินเวอร์สการคูณ} \\
 & b = c \quad \text{สมบัติเอกลักษณ์ของการคูณ}
 \end{array}$$

8.2 - 8.6 พิสูจน์คล้าย 8.1

9. 9.1 ให้ $a > b$

$$\text{ดังนั้น } a - b \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned}
 \text{แต่ } (a - b) &= (a - b) + 0 \\
 &= (a - b) + (c - c) \\
 &= ((a - b) + c) - c \\
 &= [a + (-b + c)] - c \\
 &= (a + c) + (-b - c) \\
 &= (a + c) - (b + c)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(a + c) - (b + c) \in R^+$

นั่นคือ $a + c > b + c$

9.2 - 9.6 พิสูจน์คล้าย 9.1

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. สมมติ $a|b$, $a|c$ และ $a|d$ เพราะฉะนั้น จะมีจำนวนเต็ม q, r และ s ที่ทำให้

$$b = aq, c = ar \text{ และ } d = as$$

ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้

$$bx = aqx, cy = ary \text{ และ } dz = asz \text{ และ}$$

$$bx + cy + dz = (aq)x + (ar)y + (as)z = a(qx + ry + sz)$$

แสดงว่า $a|(bx + cy + dz)$

2. เนื่องจาก 107 หารด้วย 23 ได้ผลหารเท่ากับ 4 และมีเศษจากการหารเท่ากับ 15 นั่นคือ

$$107 = 23(4) + 15$$

จากรูปทั่วไป $b = aq + r$ โดยที่ $a = 23$ และ $b = 107$

ดังนั้น $q = 4$ และ $r = 15$

3. ให้ $n = b^2$ และ $a = 4$

จะได้ $b = 4q + r$ โดยที่ $r = 0, 1, 2, 3$

ดังนั้น $n = (4q + r)^2 = 16q^2 + 8qr + r^2$

$$\text{ถ้า } r = 0 \text{ แล้ว } n = 16q^2 + 8q(0) + 0 = 16q^2 + 0$$

$$\text{ถ้า } r = 1 \text{ แล้ว } n = 16q^2 + 8q(1) + (1)^2 = 4(4q^2 + 2q) + 1$$

$$\text{ถ้า } r = 2 \text{ แล้ว } n = 16q^2 + 8q(2) + (2)^2 = 4(4q^2 + 4q + 1) + 0$$

$$\text{ถ้า } r = 3 \text{ แล้ว } n = 16q^2 + 8q(3) + (3)^2 = 4(4q^2 + 6q + 2) + 1$$

ดังนั้นแสดงว่ากำลังสองของ n เมื่อหารด้วย 4 จะเหลือเศษเป็น 0, 1

4. จะแสดงว่า $n(n+1)(n+2)$ หารด้วย 3 จะเหลือเศษเป็น 0 เท่านั้น

ให้ $m = n(n+1)(n+2)$ และ $a = 2$

จะได้ $n = 3q + r$ โดยที่ $r = 0, 1, 2$

ดังนั้น $m = (3q + r)(3q + r + 1)(3q + r + 2)$

$$= 27q^3 + 27q^2(r+1) + 3q(3r^2 + 6r + 2) + r(r^2 + 3r + 2)$$

ถ้า $r = 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} m &= 27q^3 + 27q^2(0+1) + 3q\left(3(0)^2 + 6(0) + 2\right) + 0\left((0)^2 + 3r + 2\right) \\ &= 27q^3 + 27q^2 + 6q \\ &= 3(9q^3 + 9q^2 + 2q) + 0 \end{aligned}$$

ถ้า $r = 1$ แล้ว

$$\begin{aligned} m &= 27q^3 + 27q^2(1+1) + 3q\left(3(1)^2 + 6(1) + 2\right) + 1\left((1)^2 + 3(1) + 2\right) \\ &= 27q^3 + 54q^2 + 33q + 6 \\ &= 3(9q^3 + 18q^2 + 11q + 2) + 0 \end{aligned}$$

