

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7

ลำดับและอนุกรม

เนื้อหาประจำบท

1. ลำดับ
2. การลู่อเข้าของลำดับ
3. อนุกรม
4. อนุกรมเรขาคณิตและอนุกรมฮาร์มอนิก

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจความหมายและสัญลักษณ์ของลำดับจำกัดและลำดับอนันต์
2. สามารถเขียนลำดับให้อยู่ในรูปแบบกราฟได้
3. สามารถตรวจสอบการลู่อเข้าของลำดับจากกราฟได้
4. สามารถหาลิมิตของลำดับได้
5. ตรวจสอบการลู่อเข้าและลู่อออกลำดับ ได้
6. เข้าใจความหมายและสัญลักษณ์ของอนุกรมจำกัดและอนุกรมอนันต์
7. สามารถหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมที่กำหนดให้ได้
8. ตรวจสอบการลู่อเข้าลู่อออกของอนุกรมโดยพิจารณาจากลำดับของผลบวกย่อย
9. สามารถตรวจสอบอนุกรมที่กำหนดให้ได้ว่า เป็นอนุกรมเรขาคณิตหรือไม่เป็นและถ้าเป็นอนุกรมเรขาคณิตแล้วสามารถหาผลบวกอนุกรมได้
10. สามารถบอกรูปทั่วไปของอนุกรมฮาร์มอนิกได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 ลำดับ
 - 1.2 การลู่อเข้าของลำดับ
 - 1.3 อนุกรม
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
 - 2.1. ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับลำดับและอนุกรมเพิ่มเติม
 - 2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation
3. ใบงาน

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. การตอบคำถาม
3. ทดสอบท้ายชั่วโมง
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 7

ลำดับและอนุกรม

ลำดับเป็นฟังก์ชันซึ่งโดเมนเป็นเซตย่อยของจำนวนเต็มบวก ถ้าโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ จะเรียกลำดับนั้นว่าลำดับจำกัด และถ้าโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots\}$ จะเรียกลำดับนั้นว่าลำดับอนันต์ โดยทั่วไปคำว่าลำดับ หมายถึงการนำสิ่งต่าง ๆ มาจัดเรียงต่อเนื่องกัน เช่น ลำดับของจำนวนเต็มคู่ ลำดับของวันเดือนปี ลำดับของขนาด หรือลำดับของเหตุผล ในคณิตศาสตร์คำว่าลำดับ ใช้เรียกจำนวนที่เรียงกันอย่างมีกฎเกณฑ์หรือมีสูตร ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์แล้วเรียกผลบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ว่าอนุกรมจำกัด ในกรณีที่ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ จะเรียกผลบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ ว่าอนุกรมอนันต์ สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะศึกษา ลำดับ และอนุกรมอนันต์ การทดสอบการลู่เข้าในรูปแบบต่าง ๆ ของทั้งลำดับและอนุกรม

7.1 ลำดับ

ธัญยศ จำปาหวาย (2564 : 1-5) และสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2554 : 154) กล่าวว่าลำดับเลขอนันต์ หรือเรียกง่าย ๆ ว่า ลำดับ คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าลำดับเป็นฟังก์ชันแต่โดยทั่วไปจะนิยมเขียนลำดับในรูปของ ตัวห้อย มากกว่าที่จะเขียนในรูปของฟังก์ชัน พิจารณาลำดับต่อไปนี้

1	2	3	4	$\dots, n \dots$	โดเมน
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots, a_n \dots$	ลำดับ

เมื่อ 1 จับคู่กับ a_1 2 จับคู่กับ a_2 3 จับคู่กับ a_3 ต่อเนื่องเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จำนวน $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ คือ พจน์ ของลำดับ จำนวน a_n เรียกว่า พจน์ที่ n หรือ พจน์ทั่วไป (ของลำดับ) และเขียน $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ แทนลำดับ และยังนิยมเขียนแทนด้วย $\{a_n\}$

การเขียนลำดับอาจเขียนเฉพาะพจน์ต้น ๆ แสดงให้เห็นรูปแบบ เช่น ลำดับ $2, 4, 6, 8, 10, \dots$ หรือเขียนเป็นสูตรโดยชัดแจ้งของพจน์ที่ n ได้เป็น

$$a_n = 2n, n \geq 1$$

หรือเขียนเป็นสูตรเวียนเกิด

$$a_n = 2a_{n-1}, n \geq 2, a_1 = 1$$

ซึ่งลำดับที่แสดงทั้งสามแบบข้างต้นเป็นลำดับเดียวกัน

เอกชัย หลายศิริกุล (2559 : 1 - 2) และอำพล ธรรมเจริญ (2551 : 161) ได้แสดงตัวอย่างของลำดับที่เขียนสูตรโดยชัดแจ้ง และพจน์ต้น ๆ ของลำดับ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.1

$$1. \ a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1 \text{ หรือ } \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$$

