

บทที่ 7

สมการไดโอแฟนไทน์

สมการไดโอแฟนไทน์(Diophantine equation) เป็นชื่อที่ตั้งขึ้นเพื่อเป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ชาวกรีก ชื่อ ดีโอฟานโตส(Diophantus) หรือที่เรียกว่า ดีโอฟานโตสแห่งอะเล็กซานเดรีย Diophantus of Alexandria โดยเขาได้รับการยกย่องว่าเป็นบิดาของพีชคณิต เนื่องจากที่นักคณิตศาสตร์ได้เห็นความสำคัญของการศึกษาสมการของดีโอฟานโตส รวมทั้งเห็นการประยุกต์และได้นำผลการศึกษาไปใช้ตอบปัญหาต่าง ๆ เพื่อการพัฒนาทางด้านคณิตศาสตร์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ และมักสนใจคำตอบในระบบจำนวนเต็มเท่านั้น อย่างไรก็ตามสมการบางสมการแม้ว่าจะเกี่ยวข้องกับระบบจำนวนเต็มเท่านั้น แต่การหาคำตอบหรือการแสดงว่าไม่มีคำตอบอาจจะต้องใช้ความรู้ของระบบจำนวนเต็ม ในปัจจุบันสมการของดีโอฟานโตสนั้นจะสนใจคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้นและเรียกสมการที่สนใจคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มว่า สมการไดโอแฟนไทน์ ซึ่งอาจเป็นสมการดีกรีหนึ่ง หรือดีกรีที่มากกว่าหนึ่ง อาจมีตัวแปรหนึ่งตัวหรือหลายตัว หรืออาจเป็นระบบสมการที่กำหนดตัวแปรมากกว่าจำนวนของสมการ ดังนั้นในบทนี้จะเป็นการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น(Linear Diophantine equation) ระบบสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น System of Linear Diophantine Equations) สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส(Pythagorean triple) ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มา(Fermat's Last Theorem) และในหัวข้อสุดท้ายจะเป็นสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง(Exponential Diophantine equation)ซึ่งนักคณิตศาสตร์ในช่วงทศวรรษที่ผ่านมาได้นำเสนอวิธีการหาผลเฉลยหลากหลายรูปแบบ

7.1 สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น

ในหัวข้อนี้จะศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ที่ทุกตัวแปรมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง และไม่มีพจน์ใดที่อยู่ในรูปผลคูณของตัวแปร ซึ่งสมการไดโอแฟนไทน์ที่มีลักษณะดังกล่าวเรียกว่า สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น โดยมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 7.1

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ซึ่งไม่เป็นศูนย์และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ เรียกสมการ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

ว่า สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น ที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปรจำนวน n ตัว

คำว่า เชิงเส้น ในบทนิยามนั้นหมายถึงตัวแปรทุกตัว คือ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ที่ปรากฏในสมการจะมีเลขยกกำลังเป็นหนึ่งเท่านั้น และไม่มีผลคูณของตัวแปรคู่ใดเลยปรากฏในสมการนั้น

- $2x + 5y = 11$ เป็นสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น 2 ตัวแปร
- $3x^2 + y = 3$ ไม่เป็นสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น เพราะ x มีเลขชี้กำลังเป็น 2
- $2xy = 4$ ไม่เป็นสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น เพราะมีผลคูณ xy

สมการไดโอฟนโทนเชิงเส้นนั้น มักจะปรากฏในชีวิตประจำวันอยู่เสมอและการหาคำตอบนั้น ก็ขึ้นอยู่กับความรู้และประสบการณ์ของแต่ละบุคคล สำหรับตัวอย่างที่จะแสดงต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการ แก้ปัญหาของสมการไดโอฟนโทนเชิงเส้นสองตัวแปร ในชีวิตประจำวัน

ตัวอย่าง 7.2 ร้านค้าแห่งหนึ่งขายปากกาสีแดงด้ามละ 6 บาท ปากกาสีน้ำเงินด้ามละ 5 บาท พ่อค้าขายปากกาสีแดงและสีน้ำเงินรวมกันได้ทั้งหมด 30 ด้าม และได้เงินทั้งหมด 162 บาทจงหารว่าร้านค้าแห่งนี้ขายปากกาสีแดงและสีน้ำเงินอย่างละกี่ด้าม