ถ้า $r = 2$ แล้ว

$$\begin{aligned} m &= 27q^3 + 27q^2(2+1) + 3q\left(3(2)^2 + 6(2) + 2\right) + 2\left((2)^2 + 3(2) + 2\right) \\ &= 27q^3 + 81q^2 + 78q + 24 \\ &= 3(9q^3 + 27q^2 + 26q + 8) + 0 \end{aligned}$$

5. ให้ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะมีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง $b = 9q + r$

โดยที่ $r = 0, 1, 2, \dots, 8$

นั่นคือ $b = 9q, b = 9q + 1, b = 9q + 2, \dots, b = 9q + 8$

กรณีที่ $b = 9q$ จะได้

$$b^3 = (9q)^3 = 9(81q^3) + 0$$

กรณีที่ $b = 9q + 1$ จะได้

$$b^3 = (9q + 1)^3 = 9(81q^3 + 28q^2 + 3q) + 1$$

กรณีที่ $b = 9q + 2$ จะได้

$$b^3 = (9q + 2)^3 = 9(81q^3 + 54q^2 + 12q) + 8$$

กรณีที่ $b = 9q + 3$ จะได้

$$b^3 = (9q + 3)^3 = 9(81q^3 + 81q^2 + 27q + 3) + 0$$

กรณีที่ $b = 9q + 4$ จะได้

$$b^3 = (9q + 4)^3 = 9(81q^3 + 108q^2 + 48q + 7) + 1$$

กรณีที่ $b = 9q + 5$ จะได้

$$b^3 = (9q + 5)^3 = 9(81q^3 + 135q^2 + 75q + 13) + 8$$

กรณีที่ $b = 9q + 6$ จะได้

$$b^3 = (9q + 6)^3 = 9(81q^3 + 162q^2 + 108q + 24) + 0$$

กรณีที่ $b = 9q + 7$ จะได้

$$b^3 = (9q + 7)^3 = 9(81q^3 + 189q^2 + 147q + 38) + 1$$

กรณีที่ $b = 9q + 8$ จะได้

$$b^3 = (9q + 8)^3 = 9(81q^3 + 216q^2 + 192q + 56) + 8$$

6. ให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม s ที่ $n = 2s + 1$ จะได้

$$n^2 + 4n + 11 = (2s + 1)^2 + 4(2s + 1) + 11 = 4(s^2 + 3s + 4)$$

7. ให้ $b \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 200\}$ ซึ่งสอดคล้อง

$$b = 6q + 2 \quad \text{เมื่อ } q \in \mathbb{Z}$$

$$\text{และ } b = 14p + 10 \quad \text{เมื่อ } p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ดังนั้น } 6q + 2 = 14p + 10 \text{ แสดงว่า } q = \frac{14p + 8}{6}$$

สรุปเป็นตารางดังนี้

p	2	5	8	11
q	6	13	20	27
b	38	80	122	167

8. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มคี่

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม s และ t ที่ $a = 2s + 1$ และ $b = 2t + 1$

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + 2 &= (2s + 1)^4 + (2t + 1)^4 + 2 \\ &= 4(4s^4 + 8s^3 + 6s^2 + 2s + 4t^4 + 8t^3 + 6t^2 + 2t + 1) \end{aligned}$$

9. ให้ $P(n)$ แทน $(a - 1) \mid (a^2 - 1)^n$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$

$$\text{จะได้ } (a - 1) \mid (a - 1)(a + 1)$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $(a - 1) \mid (a^2 - 1)^k$

จะแสดงว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง

พิจารณา

$$\begin{aligned} (a^2 - 1)^{k+1} &= [(a - 1)(a + 1)]^{k+1} \\ &= (a - 1)(a + 1)[(a - 1)(a + 1)]^k \\ &= (a - 1)(a + 1)(a^2 - 1)^k \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(a-1)|(a^2-1)^k$ และ $(a-1)|(a-1)(a+1)$

แสดงว่า $(a-1)|(a^2-1)^{k+1}$ นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