คือลำดับ $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

$$2. \ b_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}, n \geq 1 \text{ หรือ } \left\{1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right\}$$

คือลำดับ $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \dots$

$$3. \ c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, n \geq 1 \text{ หรือ } \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$$

คือลำดับ $0, \frac{3}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{-4}{5}, \dots$

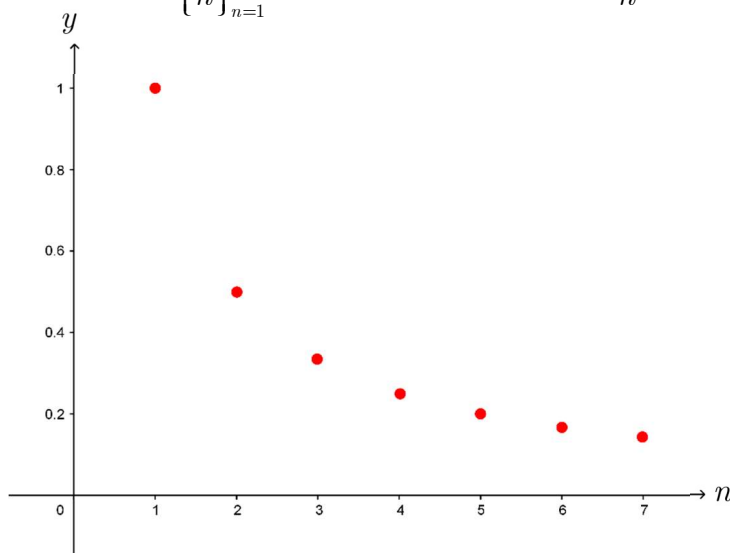
$$4. \ d_n = 0.999, n \geq 1 \text{ หรือ } \{0.999\}$$

คือลำดับ $0.999, 0.999, 0.999, 0.999, \dots$

นอกจากลำดับสามารถเขียนสูตรโดยชัดแจ้งและพจน์ต้น ๆ ของลำดับแล้วยังสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบกราฟของลำดับได้ดังที่ Guichard. D. (2019 : 258) ได้แสดงตัวอย่างไว้ดังนี้

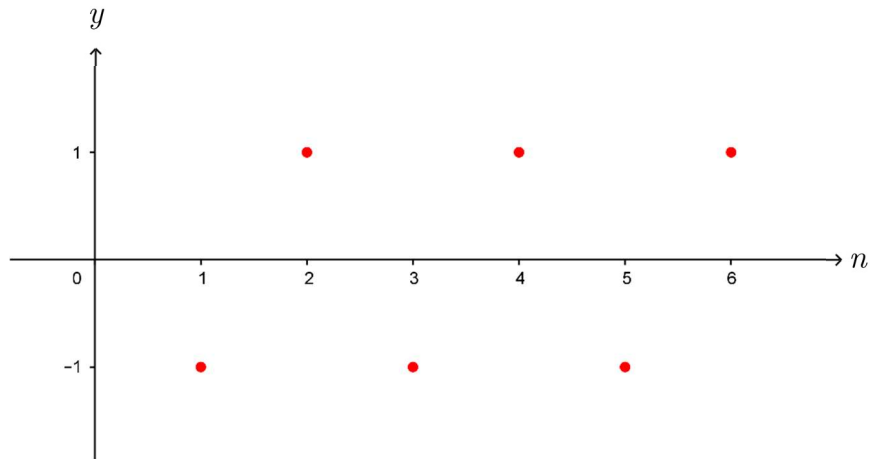
ตัวอย่าง 7.2 จงแสดง กราฟของลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

วิธีทำ กราฟของลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ คือกราฟของฟังก์ชัน $f(n) = \frac{1}{n}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$



ตัวอย่าง 7.3 จงแสดง กราฟของลำดับ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

