

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 8

อนุกรมและการลู่เข้า

เนื้อหาประจำบท

1. การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม
2. อนุกรมสลับ
3. อนุกรมกำลัง
4. อนุกรมเทย์เลอร์

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เลือกวิธีการตรวจสอบการลู่เข้าและการลู่ออกที่เหมาะสมกับอนุกรมแต่ละรูปแบบได้
2. สามารถใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบเพื่อตรวจสอบการลู่เข้าลู่ออกของอนุกรมได้
3. สามารถใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วนเพื่อตรวจสอบการลู่เข้าลู่ออกของอนุกรมได้
4. สามารถใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์เพื่อตรวจสอบการลู่เข้าลู่ออกของอนุกรมได้
5. สามารถใช้การทดสอบด้วยรากเพื่อตรวจสอบการลู่เข้าลู่ออกของอนุกรมได้
6. ใช้ทฤษฎีบทตรวจสอบการลู่เข้าและลู่ออกของอนุกรมสลับได้
7. ใช้ทฤษฎีบทตรวจสอบการลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข หรือลู่ออก ได้
8. สามารถหารัศมีแห่งการลู่เข้าและช่วงการลู่เข้าของอนุกรมได้
9. สามารถกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ได้
10. สามารถกระจายอนุกรมแมคลอรินได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้นำพร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม
 - 1.2 อนุกรมสลับ
 - 1.3 อนุกรมกำลัง
 - 1.4 อนุกรมเทย์เลอร์
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
 - 2.1. ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับลำดับและอนุกรมเพิ่มเติม
 - 2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation
3. ใบงาน

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. การตอบคำถาม
3. ทดสอบท้ายชั่วโมง
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 8

อนุกรมและการลู่เข้า

การตรวจสอบการลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรมในในรูปแบบต่าง ๆ ถ้าเราสามารถหารูปทั่วไปของลำดับผลบวกของอนุกรมได้ทุกอนุกรมหรือ S_n ได้ก็ไม่ใช่การยากที่เราจะตรวจสอบ แต่สำหรับการตรวจสอบด้วยวิธีดังกล่าวนั้น ปัญหาที่เกิดขึ้นคือไม่สามารถหารูปแบบดังกล่าวได้ แต่ถ้าเป็นอนุกรมที่อยู่ในรูปแบบเฉพาะเช่น อนุกรมเรขาคณิต อนุกรมฮาร์มอนิก การตรวจสอบว่าอนุกรมนั้นลู่เข้าหรือลู่ออกก็ทำได้ไม่ยาก และสำหรับเนื้อหาในบทนี้นั้นจะเป็นการตรวจสอบการลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรมของที่ไม่ได้อยู่ในรูปแบบที่กล่าวมาข้างต้นซึ่งต้องเลือกใช้วิธีการตรวจสอบที่เหมาะสมกับรูปแบบของอนุกรม นั้น ๆ สำหรับอนุกรมที่แต่ละพจน์เป็นบวกทั้งหมดนั้น จะใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ การทดสอบด้วยอัตราส่วน การทดสอบด้วยปริพันธ์ ทดสอบด้วยราก นอกจากนี้ถ้าอนุกรมที่เราจะตรวจสอบมีพจน์เป็นจำนวนบวกและลบสลับกันนั้นจะใช้วิธีการตรวจสอบของอนุกรมสลับ และนอกจากนี้ยังมีอนุกรมรูปแบบเฉพาะอีกรูปแบบหนึ่งของอนุกรมกำลังได้แก่ อนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอริน

8.1 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม

การทดสอบว่าอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมที่จะกล่าวในวิธีดังกล่าวนี้ก่อนอื่นจะทบทวนอนุกรมเรขาคณิตและอนุกรม p ดังนี้

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า } |r| < 1 \text{ และลู่ออก ถ้า } |r| \geq 1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า } p > 1 \text{ และลู่ออก ถ้า } 0 < p \leq 1$$

การทดสอบการลู่เข้าสำหรับอนุกรมวิธีต่าง ๆ ที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็น การตรวจสอบอนุกรมที่แต่ละพจน์นั้นเป็นจำนวนบวก ซึ่งจะมีวิธีการตรวจสอบแต่ละวิธีที่แตกต่างกันออกไป การเลือกวิธีการตรวจสอบนั้นไม่มีวิธีการใดที่ง่ายและสะดวกที่สุด ซึ่งต้องศึกษาและทำความเข้าใจว่าอนุกรมที่เราจะตรวจสอบนั้นอยู่ในรูปแบบที่เหมาะสมกับการใช้การทดสอบด้วยวิธีการใดซึ่งผู้เขียนได้รวบรวมวิธีการตรวจสอบในรูปแบบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

8.1.1 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ

Gilbert. S. (2018 : 375 - 376) และสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2554 : 183 - 184) ได้ให้ทฤษฎีสำหรับการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ รวมทั้งตัวอย่าง ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.1 (การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ)