- | | | |
|-----|-----------------------------|---------------------------------|
| 10. | 10.1 $(18, 81) = 162$ | 10.2 $(84, 24) = 168$ |
| | 10.3 $(17, 289) = 289$ | 10.4 $(540, 450) = 2700$ |
| | 10.5 $(1000, 925) = 37,000$ | 10.6 $(2004, 1106) = 1,108,212$ |
| 11. | 11.1 $x = 8$ และ $y = -17$ | 11.2 $x = 29$ และ $y = -36$ |
| | 11.3 $x = 5$ และ $y = -37$ | 11.4 $x = 1$ และ $y = -1$ |
| 12. | 12.1 $[18, 63] = 9$ | 12.2 $[84, 24] = 12$ |
| | 12.3 $[17, 289] = 17$ | 12.4 $[540, 450] = 90$ |
| | 12.5 $[3, 11, 24] = 1$ | 12.6 $[3, 14, 21, 33] = 1$ |

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. มี 42 จำนวนได้แก่

709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787,
797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863,
877, 881, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881,
883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971,
977, 983, 991, 997

2. มีจำนวนเฉพาะ $p = 11$ ที่ทำให้ $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$

- | | | |
|----|---------------------------------------|--|
| 3. | 3.1 $p = 2, 3, 5, 7$ | 3.2 $p = 2, 3, 5$ |
| | 3.3 $p = 2, 5$ | 3.4 $p = 3, 5, 13$ |
| | 3.5 $p = 2$ | 3.6 $p = 3, 5, 7, 13, 19, 37$ |
| 4. | 4.1 $2, 535 = 3 \times 5 \times 13^2$ | 4.2 $1, 500 = 2^2 \times 3 \times 5^3$ |
| | 4.3 $9, 261 = 3^3 \times 7^3$ | 4.4 $1, 323 = 3^3 \times 7^2$ |

5. ตัวหารทั้งหมดของ

588 ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 49, 84, 98, 147, 196, 294, 588
6, 861 ได้แก่ 1, 3, 2287, 6861

- | | | |
|----|----------------------------|-----------------------------|
| 6. | 6.1 $[18, 63] = 126$ | 6.2 $[84, 24] = 168$ |
| | 6.3 $[3, 11, 24] = 264$ | 6.4 $[3, 14, 21, 33] = 462$ |
| | 6.5 $(18, 81) = 9$ | 6.6 $(17, 289) = 17$ |
| | 6.7 $(120, 540, 450) = 30$ | 6.8 $(84, 24, 108) = 12$ |

7. 7.1 ไม่เป็น 7.2 เป็น 7.3 ไม่เป็น
7.4 ไม่เป็น 7.5 เป็น 7.6 เป็น
8. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83
9. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่ามีจำนวนประกอบเรียงต่อเนื่องกัน n จำนวน
สำหรับ $i = 2, 3, 4, \dots, n+1$ จำนวน $(n+1)! + i$ เป็นจำนวนประกอบ
ดังนั้นลำดับ $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \dots, (n+1)! + (n+1)$ เป็นลำดับของ
จำนวนประกอบ n จำนวนเรียงต่อเนื่องกัน
10. $(F_0, F_1) = 1$
11. M_1 และ M_4
12. F_1, F_2, F_3, F_4 เป็นจำนวนเฉพาะ
 F_5, F_6, F_7 เป็นจำนวนประกอบ เพราะว่า
 $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$
 $F_6 = 184467440709551617 = 274177 \times 67280421310721$
 $F_7 = 59649589127497217 \times 5704689200685129054721$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. 1.1 จริง 1.2 จริง 1.3 เท็จ 1.4 จริง 1.5 เท็จ
2. 2.1 4 2.2 6 2.3 19 2.4 126 2.5 0
3. 2
4. กรณี $n \equiv 0(\text{mod } 5)$ จะได้ $n^5 - n \equiv 0(\text{mod } 5)$
กรณี $n \equiv 1(\text{mod } 5)$ จะได้ $n^5 - n \equiv (1^5 - 1)(\text{mod } 5) \equiv 0(\text{mod } 5)$
กรณี $n \equiv 2(\text{mod } 5)$ จะได้ $n^5 - n \equiv (2^5 - 2)(\text{mod } 5) \equiv 0(\text{mod } 5)$
กรณี $n \equiv 3(\text{mod } 5)$ จะได้ $n^5 - n \equiv (3^5 - 3)(\text{mod } 5) \equiv 0(\text{mod } 5)$
กรณี $n \equiv 4(\text{mod } 5)$ จะได้ $n^5 - n \equiv (4^5 - 4)(\text{mod } 5) \equiv 0(\text{mod } 5)$
5. กรณี $n \equiv 0(\text{mod } 6)$ จะได้ $n(n^2 + 5) \equiv 0(0^2 + 5)(\text{mod } 6) \equiv 0(\text{mod } 6)$
กรณี $n \equiv 1(\text{mod } 6)$ จะได้ $n(n^2 + 5) \equiv 1(1^2 + 5)(\text{mod } 6) \equiv 0(\text{mod } 6)$
กรณี $n \equiv 2(\text{mod } 6)$ จะได้ $n(n^2 + 5) \equiv 2(2^2 + 5)(\text{mod } 6) \equiv 0(\text{mod } 6)$
กรณี $n \equiv 3(\text{mod } 6)$ จะได้ $n(n^2 + 5) \equiv 3(3^2 + 5)(\text{mod } 6) \equiv 0(\text{mod } 6)$
กรณี $n \equiv 4(\text{mod } 6)$ จะได้ $n(n^2 + 5) \equiv 4(4^2 + 5)(\text{mod } 6) \equiv 0(\text{mod } 6)$
กรณี $n \equiv 5(\text{mod } 6)$ จะได้ $n(n^2 + 5) \equiv 5(5^2 + 5)(\text{mod } 6) \equiv 0(\text{mod } 6)$