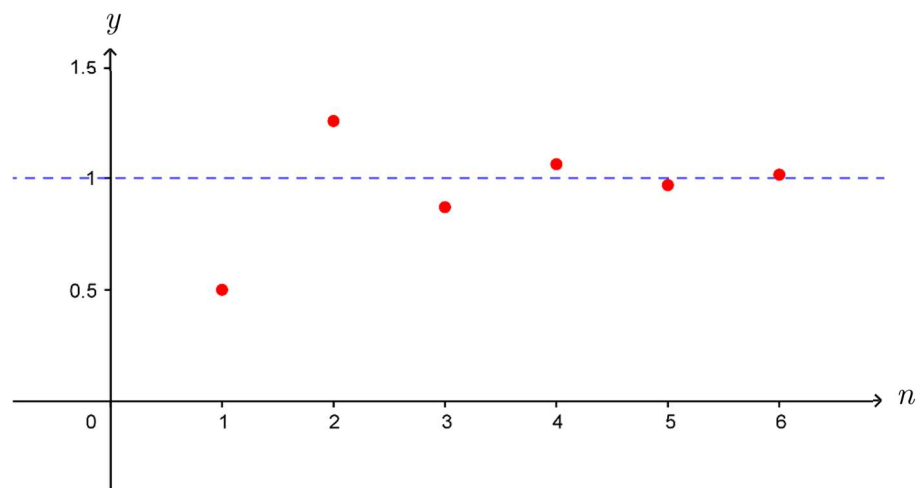
วิธีทำ กราฟของลำดับ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ คือกราฟของฟังก์ชัน $f(n) = (-1)^n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$



ตัวอย่าง 7.4 จงแสดง กราฟของลำดับ $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right\}_{n=1}^{\infty}$

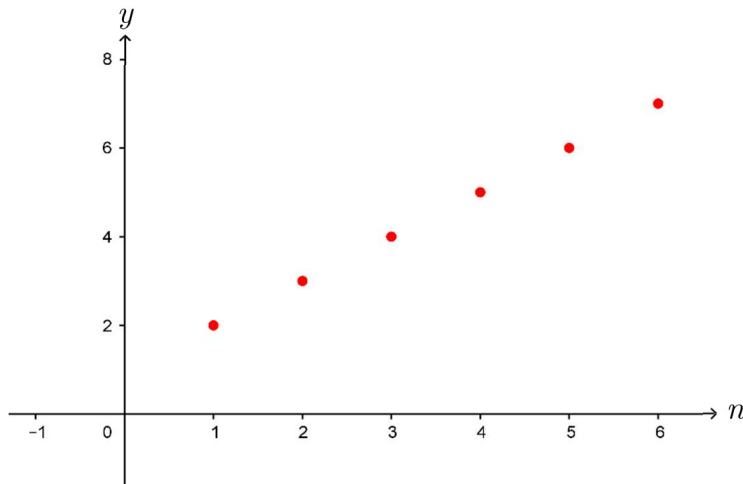
วิธีทำ กราฟของลำดับ $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right\}_{n=1}^{\infty}$ คือกราฟของฟังก์ชัน

$$f(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 \text{ เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$



ตัวอย่าง 7.5 จงแสดง กราฟของลำดับ $\{n + 1\}_{n=1}^{\infty}$

วิธีทำ กราฟของลำดับ $\{n + 1\}_{n=1}^{\infty}$ คือกราฟของฟังก์ชัน $f(n) = n + 1$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$



จะเห็นว่าลำดับในตัวอย่าง 7.2 – 7.5 มีลักษณะที่แตกต่างกัน กล่าวคือเมื่อ n มีค่ามาก พจน์ต่าง ๆ ของลำดับในตัวอย่าง 7.2 และ 7.4 มีแนวโน้มที่จะเข้าใกล้จำนวนบางจำนวนซึ่งเราสามารถคาดเดาได้ แต่สำหรับพจน์ต่าง ๆ ของลำดับในตัวอย่าง 7.3 และ 7.5 กลับไม่เข้าใกล้ค่าใดเลย จะเห็นว่า การอธิบายพฤติกรรมของลำดับเหล่านี้เป็นเพียงอาศัยการคาดเดาอย่างคร่าว ๆ การจะตรวจสอบว่าผลการคาดเดานี้ถูกต้องหรือไม่จำเป็นต้องใช้หลักทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและรัดกุมต่อไป

7.2 การลู่เข้าของลำดับ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงลำดับที่พจน์ลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง ซึ่งจะเรียกลำดับดังกล่าวนี้ว่าเป็น ลำดับลู่เข้า เช่น ลำดับ $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ คือลำดับ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ 0 สำหรับการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมอื่น ๆ นั้นสามารถตรวจสอบโดยใช้บทนิยามซึ่ง Veselin. J. and Jamie. M. (2018 : 110-112) และปณศยา พัฒนางกูร (2554 : 261) ได้แสดงบทนิยามไว้ดังนี้