วิธีทำ	สมมติว่า	ขายปากกาสีแดงไป	x ด้าม
		ขายปากกาสีน้ำเงินไป	y ด้าม

สร้างสมการที่ไม่ทราบค่าได้สองสมการดังต่อไปนี้

$$6x + 5y = 162 \quad \dots(1)$$

$$x + y = 30 \quad \dots(2)$$

ดำเนินการแก้สมการสองสมการข้างต้นดังต่อไปนี้

จากสมการ (2) จะได้

$$x = 30 - y$$

แทนในสมการ (1) จะได้

$$6(30 - y) + 5y = 162$$

$$180 - 6y + 5y = 162$$

$$180 - y = 162$$

$y = 18$

แทนค่า $y = 18$ ในสมการ (1) จะได้

$$x + 18 = 30$$

$x = 12$

ดังนั้น ร้านค้าแห่งนี้ขายปากกาสีแดงได้ 12 ด้าม ปากกาสีน้ำเงินได้ 18 ด้าม

สำหรับการตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้มานั้นเป็นผลเฉลยของสมการดังกล่าวหรือไม่นั้น เมื่อแทน $x = 12$ และ $y = 18$ ต้องสอดคล้องกับสมการที่ (1) และ (2) โดยค่า x และ y ที่ได้จากสมการ เรียกว่าผลเฉลย ซึ่งแสดงความหมายไว้ในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 7.2

เรียกจำนวนเต็มที่แทนค่าตัวแปรในสมการไดโอแฟนไทน์แล้วทำให้สมการเป็นจริงว่า **ผลเฉลย** เรียกผลเฉลยที่ประกอบด้วยค่าคงตัวไม่เจาะจงที่เป็นจำนวนเต็มว่า **ผลเฉลยทั่วไป** และเรียก ผลเฉลยที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มแน่นอนหรือผลเฉลยที่ได้จากการแทนค่าของค่าคงตัวในผลเฉลยทั่วไปว่า **ผลเฉลยเฉพาะ**

ตัวอย่าง 7.2 จงหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3x - 4y = 26$

วิธีทำ กำหนดให้ $3x - 4y = 26$ (1)

$$\begin{aligned} 3x &= 26 + 4y \\ x &= \frac{26 + 4y}{3} \\ &= \frac{26}{3} + \frac{4y}{3} \\ &= \left(8 + \frac{2}{3}\right) + \left(y + \frac{y}{3}\right) \\ &= 8 + y + \left(\frac{2 + y}{3}\right) \end{aligned}$$

เนื่องจาก x และ y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบ

ดังนั้น $\frac{2 + y}{3}$ ต้องเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยกำหนดให้เท่ากับ n จะได้

$$n = \frac{2 + y}{3} \quad (2)$$

$$3n = 2 + y$$

$$y = 3n - 2$$

แทนค่า $y = 3n - 2$ ในสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned} 3x - 4(3n - 2) &= 26 \\ 3x - 12n + 8 &= 26 \\ 3x &= 12n + 18 \\ x &= 4n + 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 4n + 6$ และ $y = 3n - 2$ เป็นผลเฉลยของสมการ $3x - 4y = 26$

จากตัวอย่าง 7.2 พบว่าผลเฉลยที่ได้คือผลเฉลยทั่วไปเนื่องจากมีค่า n ซึ่งเป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เนื่องจาก $3(4n + 6) - 4(3n - 2) = 26$ สำหรับตัวอย่างต่อไปจะเป็นการแสดงผลเฉลยเฉพาะของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่าง 7.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไดโอแฟนไทน์ $3x - 4y = 26$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 7.2 พบว่า $x = 4n + 6$ และ $y = 3n - 2$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $3x - 4y = 26$

เลือกแทนค่า

$$n = 1 \text{ จะได้}$$

$$x = 4(1) + 6 = 10 \text{ และ } y = 3(1) - 2 = 1$$

$$\text{เนื่องจาก } 3(10) - 4(1) = 26$$

ดังนั้น $x = 10$ และ $y = 1$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ $3x - 4y = 26$