6. 6.1 มี 1 ผลเฉลย $x \equiv 6(\text{mod } 7)$
 6.2 มี 1 ผลเฉลย $x \equiv 2(\text{mod } 11)$
 6.3 มี 1 ผลเฉลย $x \equiv 8(\text{mod } 9)$
 6.4 ไม่มีผลเฉลย
 6.5 มี 3 ผลเฉลย $x \equiv 6(\text{mod } 21), x \equiv 13(\text{mod } 21), x \equiv 20(\text{mod } 21)$
 6.6 $x \equiv 35(\text{mod } 100)$
 6.7 ไม่มีผลเฉลย
 6.8 มี 2 ผลเฉลย $x \equiv 3(\text{mod } 12), x \equiv 9(\text{mod } 12)$
7. 7.1 2 7.2 17 7.3 11 7.4 77
 7.5 34 7.6 3 7.7 4 7.8 57
8. 8.1 $x \equiv 40(\text{mod } 77)$ 8.2 $x \equiv 14(\text{mod } 18)$
 8.3 $x \equiv 67(\text{mod } 105)$ 8.4 $x \equiv 29(\text{mod } 30)$
 8.5 $x \equiv 88(\text{mod } 315)$ 8.6 $x \equiv 51(\text{mod } 308)$
 8.7 $x \equiv 47(\text{mod } 60)$ 8.8 $x \equiv 17(\text{mod } 210)$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = n + 1$
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = n^2 - 3$
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = n + 7$
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = 1 - n^2$
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(n) = n^2 + 4n$
2. $\tau(10) = 4, \tau(11) = 2, \tau(12) = 6$ และ $\sigma(10) = 18, \sigma(11) = 12, \sigma(12) = 28,$
3. $\sum_{d|12} f(d) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(6) + f(12)$
4. 4.1 $\tau(120) = 16$ และ $\sigma(120) = 360$
 4.2 $\tau(810) = 20$ และ $\sigma(810) = 2178$
 4.3 $\tau(1550) = 12$ และ $\sigma(1550) = 2796$
5. เนื่องจาก $242 = 2 \times 11^2$ จะได้ $\tau(242) = (1+1)(2+1) = 6$
 เนื่องจาก $243 = 3^5$ จะได้ $\tau(243) = (5+1) = 6$
 เนื่องจาก $244 = 2^2 \times 61$ จะได้ $\tau(244) = (2+1)(1+1) = 6$
 เนื่องจาก $245 = 5 \times 7^2$ จะได้ $\tau(245) = (1+1)(2+1) = 6$