กำหนดให้ $0 \leq a_n \leq b_n$ สำหรับทุกค่า n

1. ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออกแล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 8.1 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จาก $2+3^n > 3^n$ ทุกค่าของจำนวนเต็มบวก n

$$\text{จึงได้ว่า } a_n = \frac{1}{2+3^n} \leq \frac{1}{3^n} = b_n$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $r = \frac{1}{3}$ ซึ่ง $|r| < 1$ แสดงว่าเป็นอนุกรมลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 8.1 จึงได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.2 จงตรวจสอบ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+10}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จาก $n+10 \leq 11n$ ทุกค่าของจำนวนเต็มบวก n

$$\text{จึงได้ว่า } a_n = \frac{1}{11n} \leq \frac{1}{n+10} = b_n \text{ ทุกค่าของจำนวนเต็มบวก } n$$

$$\text{เนื่องจาก } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{11n} = \frac{1}{11} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมฮาร์มอนิกซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก

โดยทฤษฎีบท 8.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+10}$ จึงเป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+10}$ จึงเป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 8.3 จงตรวจสอบว่า $\sum \frac{1}{2n^3 + 1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จาก $2n^3 + 1 \geq 2n^3$ ทุกค่าของจำนวนเต็มบวก n

$$\text{จึงได้ว่า } a_n = \frac{1}{2n^3 + 1} \leq \frac{1}{2n^3} = b_n$$

$$\text{เนื่องจาก } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ เป็นอนุกรม p โดยที่ $p = 3 > 1$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 8.1 จึงได้ว่า $\sum \frac{1}{2n^3 + 1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น $\sum \frac{1}{2n^3 + 1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.4 จงตรวจสอบว่า $\sum \frac{1}{3n + 1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จาก $3n + 1 \leq 3n + 3 = 3(n + 1)$ ทุกค่าของจำนวนเต็มบวก n

$$\text{จึงได้ว่า } a_n = \frac{1}{3(n + 1)} < \frac{1}{3n + 1} = b_n$$

$$\text{เนื่องจาก } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3(n + 1)} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 1}$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 1}$ เป็นอนุกรมฮาร์มอนิกซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก

โดยทฤษฎีบท 8.1 จึงได้ว่า $\sum \frac{1}{3n + 1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้น $\sum \frac{1}{3n + 1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ในการเปรียบเทียบอนุกรมที่ทราบว่าลู่เข้าหรือลู่ออกนั้น ต้องอาศัยประสบการณ์และกลวิธี

บางอย่างช่วย เช่น $\sum \frac{1}{2^n - 1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ซึ่งเทียบกับ $\sum \frac{1}{2^n}$ ไม่ได้ แต่สามารถเทียบได้กับ

$$\frac{1}{2^n - 1} \leq \frac{1}{2^n - 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}(2 - 1)} = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ สำหรับ } n \geq 1$$

8.1.2 การทดสอบด้วยอัตราส่วน

Heinbockel. J.H. (2012 : 302-303) ได้ให้ทฤษฎีบทสำหรับการทดสอบด้วยอัตราส่วนรวมทั้งตัวอย่าง ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.2 (การทดสอบด้วยอัตราส่วน)

เมื่อ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่มีพจน์เป็นบวก และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R$

1. ถ้า $R < 1$ แล้วอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า
2. ถ้า $R > 1$ แล้วอนุกรม $\sum a_n$ ลู่ออก
3. ถ้า $R = 1$ แล้วการทดสอบสรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 8.5 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{20}}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จาก $a_n = \frac{n^{20}}{2^n}$ และ $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{20}}{2^{n+1}}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{20}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^{20}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{20} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{20} \\ &= \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{20}}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.6 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จาก $a_n = \frac{1}{n!}$ และ $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

$$\text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(n!)} \cdot \frac{n!}{1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.7 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จาก $a_n = \frac{2^n}{n^2}$ และ $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$

$$\begin{aligned}
\text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 2^n}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + n + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \\
&= 2 > 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

8.1.3 การทดสอบโดยปริพันธ์

Jungic. V. and Mulholland. J. (2018 : 124) และ Heinbockel. J.H. (2012 : 289) ได้ให้
ทฤษฎีบทสำหรับการทดสอบโดยปริพันธ์ รวมทั้งตัวอย่างไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.3 (การทดสอบโดยปริพันธ์)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันลด ต่อเนื่องและมีค่าเป็นบวกบนช่วง $[1, \infty)$ และ

$$a_n = f(n) \text{ ทุกจำนวนเต็มบวก } n \text{ แล้ว อนุกรม } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ และ } \int_1^{\infty} f(x) dx$$

ลู่เข้าทั้งคู่หรือลู่ออกทั้งคู่

ตัวอย่าง 8.8 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ ทราบมาก่อนแล้วว่าอนุกรมฮาร์มอนิกลู่ออก ในที่จะใช้การทดสอบโดยปริพันธ์

เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x}$ เป็นฟังก์ชันลด ต่อเนื่องและมีค่าเป็นบวกบนช่วง $[1, \infty)$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln |x| \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln b - \ln 1] \\ &= \infty \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 8.9 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ ทราบมาก่อนแล้วว่าอนุกรม p เป็นอนุกรมลู่เข้าแต่ในที่นี้จะใช้การทดสอบโดยปริพันธ์

เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x^2}$ เป็นฟังก์ชันลด ต่อเนื่องและมีค่าเป็นบวกบนช่วง $[1, \infty)$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{b} + 1 \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{b} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.10 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ เป็นฟังก์ชันลด ต่อเนื่องและมีค่าเป็นบวกบนช่วง $[1, \infty)$

หาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{1}{x^2+1}$ ด้วยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรจะได้

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln |u|]_1^b \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(x^2+1)]_1^b \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(b^2+1) - \ln 2] \\ &= \infty \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

8.1.4 การทดสอบด้วยราก

สมศักดิ์ ลีมีศิริลักษณ์ (2540 : 27) ได้ให้ทฤษฎีบทสำหรับการทดสอบด้วยราก รวมทั้งตัวอย่างดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.4 การทดสอบด้วยราก

กำหนด $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่มีพจน์ไม่เป็นจำนวนลบและ $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$

1. ถ้า $r < 1$ แล้วอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า
2. ถ้า $r > 1$ แล้วอนุกรม $\sum a_n$ ลู่ออก
3. ถ้า $r = 1$ แล้วการทดสอบสรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 8.11 จงตรวจสอบว่า $\sum \left(\frac{2n^3}{n+1} \right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $a_n = \left(\frac{2n^3}{n+1} \right)^n$

$$\begin{aligned}
\text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^3}{n+1}\right)^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum \left(\frac{2n^3}{n+1}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 8.12 จงตรวจสอบว่า $\sum \frac{n}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออกหรือลู่เข้า

วิธีทำ เนื่องจาก $a_n = \frac{n}{2^n}$

$$\begin{aligned}
\text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum \frac{n}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

8.2 อนุกรมสลับ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการลู่เข้าและออกของอนุกรมที่มีพจน์เป็นบวกและลบสลับกันซึ่งเรียกว่าอนุกรมสลับ โดยทั่วไปอนุกรมสลับจะอยู่ในรูปใดรูปหนึ่งต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots \\
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n + \dots
\end{aligned}$$

เมื่อ $a_n > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n โดย เอกชัย หลายศิริกุล (2559 : 29-31) และสาขาวิชา คณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2554 : 194-195) ได้ให้ทฤษฎีบทเพื่อใช้เป็นหลักในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมสลับ ดังนี้

ทฤษฎีบท 8.5 (การทดสอบอนุกรมสลับ)

กำหนดให้ $a_n > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n อนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$
 และ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ลู่เข้า ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $a_n > a_{n+1}$ ทุกจำนวนเต็มบวก n
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

ตัวอย่าง 8.13 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จาก $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} \right)$ เป็นอนุกรมสลับที่มี $a_n = \frac{1}{n}$

และ 1. $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.14 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+3}{n(n+1)} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จาก $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+3}{n(n+1)} \right)$ เป็นอนุกรมสลับที่มี $a_n = \frac{n+3}{n(n+1)}$

พิจารณา $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{n+3}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^2 + 4n}{n^2 + 5n + 6} \\
&= \frac{n^2 + 4n}{(n^2 + 4n) + (n + 6)} \\
&< 1
\end{aligned}$$

แสดงว่า 1. $a_n > a_{n+1}$

และ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \\
&= 0 \times \frac{1+0}{1+0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+3}{n(n+1)} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

จะมีบางอนุกรมเช่น $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \dots$ ซึ่งไม่ได้สอดคล้องกับ

รูปแบบของอนุกรมใดที่ได้กล่าวมาแล้ว และยังไม่เป็นอนุกรมสลับอีกด้วย จึงได้มีการศึกษาวิธีการ

ทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมดังกล่าวโดย สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา (2546 : 276) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 8.1

ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแต่อนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่ออก แล้วเรียก $\sum a_n$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

ถ้าอนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่เข้าแล้วเรียก $\sum a_n$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างสมบูรณ์

ตัวอย่าง 8.15 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ เป็นอนุกรม p ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างสมบูรณ์

ตัวอย่าง 8.16 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

เป็นอนุกรมฮาร์มอนิกซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

นอกจากการใช้ทฤษฎีบทข้างต้นในการตรวจสอบการลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขแล้วยังมีทฤษฎีบทที่ใช้ในการตรวจสอบดังกล่าวโดย Guichard. D. (2019 : 276) ได้ให้ทฤษฎีบท และตัวอย่างไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.6

ถ้าอนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่เข้าแล้วอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.17 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{\cos n}{n^2}$

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$

และ $a_n = \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} = b_n$ ทุกค่าของจำนวนเต็มบวก n

เนื่องจาก $\frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรม p ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า ($p=2$)

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

เอกชัย หลายศิริกุล (2559 : 31) ได้ให้ทฤษฎีบทการทดสอบการเป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ พร้อมทั้งตัวอย่างดังนี้

ทฤษฎีบท 8.7

สำหรับอนุกรม $\sum a_n$ โดยที่แต่ละ $a_n \neq 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$