ตัวอย่าง 7.4 จงหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 6y = 11$

วิธีทำ จาก $2x + 6y = 11$

จัดสมการใหม่จะได้

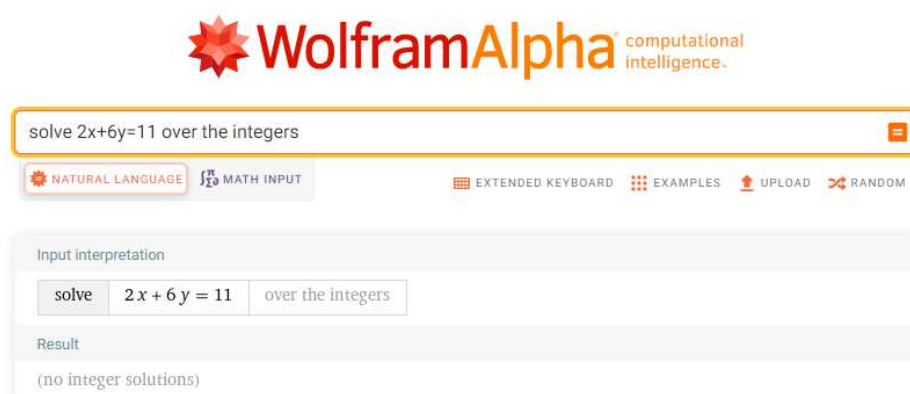
$$y = \frac{11 - 2x}{6} = 1 + \left(\frac{5 - 2x}{6} \right)$$

เนื่องจาก x และ y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบ

ดังนั้น $\frac{5 - 2x}{6}$ ต้องเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น สมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 6y = 11$ ไม่มีผลเฉลย

จากตัวอย่าง 7.4 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 6y = 11$ ดังภาพประกอบ 7.1



ภาพประกอบ 7.1 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 6y = 11$ ไม่มีผลเฉลย

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นบางสมการมีผลเฉลยและบางสมการไม่มีผลเฉลย ดังนั้นเพื่อไม่ให้เป็นการเสียเวลาก่อนที่จะหาผลเฉลยของสมการสามารถตรวจสอบก่อนว่าสมการที่กำหนดมาให้มีผลเฉลยหรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.1

สมการไดโอแฟนไทน์ $ax + by = c$ ซึ่ง $d = (a, b)$ จะมีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มก็ต่อเมื่อ $d|c$

พิสูจน์

$(\Rightarrow)$ ให้ x_0, y_0 เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $ax_0 + by_0 = c$

ให้ $d = (a, b)$ จะได้ว่า $d|a$ และ $d|b$

นั่นคือ $d|ax_0$ และ $d|by_0$

จะได้ว่า $d|(ax_0 + by_0)$

ดังนั้น $d|c$

$(\Leftarrow)$ ให้ $d|c$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $dn = c$

เนื่องจาก $d = (a, b)$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x_1, y_1 ซึ่ง

$$ax_1 + by_1 = d$$

แทนค่า d จะได้ $(ax_1 + by_1)n = c$ หรือ

$$ax_1n + by_1n = c$$

จะได้ $x_0 = x_1n$ และ $y_0 = y_1n$

เป็นผลเฉลยของสมการ $ax + by = c$

นั่นคือ $ax + by = c$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 7.5

1. $11x - 15y = 21$ มีผลเฉลยเพราะว่า $(11, -15) = 1$ ซึ่ง $1|21$
2. $9x - 24y = 74$ ไม่มีผลเฉลยเพราะว่า $(9, -24) = 3$ ซึ่ง $3 \nmid 74$
3. $12x - 30y = 36$ มีผลเฉลยเพราะว่า $(12, 30) = 6$ ซึ่ง $6|36$

หลังจากตรวจสอบว่าสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นมีผลเฉลยแล้ว ทฤษฎีบทต่อไปยังสามารถนำไปตรวจสอบว่าสมการนั้นมีผลเฉลยกี่ผลเฉลย

ทฤษฎีบท 7.2

ถ้า $x = x_0$ และ $y = y_0$ เป็นผลเฉลยคู่หนึ่งของสมการไดโอแฟนไทน์ แล้วผลเฉลยทั้งหมดของสมการเขียนอยู่ในรูปทั่วไปคือ

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \text{ และ}$$

$$y = y_0 - \frac{a}{d}t$$

เมื่อ $d = (a, b)$ และ t เป็นจำนวนเต็ม

พิสูจน์ การพิสูจน์สำหรับทฤษฎีบทนี้จะแยกเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 พิสูจน์ว่า $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ และ $y = y_0 - \frac{a}{d}t$ เป็นผลเฉลยของสมการ $ax + by = c$

เมื่อ $d = (a, b)$ และ t เป็นจำนวนเต็ม

แทนค่า x และ y ข้างซ้ายของสมการจะได้

$$\begin{aligned} a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right) &= ax_0 + \frac{ab}{d}t + by_0 - \frac{ab}{d}t \\ &= ax_0 + by_0 \\ &= c \end{aligned}$$

เพราะ x_0, y_0 เป็นผลเฉลยของสมการ

ดังนั้น $x = x_0 + \frac{b}{d}t, y = y_0 - \frac{a}{d}t$ เป็นผลเฉลยของสมการ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็ม