บทนิยาม 7.1

ลำดับ $\{a_n\}$ เรียกว่า **ลู่เข้า** (converge) สู่จำนวนจริง L เขียนแทนด้วย

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ ถ้าสำหรับทุก } \xi > 0 \text{ มีจำนวนเต็มบวก } M \text{ โดยที่ ถ้า } n \geq M$$

แล้ว $|a_n - L| < \xi$ ลำดับที่ไม่ลู่เข้าเรียกว่า **ลู่ออก** (diverge)

จากทฤษฎีบทสรุปได้ว่าถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แต่ถ้า $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้าแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาค่าไม่ได้ นั่นคือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ และคณะ (2561 : 25-26) ได้แสดงทฤษฎีบท เพื่อนำไปใช้ในการตรวจสอบว่าลำดับลู่เข้าหรือลู่ออกโดยอาศัยบทนิยามที่ผ่านมามา ดังนี้

ทฤษฎีบท 7.1

กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = K$ และ c เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + K$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = cL$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot K$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{L}{K} \quad (K \neq 0)$$

จะเห็นว่าทฤษฎีของลำดับนั้นมีลักษณะคล้ายกับทฤษฎีในเรื่องลิมิตของฟังก์ชันที่ได้ศึกษามาแล้ว ซึ่งการพิสูจน์ก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันสำหรับตัวอย่างการตรวจสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมนี้ Guichard. D. (2019 : 259) ได้แสดงตัวอย่างไว้ดังนี้

ตัวอย่าง 7.6 จงพิจารณาว่า $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาลิมิตของลำดับนั้นด้วย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{พิจารณา} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ 1

ตัวอย่าง 7.7 จงพิจารณาว่า $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาลิมิตของลำดับนั้นด้วย

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)$$

$$= \left(0 \times \frac{1}{1+0} \right)$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ 0

ตัวอย่าง 7.8 จงพิจารณาว่า $\left\{\frac{3n-2}{5n-4}\right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาลิมิตของลำดับนั้นด้วย

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{5n-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{3n}{n} - \frac{2}{n} \right)}{n \left(\frac{5n}{n} - \frac{4}{n} \right)}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 - \frac{2}{n} \right)}{\left(5 - \frac{4}{n} \right)}$$

$$= \frac{3-0}{5-0}$$

$$= \frac{3}{5}$$

ดังนั้น $\left\{\frac{3x-2}{5x-4}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ $\frac{3}{5}$

ตัวอย่าง 7.9 จงพิจารณาว่า $\left\{ \frac{3n^2 + 1}{2n + 1} \right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาขีดจำกัดของลำดับนั้น

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{พิจารณา} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{2n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{3n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}{\left(2 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \times \frac{\left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}{\left(2 + \frac{1}{n} \right)} \right] \\ \text{เนื่องจาก} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n &= \infty \quad \text{และ} \quad = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}{\left(2 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{จะได้} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{2n + 1} = \infty$$

ดังนั้น $\left\{ \frac{3n^2 + 1}{2n + 1} \right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

การตรวจสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของลำดับในตัวอย่างที่ผ่านมานั้นเป็นการหาขีดจำกัดโดยตรงจากลำดับแต่ถ้าบางครั้งลำดับที่เราต้องการตรวจสอบนั้นหาขีดจำกัดโดยตรงได้ยากเราสามารถใช้อุปกรณ์ที่ เอกซัย หลายศิริกุล (2559 : 5-6) ได้แสดงไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 7.2

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ และมีจำนวนเต็มบวก N โดยที่ $a_n \leq c_n \leq b_n$ สำหรับทุกค่า $n \geq N$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างการใช้ทฤษฎีบท 7.2 ในการตรวจสอบการลู่เข้าของลำดับ

ตัวอย่าง 7.10 จงพิจารณาว่า $\left\{ \frac{\sin^2 n}{n} \right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาลิมิตของลำดับนั้น

วิธีทำ เนื่องจาก $0 \leq \sin n \leq 1$

แสดงว่า $0 \leq \sin^2 n \leq 1$

$$\text{และ} \quad 0 \leq \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

โดยทฤษฎีบท 7.2 จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0$

ดังนั้น $\left\{ \frac{\sin^2 n}{n} \right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ 0

7.3 อนุกรม

Heinbockel. J.H. 2012 : 282 ได้กล่าวว่าการประยุกต์ที่สำคัญอย่างหนึ่งของลำดับอนันต์ คือ การเขียนในรูปผลบวกอนันต์โดยทั่วไป ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับอนันต์ โดยที่ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด แล้ว