1. ถ้า $r < 1$ แล้ว อนุกรมลู่เข้าอย่างสมบูรณ์
2. ถ้า $r > 1$ หรือ $r = \infty$ แล้ว อนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $r = 1$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 8.18 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างสมบูรณ์หรือลู่ออก

วิธีทำ จาก $a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$ และ $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{2^{n+1}}$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^n n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{2 \times 2^n} \cdot \frac{2^n}{n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{2n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right)}{2n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์

ตัวอย่าง 8.19 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{100}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างสมบูรณ์หรือลู่ออก

วิธีทำ จาก $a_n = \frac{(2n)!}{n^{100}}$ และ $a_{n+1} = \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)^{100}}$

$$\begin{aligned}
\text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)^{100}} \cdot \frac{n^{100}}{(2n)!} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{100}} \cdot \frac{n^{100}}{(2n)!} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2)(2n+1)[(2n)!]}{(n+1)^{100}} \cdot \frac{n^{100}}{(2n)!} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (2n+1)(2n+2) \left(\frac{n}{n+1} \right)^{100} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (4n^2 + 6n + 2) \left(\frac{n}{n+1} \right)^{100} \right| \\
&= \infty
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{100}}$ ลู่ออก

8.3 อนุกรมกำลัง

อนุกรมกำลังเป็นอนุกรมในรูปแบบเฉพาะในอีกรูปแบบหนึ่งโดย ดำรง ทิพย์โยธา และคณะ.
(2559 : 2) และเอกชัย หลายศิริกุล (2559 : 34) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 8.2

ให้ a และ $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ เป็นค่าคงตัว และ x เป็นตัวแปรของจำนวนจริง
อนุกรมกำลัง คืออนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

หรือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots + c_n (x-a)^n + \dots$$

เรียก c_n ว่า สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง และเรียก a ว่า ศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง
ถ้าอนุกรมกำลังลู่อเข้าสำหรับค่าที่แน่นอน x เราสามารถกำหนดฟังก์ชันของ x ได้ เช่น

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

หรือ

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

การลู่อเข้าของอนุกรมกำลังนั้นเป็นการทดสอบเพื่อหาค่า x ที่ทำให้อนุกรมกำลังนั้นลู่อเข้าซึ่งใน
ตัวอย่างต่อไปนี้จะใช้วิธีทดสอบด้วยอัตราส่วน

ตัวอย่าง 8.20 จงหาค่า x ที่ทำให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ ลู่อเข้า

วิธีทำ จาก $a_n = \frac{1}{n} x^n$ และ $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x \left(\frac{n}{n+1} \right) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
&= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\
&= |x|
\end{aligned}$$

อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $|x| < 1$ หรืออนุกรมลู่เข้าเมื่อ $-1 < x < 1$

อนุกรมลู่ออก เมื่อ $|x| > 1$ หรืออนุกรมลู่ออกเมื่อ $x < -1$ หรือ $x > 1$

สำหรับกรณีที่ $|x| = 1$ การทดสอบด้วยอัตราส่วนไม่ให้ข้อสรุป แยกพิจารณาดังนี้

กรณี $x = 1$

$$\text{จะได้ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \text{ เป็นอนุกรมฮาร์มอนิก ซึ่งลู่ออก}$$

กรณี $x = -1$

$$\text{จะได้ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

$$\text{เนื่องจาก } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ เป็นอนุกรมสลับที่มี } a_n = \frac{1}{n}$$

$$\text{และ } 1. \ a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$$

$$2. \ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{แสดงว่า } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ } -1 \leq x < 1$$

ตัวอย่าง 8.21 จงหาค่า x ที่ทำให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n n^2}$ ลู่เข้า

$$\text{วิธีทำ } \text{จาก } a_n = \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n n^2} \text{ และ } a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (x+1)^{n+1}}{2^{n+1} (n+1)^2}$$

$$\text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (x+1)^{n+1}}{2^{n+1} (n+1)^2} \cdot \frac{2^n n^2}{(-1)^n (x+1)^n} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)}{2(n+1)^2} \cdot n^2 \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} |x+1| \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} |x+1|
\end{aligned}$$

อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $\frac{1}{2}|x+1| < 1$ หรืออนุกรมลู่เข้าเมื่อ $-3 < x < 1$

อนุกรมลู่ออก เมื่อ $\frac{1}{2}|x+1| > 1$ หรืออนุกรมลู่ออกเมื่อ $x < -3$ หรือ $x > 1$

สำหรับกรณีที่ $\frac{1}{2}|x+1| = 1$ การทดสอบด้วยอัตราส่วนไม่ให้ข้อสรุป แยกพิจารณาดังนี้

กรณี $x = 1$

$$\text{จะได้ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\text{เนื่องจาก } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ เป็นอนุกรมสลับที่มี } a_n = \frac{1}{n}$$

$$\text{และ } 1. a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{แสดงว่า } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

กรณี $x = -3$

$$\text{จะได้ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{2^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ เป็นอนุกรม } p \text{ ซึ่งลู่เข้า}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n n^2} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ } -3 \leq x \leq 1$$