6. 6.1 $\phi(406) = 168$ 6.2 $\phi(1001) = 720$
 6.3 $\phi(1228) = 612$ 6.4 $\phi(36000) = 9600$
7. 7.1 $\mu(12) = 0$ 7.2 $\mu(50) = 0$
 7.3 $\mu(129) = 1$ 7.4 $\mu(1001) = -1$
8. ให้ x เป็นจำนวนเต็ม
 กรณี $x = 0$ จะได้ $|0| + |-0| = 0$
 กรณี $x > 0$ จะได้ $|x| = x$ และ $|-x| = -x$ แสดงว่า
 $|x| + |-x| = x + (-x) = 0$
 กรณี $x < 0$ จะได้ $|x| = -x$ และ $|-x| = x$ แสดงว่า
 $|x| + |-x| = x + (-x) = 0$
9. ให้ n เป็นจำนวนเฉพาะจะได้ว่า $\sigma(n) = n + 1, \phi(n) = n - 1$ และ $\pi(n) = 2$
 แสดงว่า $\sigma(n) + \phi(n) = n\pi(n)$
10. 10.1 $|2.5 + 5.9| = 8$ 10.2 $|2.3| + |-2.3| = -1$
 10.3 $|2.3| + |-2.5| = -1$ 10.4 $|-9.2| + |-2.5| = -13$
11. $c_3 = 28, c_5 = 14$ และ $c_{11} = 5$
12. 12.1 8 12.2 47 12.3 9
 12.4 13 12.5 5 12.6 5
13. 13.1 $5! = 2^3 \times 3 \times 5$
 13.2 $7! = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$
 13.3 $10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$
 13.4 $11! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11$
 13.5 $15! = 2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13$
 13.6 $21! = 2^{18} \times 3^9 \times 5^4 \times 7^3 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$
 13.7 $40! = 2^{38} \times 3^{18} \times 5^9 \times 7^5 \times 11^3 \times 13^3 \times 17^2 \times 19^2 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37$
 13.8 $80! = 2^{78} \times 3^{36} \times 5^{19} \times 7^{12} \times 11^7 \times 13^6 \times 17^4 \times 19^4 \times 23^3 \times 29^2 \times$
 $31^2 \times 37^2 \times 41 \times 43 \times 47 \times 53 \times 59 \times 61 \times 67 \times 71 \times 73 \times 79$
14. 14.1 1 14.2 2 14.3 4
 14.4 5 14.5 5 14.6 8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1. 1.1-1.4 โดยทฤษฎีบทวิลสัน
2. 12
3. 3.1 4 3.2 16 3.3 16 3.4 2
4. เนื่องจาก $(15-1)! = 14! \equiv 0 \pmod{15} \not\equiv -1 \pmod{15}$
แสดงว่า 15 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ
5. 5.1 จริง 5.2 จริง 5.3 จริง 5.4 เท็จ
6. จงใช้ทฤษฎีบทน้อยแฟร์มาหาผกผันของ จำนวนต่อไปนี้
 - 6.1 4 6.2 8 6.3 10 6.4 7
7. 1
8. 8.1 จริง 8.2 จริง 8.3 จริง 8.4 จริง
9. 9.1 ไม่เป็นจำนวนคาร์ไมเคิลเนื่องจาก $a^{104} \not\equiv 1 \pmod{7}$
 9.2 ไม่เป็นจำนวนคาร์ไมเคิลเนื่องจาก $a^{230} \not\equiv 1 \pmod{7}$
 9.3 ไม่เป็นจำนวนคาร์ไมเคิลเนื่องจาก $a^{272} \not\equiv 1 \pmod{7}$
 9.4 เป็นจำนวนคาร์ไมเคิล เนื่องจาก

$$a^{560} = (a^2)^{280} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$a^{560} = (a^{10})^{56} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$a^{560} = (a^{16})^{35} \equiv 1 \pmod{17}$$
 9.5 ไม่เป็นเนื่องจาก $a^{1310} \not\equiv 1 \pmod{19}, a^{1310} \not\equiv 1 \pmod{23}$
 9.6 เป็นจำนวนคาร์ไมเคิลเนื่องจาก

$$a^{1728} = (a^6)^{288} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$a^{1728} = (a^{12})^{144} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$a^{1728} = (a^{18})^{96} \equiv 1 \pmod{19}$$
10. 10.1 3 10.2 53 10.3 49
11. 25
12. 12.1 8 12.2 5 12.3 11 12.4 33
13. 13.1 $x \equiv 6 \pmod{7}$ 13.2 $x \equiv 1 \pmod{8}$
 13.3 $x \equiv 8 \pmod{9}$ 13.4 $x \equiv 7 \pmod{16}$
 13.5 $x \equiv 10 \pmod{40}$ 13.6 $x \equiv 15 \pmod{18}$
 13.7 $x \equiv 7 \pmod{21}$ 13.8 $x \equiv 33 \pmod{101}$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