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

เรียกว่า อนุกรมอนันต์ (หรือ อนุกรม) จำนวน $a_1, a_2, a_3, \dots$ เรียกว่า พจน์ของอนุกรม ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงสำหรับจำนวนนับ n พิจารณาลำดับของผลบวกย่อย ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\dots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \end{aligned}$$

เรียก S_n ว่าผลบวกย่อย และเรียก $\{S_n\}$ ว่าลำดับผลบวกย่อย

อรฤติ สุทธิศรี (2548 : 518 – 519) ได้แสดงตัวอย่างการหาลำดับของผลบวกย่อยนั้น ไว้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.11 จงหา $\{S_5\}$ ของอนุกรม $\sum_1^{\infty} \frac{3}{10^n}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\{S_5\} = S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$

พิจารณา

$$S_1 = \frac{3}{10}$$

$$S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} = \frac{33}{100}$$

$$S_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = \frac{333}{1000}$$

$$S_4 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} = \frac{3333}{10000}$$

$$S_5 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^4} = \frac{33333}{100000}$$

ดังนั้น $\{S_5\} = \frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \frac{3333}{10000}, \frac{33333}{100000}$

ตัวอย่าง 7.12 จงหา S_n ของอนุกรม $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$\vdots$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

จะได้ $\{S_n\} = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots, \frac{1}{2^n} = \left\{ \frac{2^n - 1}{2^n} \right\}$

ดังนั้น $S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

เอกชัย หลายศิริกุล (2559 : 13) ได้ให้บทนิยามการลู่เข้าและลู่ออกของอนุกรมโดยพิจารณาจากลำดับผลบวกย่อยดังต่อไปนี้

บทนิยาม 7.2

จะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้า** ก็ต่อเมื่อลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ในกรณีนี้ เราจะนิยาม **ผลบวก** ของอนุกรมคือลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ กล่าวคือ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

ทุกอนุกรมที่ไม่เป็นอนุกรมลู่เข้า จะเรียกว่า **อนุกรมลู่ออก**

ตัวอย่าง 7.13 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ อนุกรมลู่ออกถ้าเป็น

อนุกรมลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ ให้

$$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$\vdots$

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

เนื่องจาก $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ จะได้

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

$$\text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 7.14 จงพิจารณาว่า $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ อนุกรมลู่ออกถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าจงหา

ผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ ให้ $a_n = \frac{1}{2^n}$

จะได้

$$a_1 = \frac{1}{2^1}$$

$$a_2 = \frac{1}{2^2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

เนื่องจาก $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ จะได้

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{2^n - 1}{2^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ 1

ตัวอย่าง 7.15 จงพิจารณาว่า $\sum_1^{\infty} \frac{3}{10^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ อนุกรมลู่ออกถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าจงหา

ผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ จาก $\sum_1^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$

ให้

$$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} \quad \dots(1)$$

และ

$$\frac{1}{10} S_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} \dots + \frac{3}{10^{n+1}} \quad \dots(2)$$

นำสมการ (1) - (2) จะได้

$$\left(S_n - \frac{1}{10} S_n \right) = \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} \right) - \left(\frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} \dots + \frac{3}{10^{n+1}} \right)$$

$$\frac{9}{10} S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} - \frac{3}{10^2} - \frac{3}{10^3} - \frac{3}{10^4} \dots - \frac{3}{10^{n+1}}$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}}$$

$$S_n = \frac{3}{10} \left(\frac{10}{9} \right) - \frac{3}{10^{n+1}} \left(\frac{10}{9} \right)$$

หรือ

$$S_n = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{10^n} \right]$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{10^n} \right] \\ &= \frac{1}{3} [1 - 0] \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_1^{\infty} \frac{3}{10^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{3}$

ตัวอย่าง 7.16 จงพิจารณาว่า $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ อนุกรมลู่ออกถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า

จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ จาก $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$

ผลบวกย่อยที่ n คือ S_n ต้องแยกพิจารณาดังนี้

กรณี n เป็นเลขคู่จะได้ $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots - 1 = 0$

กรณี n เป็นเลขคี่จะได้ $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 = 1$

แสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าไม่ได้เนื่องจากมีมากกว่า 1 ค่า

ดังนั้น $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

7.4 อนุกรมเรขาคณิตและอนุกรมฮาร์มอนิก

การตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การหาจากลำดับผลบวกย่อยนั้นเหมาะสำหรับการตรวจสอบอนุกรมที่สามารถหา S_n ได้ไม่ยาก แต่ถ้าอนุกรมที่จะตรวจสอบนั้นไม่สามารถหา S_n หรือหา S_n ได้ยากเนื่องจากอนุกรมมีมากมายหลายรูปแบบดังนั้นจึงต้องศึกษาอนุกรมที่มีรูปแบบเฉพาะ อีกสองรูปแบบได้แก่อนุกรมเรขาคณิตและอนุกรมฮาร์มอนิก