ตัวอย่าง 8.22 จงหาค่า x ที่ทำให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ลู่เข้า

$$\text{วิธีทำ จาก } a_n = \frac{x^n}{n!} \text{ และ } a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned}
\text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{1}{n+1} \\
&= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \\
&= |x|(0) < 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าทุกค่าของ x

ตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่าอนุกรมกำลังนั้นจะมีลักษณะของการลู่เข้าอยู่ 3 รูปแบบซึ่ง Heinbockel. J.H. (2012 : 30). ได้สรุปไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.8

สำหรับอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ หนึ่งในสามสิ่งต่อไปนี้จะเป็นจริงคือ

1. อนุกรมจะลู่เข้าสำหรับค่า $x = a$ ค่าเดียวเท่านั้น
2. อนุกรมจะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์สำหรับทุกค่าของ x
3. อนุกรมจะลู่เข้าสัมบูรณ์สำหรับค่า x ในช่วงจำกัด $(a-R, a+R)$ และลู่ออกถ้า $x < a-R$ หรือ $x > a+R$ ที่จุด $x = a-R$ และ $x = a+R$ อนุกรมอาจลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออกก็ได้แล้วแต่กรณี

สำหรับค่า R ในทฤษฎีบทเรียกว่า รัศมีแห่งการลู่เข้า และเรียกเซตของค่า x ทั้งหมดที่ได้ อนุกรมลู่เข้าว่า ช่วงแห่งการลู่เข้า ต่อไปจะเป็นตัวอย่างในการหาช่วงการลู่เข้า และรัศมีการลู่เข้าของ อนุกรมกำลัง

ตัวอย่าง 8.23 จงหารัศมีแห่งการลู่เข้าและช่วงการลู่เข้าของ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$

วิธีทำ จาก $a_n = \frac{(x-3)^n}{2^n}$ และ $a_{n+1} = \frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}}$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(x-3)^n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x-3}{2} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-3|}{2} \\
 &= \frac{|x-3|}{2}
 \end{aligned}$$

อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $\frac{|x-3|}{2} < 1$ หรือ $|x-3| < 2$

นั่นคืออนุกรมลู่เข้าเมื่อ $1 < x < 5$

อนุกรมลู่ออก เมื่อ $\frac{|x-3|}{2} > 1$ หรือ $|x-3| > 2$

นั่นคืออนุกรมลู่ออกเมื่อ $x < 1$ หรือ $x > 5$

สำหรับกรณีที่ $\frac{|x-3|}{2} = 1$ การทดสอบด้วยอัตราส่วนไม่ให้ข้อสรุป แยกพิจารณา ดังนี้

กรณี $x = 1$

$$\text{จะได้ } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ เป็นอนุกรมลู่ออก

กรณี $x = 5$

$$\text{จะได้ } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5-3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ เป็นอนุกรมลู่ออก

นั่นคือ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$ เป็นอนุกรม เมื่อ $1 < x < 5$

ดังนั้น รัศมีการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$ คือ 2 และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ (1, 5)

ตัวอย่าง 8.24 จงหารัศมีแห่งการลู่เข้าและช่วงการลู่เข้าของ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$

วิธีทำ จาก $a_n = \frac{(x-3)^n}{2^n}$ และ $a_{n+1} = \frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(x-3)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x-3}{2} \right| \\ &= \frac{|x-3|}{2} \end{aligned}$$

อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $\frac{|x-3|}{2} < 1$ หรือ $|x-3| < 2$ นั่นคืออนุกรมลู่เข้าเมื่อ $1 < x < 5$

อนุกรมลู่ออก เมื่อ $\frac{|x-3|}{2} > 1$ หรือ $|x-3| > 2$ นั่นคืออนุกรมลู่ออกเมื่อ $x < 1$

หรือ $x > 5$

สำหรับกรณีที่ $\frac{|x-3|}{2} = 1$ การทดสอบด้วยอัตราส่วนไม่ให้ข้อสรุป

แยกพิจารณาดังนี้

กรณี $x = 1$

$$\text{จะได้ } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ เป็นอนุกรมลู่ออก

กรณี $x = 5$

$$\text{จะได้ } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5-3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \text{ เป็นอนุกรม } p \text{ ซึ่งลู่เข้า}$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ เป็นอนุกรมลู่ออก

นั่นคือ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $1 < x < 5$

ดังนั้น รัศมีการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$ คือ 2 และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(1, 5)$

ตัวอย่าง 8.25 จงหารัศมีแห่งการลู่เข้าและช่วงการลู่เข้าของ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^n}{3^n n}$

วิธีทำ จาก $a_n = \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^n}{3^n n}$ และ $a_{n+1} = \frac{(-1)^{(n+1)+1} 2^{n+1} x^{n+1}}{3^{n+1} (n+1)}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{(n+1)+1} 2^{n+1} x^{n+1}}{3^{n+1} (n+1)} \cdot \frac{3^n n}{(-1)^{n+1} 2^n x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1) 2 x n}{3 (n+1)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-2x}{3} \right| \left(\frac{n}{n+1} \right) \\ &= \frac{2}{3} |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \\ &= \frac{2}{3} |x| \end{aligned}$$

อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $\frac{2}{3}|x| < 1$ หรือ $|x| < \frac{3}{2}$

นั่นคืออนุกรมลู่เข้าเมื่อ $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$

อนุกรมลู่ออก เมื่อ $\frac{2}{3}|x| > 1$ หรือ $|x| > \frac{3}{2}$

นั่นคืออนุกรมลู่ออกเมื่อ $x < -\frac{3}{2}$ หรือ $x > \frac{3}{2}$

สำหรับกรณีที่ $\frac{2}{3}|x| = 1$ การทดสอบด้วยอัตราส่วนไม่ให้ข้อสรุป

แยกพิจารณาดังนี้

กรณี $x = \frac{3}{2}$

$$\text{จะได้ } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n \left(\frac{3}{2}\right)^n}{3^n n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)$$

เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)$ เป็นอนุกรมสลับที่มี $a_n = \frac{1}{n}$

$$\text{และ } 1. a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

แสดงว่า $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

$$\text{กรณี } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{จะได้ } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n \left(-\frac{3}{2} \right)^n}{3^n n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \left(\frac{1}{n} \right) = -1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$ เป็นอนุกรมฮาร์มอนิก ซึ่งลู่ออก

แสดงว่า $-1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้น รัศมีการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^n}{3^n n}$ คือ $\frac{3}{2}$ และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right]$

8.4 อนุกรมเทย์เลอร์

ในหัวข้อนี้เราต้องการจะศึกษาว่า ถ้ากำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ใด ๆ มาให้แล้วจะมีเงื่อนไขอะไรที่ทำให้สามารถกระจาย $f(x)$ ออกเป็นอนุกรมกำลังได้ ซึ่งฟังก์ชันที่แทนด้วยอนุกรมกำลังได้นั้นจะต้องมีอนุพันธ์ทุกอันดับ ดังที่ อีระศักดิ์ อูร์จนานนท์ (2558 : 443) ได้แสดงไว้ดังนี้

กำหนดให้อนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

ลู่เข้าในช่วง $-R < x-a < R$ ($R > 0$) ผลบวกของอนุกรมย่อมหาได้ สำหรับแต่ละ x ในช่วงนี้

และสามารถกำหนดฟังก์ชันได้

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad \dots(1)$$

$$a-R < x < a+R$$

ต่อไปเป็นการหาความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ กับฟังก์ชัน โดย

อาศัยกระบวนการอย่างตรงไปตรงมา เริ่มแรกแทนค่า $x = a$ ในสมการ (1) จะได้ได้ว่า

$$f(a) = a_0$$

หาอนุพันธ์ (1) จะได้

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \dots$$

แทนค่า $x = a$ จะได้

$$f'(a) = a_1$$

เมื่อหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างต่อไปเรื่อย ๆ และแทนค่า $x = a$ จะได้

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + 4 \cdot 3a_4(x-a)^2 + 5 \cdot 4a_5(x-a)^3 + \dots$$

$$f''(a) = 2a_2 \text{ หรือ } a_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5(x-a)^2 + \dots$$

$$f'''(a) = 3 \cdot 2a_3 \text{ หรือ } a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

เมื่อดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ย่อมสังเกตแบบได้ชัดเจน และหาสูตรทั่วไปสำหรับสัมประสิทธิ์

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ ได้

$$a_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

กระบวนการที่ใช้เพื่อหาความสัมพันธ์ข้างต้นนั้น ยังคงทำในช่วงของการรู้เข้าเหมือนเดิม เมื่อแทนค่ากลับ สัมประสิทธิ์ a_n ใน (1) จะได้

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n$$

Strang.G. (2020 : 387) ได้แสดงบทนิยามของอนุกรมเทย์เลอร์ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 8.2

อนุกรมกำลังที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \dots \end{aligned}$$

เรียกอนุกรมดังกล่าวว่า **อนุกรมเทย์เลอร์** ของ f รอบจุด a สำหรับกรณีที่ $a = 0$

เรียกว่า **อนุกรมแมคลอริน**

ตัวอย่าง 8.26 จงกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \sin x$ รอบจุด $a = \frac{\pi}{4}$

วิธีทำ จาก $f(x) = \sin x$ และ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ และ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(x) = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ และ $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'''(x) = \frac{d}{dx}(-\sin x) = -\cos x$ และ $f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ และ $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

อนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด $a = \frac{\pi}{4}$ จะได้

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1!} + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \right] + \dots$$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \sin x$ รอบจุด $a = \frac{\pi}{4}$ คือ

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \right] + \dots$$

ตัวอย่าง 8.27 จงกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \frac{1}{x}$ รอบจุด $z_0 = 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $f(1) = \frac{1}{1} = 1$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$ และ $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$

$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$ และ $f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 = 2!$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{x^3} \right) = -\frac{6}{x^4} & \text{และ} & \quad f'''(1) = -\frac{6}{1^4} = -6 = -3! \\
f^{(4)}(x) &= \frac{d}{dx} \left(-\frac{6}{x^4} \right) = \frac{24}{x^5} & \text{และ} & \quad f^{(4)}(1) = \frac{24}{1^5} = 24 = 4! \\
&\vdots
\end{aligned}$$

อนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด $x = 1$ จะได้

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(1) + \frac{f'(1)(x-1)}{1!} + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!} + \dots \\
\frac{1}{x} &= 1 - \frac{1!(x-1)}{1!} + \frac{2!(x-1)^2}{2!} - \frac{3!(x-1)^3}{3!} + \dots \\
\frac{1}{x} &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n
\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \frac{1}{x}$ รอบจุด $a = 1$ คือ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a-1)^n$

ตัวอย่าง 8.28 กำหนดให้ $f(x) = \ln(1+x)$ จงกระจายอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \ln(1+x)$ และ $f(0) = \ln(1+0) = 0$

$$\text{จะได้} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{และ} \quad f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{และ} \quad f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad \text{และ} \quad f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \quad \text{และ} \quad f^{(4)}(0) = -\frac{6}{(1+0)^4} = -6 = -3!$$

จากอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)$ จะได้

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots \\
\log(1+x) &= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}
\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(z) = \ln(1+z)$ คือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$

การกระจายอนุกรมแมคลอรินในตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ที่กำหนดให้ นั้นไม่ซับซ้อนทำให้สามารถกระจายอนุกรมต่าง ๆ ได้ไม่ยาก แต่ถ้าบางครั้งที่ $f(x)$ ที่กำหนดให้ นั้นอยู่ในภาพที่ซับซ้อน การคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอรินโดยวิธีที่ได้จากทฤษฎีบทนั้นจะค่อนข้างยุ่งยาก และเสียเวลา ดังนั้นจึงมีอีกวิธีที่สามารถกระจายอนุกรมดังกล่าวด้วยวิธีการแทนด้วยฟังก์ชันพื้นฐาน ซึ่ง สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2554 : 211) ได้สรุปอนุกรมแมคลอรินพื้นฐานบางอนุกรมดังต่อไปนี้

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ ทุกค่าของ x
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$ ทุกค่าของ x
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$ ทุกค่าของ x
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$ เมื่อ $|x| < 1$
5. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$ เมื่อ $|x| < 1$
6. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ เมื่อ $|x| < 1$
7. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ เมื่อ $|x| < 1$

สำหรับตัวอย่างต่อไปจะเป็นการกระจายอนุกรมแมคลอรินจากอนุกรมแมคลอรินพื้นฐานที่ได้กล่าวมาแล้วทั้ง 7 อนุกรม

ตัวอย่าง 8.29 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ จงกระจายอนุกรมแมคลอริน ของ $f(x)$

วิธีทำ จากอนุกรมแมคลอรินของ

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \text{ เมื่อ } |x| < 1$$

แทน x ด้วย x^3 จะได้

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + (x^3)^2 - (x^3)^3 + \dots \text{ เมื่อ } |x^3| < 1$$

ดังนั้น $\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + (x^3)^2 - (x^3)^3 + \dots \text{ เมื่อ } |x^3| < 1$

ตัวอย่าง 8.30 กำหนดให้ $f(x) = \ln(1+x^2)$ จงกระจายอนุกรมแมคลอริน ของ $f(x)$

วิธีทำ จากอนุกรมแมคลอรินของ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \text{ เมื่อ } |x| < 1$$

แทน x ด้วย x^2 จะได้

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \frac{(x^2)^4}{4} + \dots \text{ เมื่อ } |x^2| < 1$$

ดังนั้น $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \frac{(x^2)^4}{4} + \dots \text{ เมื่อ } |x^2| < 1$

ตัวอย่าง 5.24 กำหนดให้ $f(x) = \cos(x^2 + 1)$ จงกระจายอนุกรมแมคลอริน ของ $f(x)$

วิธีทำ จากอนุกรมแมคลอรินของ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ เมื่อ } |x| < \infty$$

แทน x ด้วย $x^2 + 1$ จะได้

$$\cos(x^2 + 1) = 1 - \frac{(x^2 + 1)^2}{2!} + \frac{(x^2 + 1)^4}{4!} - \frac{(x^2 + 1)^6}{6!} + \dots$$

เมื่อ $|x^2 + 1| < \infty$

ดังนั้น $\cos(x^2 + 1) = 1 - \frac{(x^2 + 1)^2}{2!} + \frac{(x^2 + 1)^4}{4!} - \frac{(x^2 + 1)^6}{6!} + \dots \text{ เมื่อ } |x^2 + 1| < \infty$

8.5 สรุปท้ายบท

การทดสอบการลู่เข้าสำหรับอนุกรมที่แต่ละพจน์เป็นจำนวนบวกนั้นเราสามารถใช่วิธี การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ การทดสอบด้วยอัตราส่วน การทดสอบโดยปริพันธ์ (Integral test) และการทดสอบด้วยราก ขึ้นอยู่ที่ว่าอนุกรมเราอยู่ในรูปแบบที่เหมาะสมกับการใช้วิธีการตรวจสอบแบบไหน ส่วนอนุกรมที่มีพจน์เป็นจำนวนบวกและลบนั้นถ้าอนุกรมอยู่ในรูปแบบบวกลบสลับกันจะเรียกว่าอนุกรมสลับสำหรับการทดสอบการลู่เข้านั้นเราจะใช้หลักการที่ว่าถ้า $a_n > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

อนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ลู่เข้า ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $a_n > a_{n+1}$ ทุกจำนวนเต็มบวก n
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

แต่ถ้ายังไม่เป็นอนุกรมสลับแต่มีทั้งบวกและลบเราจะใช้วิธีตรวจสอบว่าอนุกรมนั้นลู่เข้าอย่างสมบูรณ์หรือ อนุกรมลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข สำหรับอนุกรมกำลังคืออนุกรมที่อยู่ในรูป

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

การลู่เข้าของอนุกรมกำลังนั้นเป็นการทดสอบเพื่อหาค่า x ที่ทำให้อนุกรมกำลังนั้นลู่เข้าซึ่งสามารถตรวจสอบการลู่เข้าโดยวิธีทดสอบอัตราส่วนเพื่อหาช่วงการลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้า

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

1. จงใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\sum \frac{1}{5n^2 - n}$

1.2 $\sum \frac{3}{n^2 + 1}$

1.3 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - n}$

1.4 $\sum \frac{2}{n^4 + n}$

2. จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\sum \frac{3^n}{n!}$

2.2 $\sum \frac{3^n}{n^2}$

2.3 $\sum \frac{1}{5n}$

2.4 $\sum n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2.5 $\sum \frac{n!}{n^3}$

2.6 $\sum \frac{n}{n^2 + 1}$

2.7 $\sum \left(\frac{4n+2}{8n-1}\right)^n$

2.8 $\sum \left(\frac{n}{100}\right)^n$

2.9 $\sum \frac{n}{5^n}$

2.10 $\sum (1 - e^{-n})^n$

3. จงใช้ทฤษฎีบท 8.5 แสดงว่าอนุกรมสลับต่อไปนี้ลู่เข้า

3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

3.2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3^n}$

4. จงใช้ทฤษฎีบท 8.6 ตรวจสอบว่าอนุกรมสลับต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

4.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n$

4.2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$

4.3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n^2}$

4.4 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5^n}$

5. จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

$$5.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n}$$

$$5.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{4/3}}$$

$$5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2}$$

$$5.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

$$5.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n+1}$$

$$5.6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n(n+3)}$$

$$5.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n^3 + 1}$$

$$5.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 + 1)}{n^3 + 2}$$

6. จงหารัศมีแห่งการลู่เข้าและช่วงการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

$$6.1 \sum_{n=1}^{\infty} 3(x-2)^n$$

$$6.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$6.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n}$$

$$6.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (x-2)^n}{n}$$

$$6.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+4}$$

$$6.6 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n$$

$$6.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n^3}$$

$$6.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$$

$$6.9 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

$$6.10 \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$$

7. จงกระจายฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$ เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบ $x = 1$

8. จงกระจายฟังก์ชัน $f(x) = \cos x$ เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบ $x = \frac{\pi}{4}$

9. กำหนด $f(x) = e^{-2x}$ จงหาอนุกรมแมคลอริน

10. กำหนด $f(x) = \sin 3x$ จงหาอนุกรมแมคลอริน

11. จงกระจายอนุกรมแมคลอริน ของ $f(x)$ โดยใช้วิธีการแทนด้วยฟังก์ชันพื้นฐานเมื่อกำหนดให้

$$11.1 \quad f(x) = \sin(x^2 + 1)$$

$$11.2 \quad f(x) = \frac{1}{2-x}$$

$$11.3 \quad f(x) = \frac{1}{2+x}$$

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{2+x}\right)$$

เอกสารอ้างอิง

ดำรง ทิพย์โยธา และคณะ. (2559). **แคลคูลัส 2**. กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธีระศักดิ์ อัจฉนนท์. (2558). **แคลคูลัส 3**. ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์.

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. (2554).

แคลคูลัส 2 มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา. (2546). **แคลคูลัสเล่มที่ 4**. กรุงเทพมหานคร : พิกซ์การพิมพ์.

สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2540). **แคลคูลัสขั้นสูง**. กรุงเทพมหานคร : แมกรอ-ฮิล อินเทอร์เน็ตเนชั่นแนล
อินเทอร์เน็ตไพลส์.

เอกชัย หลายศิริกุล. (2559). **แคลคูลัส 2**. พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยนเรศวร.

Gilbert. S. (2018). **Calculus**. Massachusetts : MIT Department of Mathematics.

Guichard. D. (2019). **Single Variable Calculus**. Washington : Whitman College.

Heinbockel. J.H. (2012). **Introduction to Calculus Volume I**. Norfolk : Old Dominion
University.

Jungic. V. and Mulholland. J. (2018). **Calculus II**. Canada : Department of
Mathematics Simon Fraser University.

Strang.G. (2020). **Calculus**. India : Wellesley Publishers.