1.
 - 1.1 ไม่มีผลเฉลย
 - 1.2 $x = 7 - 33n, y = 4n$ และ $n \in \mathbb{Z}$
 - 1.3 $x = 4 - 4n, y = 3n$ และ $n \in \mathbb{Z}$
 - 1.4 ไม่มีผลเฉลย
 - 1.5 $x = -9n - 5, y = 4n + 3$ และ $n \in \mathbb{Z}$
 - 1.6 ไม่มีผลเฉลย
 - 1.7 $x = -3n_2 + n_1 + 7, z = 2n_2 + n_1 + 1, y = n_1$ และ $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$
 - 1.8 $x = 2(n_2 + 3), z = 5n_2 + 4n_1 + 3, y = n_1$ และ $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$
 - 1.9 $x = -2(n_3 + n_1 - 33), z = 5n_3 + n_2 + 1, y = n_1, w = n_2$ และ $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$
 - 1.10 $x = -9n_3 - 2n_2 - 5n_1 + 13, z = 7n_3 + n_2 + 3n_1 + 1, y = n_1, w = n_2$ และ $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$
2.
 - 2.1 $x = 13n + 3, y = 17n - 18, z = 10 - 11n$ และ $n \in \mathbb{Z}$
 - 2.2 $x = 5n + 2, y = 1 - 3n, z = -n$ และ $n \in \mathbb{Z}$
 - 2.3 $x = 6, y = 7n + 6, z = -5n - 3$ และ $n \in \mathbb{Z}$
 - 2.4 $x = 7n + 6, y = 7 - 17n, z = -9n - 7$ และ $n \in \mathbb{Z}$
 - 2.5 $x = 4(5n + 3), y = 15 - 67n, z = 65n - 19$ และ $n \in \mathbb{Z}$
 - 2.6 $x = 29n + 3, y = 30 - 7n, z = 3n + 25$ และ $n \in \mathbb{Z}$
3. แยกได้ทั้งหมด 9 วิธีดังต่อไปนี้

วิธีที่	เหรียญห้าสิบบาท	เหรียญหนึ่งบาท	เหรียญห้าบาท
1	18	1	18
2	36	2	16
3	54	3	14
4	72	4	12
5	90	5	10
6	108	6	8
7	126	7	6
8	144	8	4
9	162	9	2

4. เกิดขึ้นได้ทั้งหมด 4 รูปแบบดังต่อไปนี้

รูปแบบ	เหรียญห้าบาท	เหรียญหนึ่งบาท	เหรียญห้าสิบลีตต่างค์
1	18	28	4
2	19	19	12
3	20	10	20
4	21	1	28

5. เนื่องจาก $(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$

- | | | | |
|-----|----------|-----|-----------|
| 6.1 | 8,15,17 | 6.2 | 5,2,13 |
| 6.3 | 8,15,17 | 6.4 | 7,24,25 |
| 6.5 | 12,35,37 | 6.6 | 28,53,45 |
| 6.7 | 33,56,65 | 6.8 | 60,91,109 |

7. 48, 55, 73 และ 65, 72, 97

8. $(x, y, z) = (3, 4, 5), (8, 6, 10), (5, 12, 13), (8, 15, 17)$

9. เนื่องจาก a, b, c เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2 + y^2 = z^2$

ดังนั้นจะมีผลเฉลยปฐมฐาน a', b', c'

ซึ่ง $a' = \frac{a}{d}, b' = \frac{b}{d}, c' = \frac{c}{d}$ จะได้ว่า $a = a'd, b = b'd, c = c'd$