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2554 : 168) ได้อธิบายรูปแบบอนุกรมเรขาคณิต พร้อมทั้งทฤษฎีที่ใช้ในการตรวจสอบการลู่เข้าและลู่ออกของอนุกรมเรขาคณิตดังต่อไปนี้

อนุกรมที่มีรูปทั่วไป

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^k + \dots$$

เรียกว่าอนุกรมเรขาคณิตที่มี r เป็น อัตราส่วนร่วม

ทฤษฎีบท 7.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^k + \dots \text{เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่}$$

$$\text{ผลบวก } S = \frac{a}{1-r} \text{ ถ้า } |r| < 1 \text{ และเป็นอนุกรมลู่ออก ถ้า } |r| \geq 1$$

ตัวอย่าง 7.17 อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต

1. $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + \dots$
2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{2^k} + \dots$
3. $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$

ตัวอย่าง 7.18 จงพิจารณาว่า $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ อนุกรมลู่ออกถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

ที่มี $r = \frac{1}{10}$ ซึ่ง $|r| < 1$ แสดงว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าสู่

$$S = \frac{a}{1-r}$$

เนื่องจาก $a = \frac{3}{10}$ และ $r = \frac{1}{10}$

จะได้

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{10}{9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ $\frac{1}{3}$

ตัวอย่าง 7.19 จงพิจารณาว่า $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ อนุกรมลู่ออกถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

ที่มี $r = \frac{1}{2}$ ซึ่ง $|r| < 1$ แสดงว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าสู่

$$S = \frac{a}{1-r}$$

เนื่องจาก $a = 1$ และ $r = \frac{1}{2}$

จะได้

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

ดังนั้น $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ 2

ตัวอย่าง 7.20 จงพิจารณาว่า $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ อนุกรมลู่ออกถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{8}{27} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} + \dots$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต มี $r = -\frac{2}{3}$ ซึ่ง $|r| < 1$ แสดงว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าสู่

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

เนื่องจาก $a = 1$ และ $r = -\frac{2}{3}$

จะได้

$$S = \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5}$$

ดังนั้น $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ $\frac{3}{5}$

Heinbockel. J.H. (2012 : 283) ได้อธิบายรูปแบบอนุกรมฮาร์มอนิก และการตรวจสอบว่าอนุกรมฮาร์มอนิกนั้นเป็นอนุกรมลู่ออกดังต่อไปนี้

อนุกรมที่มีรูปทั่วไป

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

เรียกว่า **อนุกรมฮาร์มอนิก** และอนุกรมดังกล่าวเป็นอนุกรมลู่ออก เนื่องจากพจน์ทั้งหมดของอนุกรมเป็นจำนวนบวก จึงได้ว่า ผลบวกย่อย

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2}, S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \dots$$

เป็นลำดับเพิ่มขึ้นโดยแท้ นั่นคือ $S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_n < \dots$ ลำดับของผลบวกย่อยลู่ออก
โดยการแสดงว่าลำดับไม่มีขอบเขต ซึ่งพิจารณาจาก

$$S_2, S_4, S_8, S_{16}, S_{32}, \dots$$

ซึ่งเป็นผลบวกย่อยที่อยู่ในรูป S_{2^n} ดังนี้

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} \\ S_4 &= S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = S_2 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \\ S_8 &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) \\ &= S_4 + \frac{1}{2} > \frac{4}{2} \\ S_{16} &= S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \\ &> S_8 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right) \\ &= S_8 + \frac{1}{2} > \frac{5}{2} \\ &\dots \\ S_{2^n} &> \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า ผลบวกย่อยไม่มีขอบเขต อนุกรมฮาร์มอนิกจึงลู่ออก

นอกจากอนุกรมที่อยู่ในรูปแบบเฉพาะที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้วยังมีทฤษฎีบทที่สามารถตรวจสอบ
การลู่ออกและลู่ออกของอนุกรมที่อยู่ในรูปแบบการบวก ลบ และการคูณด้วยค่าคงตัวดังที่ โดย ธีระ
ศักดิ์ อัจฉรณานนท์ (2558 : 371) ได้แสดงทฤษฎีบทไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.4

1. ถ้า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแล้ว $\sum (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
และ $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$
2. ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ c เป็นค่าคงตัวและ $c \neq 0$
แล้ว $\sum ca_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum ca_n = c \sum a_n$
3. ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว จะได้ว่า
 $\sum (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 7.21 จงพิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^n} - \frac{2}{5^{n+1}} \right)$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ อนุกรมลู่ออกถ้าเป็นอนุกรม

ลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

มี $r = \frac{1}{4}$ ซึ่ง $|r| < 1$ แสดงว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าสู่

$$S = \frac{a}{1-r}$$

เนื่องจาก $a = \frac{3}{4}$ และ $r = \frac{1}{4}$

จะได้

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1$$

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n+1}} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

มี $r = \frac{1}{5}$ ซึ่ง $|r| < 1$ แสดงว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าสู่

$$S = \frac{a}{1-r}$$

เนื่องจาก $a = \frac{2}{5}$ และ $r = \frac{1}{5}$

จะได้

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

โดยทฤษฎีบท 7.4 จึงได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^n} - \frac{2}{5^{n+1}} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และได้ผลบวก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^n} - \frac{2}{5^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^n} - \frac{2}{5^{n+1}} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรม เท่ากับ $\frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 7.22 จงพิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{5^n} \right)$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ อนุกรมลู่ออกถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

มี $r = \frac{1}{e}$ ซึ่ง $|r| < 1$ แสดงว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าสู่

$$S = \frac{a}{1-r}$$

เนื่องจาก $a = \frac{1}{e}$ และ $r = \frac{1}{e}$

จะได้

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

มี $r = \frac{1}{5}$ ซึ่ง $|r| < 1$ แสดงว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าสู่

$$S = \frac{a}{1-r}$$

เนื่องจาก $a = \frac{1}{5}$ และ $r = \frac{1}{5}$

จะได้

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

โดยทฤษฎีบท 7.4 จึงได้ว่าอนุกรม

และได้ผลบวก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{5^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{e-1} + \frac{1}{4}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{5^n} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{1}{4}$

ตัวอย่าง 7.23 จงพิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n} \right)$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้า หรือ อนุกรมลู่ออกถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

มี $r = \frac{1}{3}$ ซึ่ง $|r| < 1$ แสดงว่าเป็นอนุกรมลู่เข้า

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ เป็นอนุกรมฮาร์มอนิกซึ่งลู่ออก

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n} \right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ณรงค์ฤทธิ์ บุตรรงค์ (2552 : 220-221) ได้กล่าวถึงทฤษฎีบทที่จำเป็นอีกทฤษฎีหนึ่งที่น่าไปทดสอบการลู่เข้าและลู่ออกของอนุกรมเบื้องต้นดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.5

ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

ข้อความกลับกันของทฤษฎีบท 7.5 คือ “ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ แล้ว $\sum a_n$ ลู่เข้า” อาจไม่เป็นจริงเสมอไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.24

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ เป็นอนุกรมฮาร์มอนิกซึ่งลู่ออก

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ลู่เข้า

เพราะว่า $a = \frac{1}{2}$ และ $r = \frac{1}{2}$

ข้อความแย้งกลับที่ของทฤษฎีบท 7.5 สรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.6

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ย่อมได้ว่า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 7.25 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right)}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= 1$$

$$\neq 0$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 7.26 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{2n}{n} - \frac{1}{n} \right)}{n \left(\frac{3n}{n} + \frac{2}{n} \right)}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(3 + \frac{2}{n} \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{n} \right)}{\left(3 + \frac{2}{n} \right)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\neq 0$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

7.5 สรุปท้ายบท

ลำดับใช้เรียกจำนวนที่เรียงกันอย่างมีกฎเกณฑ์หรือมีสูตร ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัดที่มี n ในกรณีที่ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เรียกว่าเป็นลำดับอนันต์สำหรับการตรวจสอบการลู่เข้าและลู่ออกนั้น ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แต่ถ้า $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้าแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาค่าไม่ได้ นั่นคือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก ถ้านำลำดับมาบวกต่อ ๆ กันเช่น

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ เรียกว่าอนุกรมจำกัด จะเรียกผลบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ ว่าอนุกรมอนันต์และการตรวจสอบการลู่เข้าลู่ออกของอนุกรมนั้นทำได้หลายวิธี อันดับแรกจะใช้นิยาม

ที่ว่าถ้า S_n คือผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ซึ่ง

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ โดยที่ $S \neq \pm\infty$ และ S เป็นเพียงค่าเดียวจะเรียกอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ว่าเป็น

อนุกรมลู่เข้าซึ่งลู่เข้าสู่ค่า S ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าไม่ได้แสดงว่า $\{S_n\}$ ลู่ออกและจะเรียก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ว่า