จากทฤษฎีบท 7.6 จะได้ว่า $a' = 2mn$ หรือ $b' = 2mn$ เมื่อ $m, n \in \mathbb{N}$

และมี m หรือ n อย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นจำนวนคู่

นั่นคือ $4 \mid 2mn$ แสดงว่า $4 \mid a$ หรือ $4 \mid b$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

1.
 - 1.1 $ord_{13} 3 = 4, ord_{13} 5 = 4, ord_{13} 11 = 12$
 - 1.2 $ord_{17} 3 = 16, ord_{17} 5 = 16, ord_{17} 11 = 16$
 - 1.3 $ord_{23} 3 = 11, ord_{23} 5 = 22, ord_{23} 11 = 22$

2. ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวก และ $ord_m a \mid x$

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $x = k(\text{ord}_m a)$ แสดงว่า

$$a^x = a^{k(ord_m a)} = \left(a^{ord_m a}\right)^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{m}$$

3. 3.1 $ord_{\mathbb{F}_5} 928 = 4$ 3.2 $ord_{\mathbb{F}_7} 928 = 3$ 3.3 $ord_{\mathbb{F}_{13}} 928 = 4$

4. เนื่องจาก $ord_{19} 2 = 8 \neq \phi(17)$ แต่ $ord_{19} 2 = 18 = \phi(19)$

5. 2 เป็นรากปฐมฐานของ 11,13 และ 19

6. 15 ไม่มีรากปฐมฐาน
7. เนื่องจาก $\phi(19) = 18$ ดังนั้น $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{18}$ เป็นระบบส่วนตกค้างลดรูปมอดุโล 19
8. 8.1 2 8.2 4 8.3 4
8.4 2 8.5 10 8.6 8
9. 9.1 2 9.2 3 9.3 2 9.4 3
10. 10.1 2 10.2 3 10.3 2 10.4 3
11. $ind_2 1 = 2, ind_2 2 = 4, ind_2 3 = 8, ind_2 4 = 3, ind_2 5 = 6, ind_2 6 = 12$
 $ind_2 7 = 11, ind_2 8 = 9, ind_2 9 = 5, ind_2 10 = 10, ind_2 11 = 7$ และ
 $ind_6 1 = 6, ind_6 2 = 10, ind_6 3 = 8, ind_6 4 = 9, ind_6 5 = 2, ind_6 6 = 12$
 $ind_6 7 = 7, ind_6 8 = 3, ind_6 9 = 5, ind_6 10 = 4, ind_6 11 = 11$
12. 12.1 $x \equiv 2 \pmod{13}$ 12.2 $x \equiv 16 \pmod{17}$
12.3 $x \equiv 5 \pmod{7}$ 12.4 $x \equiv 4 \pmod{5}$
12.5 $x \equiv 2, 5, 6 \pmod{13}$ 12.6 $x \equiv 8 \pmod{17}$
13. 13.1 มี 1 ผลเฉลย 13.2 มี 1 ผลเฉลย
13.3 ไม่มีผลเฉลย 13.4 มี 1 ผลเฉลย
13.5 ไม่มีผลเฉลย 13.6 มี 1 ผลเฉลย

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9

1. 1.1 ส่วนตกค้างกำลังสองของ 7 ได้แก่ 0, 1, 2, 4
1.2 ส่วนตกค้างกำลังสองของ 15 ได้แก่ 0, 1, 4, 6, 9, 10
1.3 ส่วนตกค้างกำลังสองของ 17 ได้แก่ 0, 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16
2. 2.1 2, 5, 6 และ 8 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ 5
2.2 5 เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง และ 2, 6, 8 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ 11
2.3 5, 6 เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง และ 2, 8 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ 11
3. 3.1 -1 3.2 -1 3.3 1
3.4 -1 3.5 -1 3.6 1
3.7 -1 3.8 1 3.9 1
3.10 -1 3.11 -1 3.12 1
4. 4.1 ไม่มีผลเฉลย 4.2 ไม่มีผลเฉลย 4.3 มีผลเฉลย
4.4 ไม่มีผลเฉลย 4.5 ไม่มีผลเฉลย 4.6 ไม่มีผลเฉลย
4.7 มีผลเฉลย 4.8 ไม่มีผลเฉลย 4.9 ไม่มีผลเฉลย
4.10 มีผลเฉลย

- | | | | |
|----|--------|--------|--------|
| 5. | 5.1 -1 | 5.2 1 | 5.3 1 |
| | 5.4 -1 | 5.5 -1 | 5.6 1 |
| | 5.7 -1 | 5.8 -1 | |
| 6. | 6.1 -1 | 6.2 -1 | 6.3 -1 |
| | 6.4 -1 | 6.5 -1 | 6.6 1 |
| | 6.7 -1 | 6.8 1 | |
7. จงพิจารณาโดยใช้สัญลักษณ์ยาโคบีว่าสมภาคกำลังสองต่อไปนี้ มีผลเฉลยหรือไม่
- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 7.1 ไม่มีผลเฉลย | 7.2 ไม่มีผลเฉลย | 7.3 ไม่มีผลเฉลย |
| 7.4 ไม่มีผลเฉลย | 7.5 มีผลเฉลย | 7.6 ไม่มีผลเฉลย |

ดรรชนี

	หน้า		หน้า
ก		ช (ต่อ)	
การหารลงตัว	30	เซตของจำนวนเต็มบวก	4
กฎส่วนกลับกำลังสอง	269, 271	เซตของจำนวนเต็มลบ	4
เกณฑ์ของออยเลอร์	255	เซตของจำนวนเต็มศูนย์	4
ข		เซตของจำนวนจริง	4
ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด	45	เซตของจำนวนตรรกยะ	4
ขั้นตอนวิธีการหาร	25, 26	เซตของจำนวนธรรมชาติ	4
จ		เซตของจำนวนอตรรกยะ	4
จำนวนเฉพาะ	57	ด	
จำนวนเฉพาะเทียม	73, 74	ดัชนี	238
จำนวนเฉพาะแฟร์มา	75	ต	
จำนวนเฉพาะแมร์แซน	78	ตัวคูณร่วมน้อย	48
จำนวนเชิงमित	1	ตัวผกผัน	108
จำนวนแฟร์มา	75	ตัวหารร่วมมาก	36
จำนวนแมร์แซน	78	ท	
จำนวนคี่	11	ทฤษฎีบทน้อยแฟร์มา	165
จำนวนคู่	11	ทฤษฎีบทเศษเหลือของชาวจีน	114
จำนวนตัวหารที่เป็นบวก	126	ทฤษฎีบทวิลสัน	156
จำนวนประกอบ	57	ทฤษฎีบทหลักมูลเลขคณิต	62
จำนวนสมบูรณ์	80	ทฤษฎีบทออยเลอร์	179
ช		ผ	
ชั้นส่วนตกค้าง	97	ผลเฉลยเฉพาะ	189
ซ		ผลเฉลยของสมภาคเชิงเส้น	100
เซตของจำนวนเชิงซ้อน	4	ผลเฉลยทั่วไป	189
เซตของจำนวนเต็ม	4	ผลบวกของตัวหารที่เป็นบวก	126

	หน้า		หน้า
พ		ส (ต่อ)	
พหุคูณ	48	สมภาค	87
ฟ		สมภาคเชิงเส้นตัวแปรเดียว	100
ฟังก์ชันเชิงการคูณ	132	ส่วนตกค้าง	97
ฟังก์ชันเชิงการคูณบริบูรณ์	132	ส่วนตกค้างกำลังสอง	254
ฟังก์ชันเมอบิอุส	142	สัญลักษณ์เลอฌ็องดร์	257
ฟังก์ชันเลขคณิต	125	สัญลักษณ์ยาโคบี	276
ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุด	148	สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส	206
ฟังก์ชันฟิออยเลอร์	135	สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน	207
ม		ห	
มอดุโล	87	หลักการจัดอันดับดี	9
ไม่สมภาค	87	อ	
ร		อันดับของจำนวนเต็ม	227
ระบบสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น	203	อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	16
ระบบสมภาคเชิงเส้น	113		
ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์	98		
ระบบส่วนตกค้างลดรูป	99		
รากปฐมฐาน	234		
รูปแบบบัญญัติ	62		
ศ			
เศษที่เกิดจากการหาร	25		
ส			
สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น	184		
สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง	213		
สมบัติไตรวิภาค	8		
สมบัติทางพีชคณิต	5		