เป็นอนุกรมลู่ออกซึ่งลู่เข้าสู่ค่า S นอกจากนี้ยังมีอนุกรมที่อยู่ในรูปแบบเฉพาะได้แก่ อนุกรมที่มีรูปทั่วไป

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^k + \dots$$

เรียกว่าอนุกรมเรขาคณิตที่มี r เป็นอัตราส่วนร่วม สำหรับอนุกรมที่มีรูปทั่วไป

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

เป็นอนุกรมลู่ออกโดยมีชื่อเรียกว่าอนุกรมฮาร์มอนิก

แบบฝึกหัดบทที่ 7

1. จงเขียน 5 พจน์แรกของลำดับที่กำหนดให้พจน์ที่ n ต่อไปนี้

1.1 $a_n = 3n$

1.2 $a_n = \frac{n-2}{3n}$

1.3 $a_n = (-1)^{n+2} \left(\frac{n^2}{3} \right)$

1.4 $a_n = (-1)^n \left(\frac{n^2-1}{3} \right)$

1.5 $a_n = \frac{3^n}{n!}$

1.6 $a_n = \frac{3!}{(n-1)!}$

2. จงเขียนพจน์ที่ n ของลำดับต่อไปนี้

2.1 $5, 8, 11, 14, 17, \dots$

2.2 $-1, 4, -9, 16, -25, \dots$

2.3 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \dots$

2.4 $\frac{5}{3}, \frac{10}{4}, \frac{15}{5}, \frac{20}{6}, \dots$

3. จงแสดงว่าลำดับลู่ออกหรือลู่เข้า ถ้าลู่เข้าให้หาลิมิตของลำดับ

3.1 $\left\{ \frac{4n+3}{5n-1} \right\}$

3.2 $\left\{ \frac{2n^3-3n+4}{n^2+n-1} \right\}$

3.3 $\left\{ \frac{e^{2n}}{n^3} \right\}$

3.4 $\left\{ \frac{2''}{3^{n+1}} \right\}$

3.5 $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$

3.6 $\left\{ (-1)^n \frac{n}{n+1} \right\}$

3.7 $\left\{ \frac{3n^2-n+4}{2n^2+1} \right\}$

3.8 $\left\{ \frac{1+(-1)^n}{n} \right\}$

3.9 $\left\{ \frac{3^n}{4^n} \right\}$

3.10 $\left\{ (-1)^n \frac{2n^3}{n^3+1} \right\}$

4. จงคำนวณผลบวกย่อย 5 พจน์แรกของอนุกรม

$$4.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 5)$$

$$4.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$$

$$4.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right)$$

$$4.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$4.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$4.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$$

5. จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าให้หาผลบวกของอนุกรม

$$5.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(-4)^n}$$

$$5.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n}$$

$$5.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+4}$$

$$5.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^{n-1}}{4^n} + \frac{1}{6^n} \right)$$

$$5.5 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$5.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

$$5.7 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (0.1)^n$$

$$5.8 \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

$$5.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$$

$$5.10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) \text{ พะ}$$

6. จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่ออก

$$6.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$6.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$$

$$6.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$6.4 \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(\frac{3}{2} \right)^n$$

$$6.5 \quad \sum_{n=0}^{\infty} 100 (1.05)^n$$

$$6.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{2^{n+1}}$$

เอกสารอ้างอิง

- ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ และคณะ (2561). แคลคูลัส 1. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- ธัญยศ จำปาหวาย. (2564). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.
- ธีระศักดิ์ อัจฉนนท์. (2558). **แคลคูลัส 3**. ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์.
- ณรงค์ฤทธิ์ บุตรรงค์. (2552). **การวิเคราะห์จำนวนจริงเบื้องต้น**. คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี.
- ปณศยา พัฒนางกูร. (2554). **แคลคูลัสขั้นสูง**. ปทุมธานี : มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.
- สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. (2554). **แคลคูลัส 2** มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- อรฤดี สุทธิศรี. (2548). **แคลคูลัส II**. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.
- เอกชัย หลายศิริกุล. (2559). **แคลคูลัส 2**. พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยนเรศวร.
- อำพล ธรรมเจริญ. (2551). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ตอนที่ 2**. กรุงเทพมหานคร : พิกซ์การพิมพ์.
- Guichard. D. (2019). **Single Variable Calculus**. Washington : Whitman College.
- Heinbockel. J.H. (2012). **Introduction to Calculus Volume I**. Norfolk : Old Dominion University.
- Veselin. J. and Jamie. M. (2018). **Calculus II**. Canada : Department of Mathematics Simon Fraser University