ตอนที่ 2 พิสูจน์ว่าทุกผลเฉลยของสมการจะสามารถเขียนในรูป $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ และ $y = y_0 - \frac{a}{d}t$

เป็นผลเฉลยของสมการ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มและ x_0 และ y_0 เป็นผลเฉลยคู่หนึ่งของสมการ $ax + by = c$

ให้ x, y เป็นผลเฉลยใด ๆ ของสมการ และ x_0, y_0 เป็นผลเฉลยหนึ่งจะได้

$$ax + by = c \text{ และ } ax_0 + by_0 = c$$

จะได้

$$\begin{aligned} ax + by &= ax_0 + by_0 \\ ax - ax_0 &= by_0 - by \\ a(x - x_0) &= b(y_0 - y) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $d > 0$ จะได้

$$\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y) \quad \dots(1)$$

แสดงว่า $\frac{b}{d} \left(\frac{a}{d} \right) (x - x_0)$

นั่นคือ $\frac{b}{d} \left((x - x_0) \right)$ แสดงว่า $x - x_0 = \left(\frac{b}{d} \right) t$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็ม
จะได้

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d} \right) t$$

แทนค่าของ $x = x_0 + \left(\frac{b}{d} \right) t$ ลงในสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{a}{d} \left(x_0 + \left(\frac{b}{d} \right) t - x_0 \right) &= \frac{b}{d} (y_0 - y) \\ \frac{a}{d} \left(\frac{b}{d} \right) t &= \frac{b}{d} (y_0 - y) \end{aligned}$$

นำ $\frac{b}{d}$ หารตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\frac{a}{d} t = (y_0 - y)$$

ดังนั้น $y = y_0 - \left(\frac{a}{d} \right) t$

นั่นคือ ทุกผลเฉลยของสมการจะสามารถเขียนในรูป

$$x = x_0 + \frac{b}{d} t \text{ และ } y = y_0 - \frac{a}{d} t$$

การตรวจสอบผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ จากทฤษฎีบทที่ผ่าน
มาสามารถสรุปขั้นตอนได้ดังต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $d = (a, b)$
2. ตรวจสอบ $d \mid c$ หรือ $d \nmid c$
3. ถ้า $d \nmid c$ แสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $ax + by = c$ ไม่มีผลเฉลย
4. ถ้า $d \mid c$ แสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $ax + by = c$ มีผลเฉลย
 - 4.1 ใช้ขั้นตอนของยุคลิดเพื่อเขียนให้อยู่ในรูป $ax_1 + by_1 = d$
 - 4.2 คูณ $\frac{c}{d}$ ในสมการ $ax_1 + by_1 = d$ จะได้ $ax_0 + by_0 = c$
 - 4.3 ให้ x_0 และ y_0 เป็นผลเฉลย ของ $ax + by = c$
 - 4.4 สร้างผลเฉลยทั้งหมด $x = x_0 + \frac{b}{d} t$ และ $y = y_0 - \frac{a}{d} t$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 7.6 จงหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 5y = 18$

วิธีทำ เนื่องจาก $(2, 5) = 1$ และ $1 \mid 18$ ดังนั้นสมการ $2x + 5y = 18$ มีผลเฉลย

ใช้ขั้นตอนของยุคลิดดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 5 &= 2(2) + 1 \\ 2 &= 1(2) \end{aligned}$$

โดยใช้ขั้นตอนการเขียนย้อนกลับจากขั้นตอนแบบยุคลิดจะได้

$$5(1) - 2(2) = 1$$

คูณด้วย 18 จะได้

$$5(1)(18) - 2(2)(18) = 1(18)$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$5(18) + 2(-36) = 18$$

แสดงว่า $x_0 = 18$ และ $y_0 = -36$ เป็นผลเฉลยของสมการ $2x + 5y = 18$

ผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 5y = 18$ เขียนในรูป

$$x = 18 + \frac{5}{1}t = 18 + 5t \text{ และ}$$

$$y = -36 - \frac{2}{1}t = -36 - 2t \text{ เมื่อ } t \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 5y = 18$ เขียนในรูป

$$x = 18 + 5t \text{ และ } y = -36 - 2t$$

เมื่อ t เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 7.7 จงหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $16x + 182y = 1000$

วิธีทำ หา $(12, 130)$ โดยวิธีแบบยุคลิด ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 182 &= 16(11) + 6 \\ 16 &= 6(2) + 4 \\ 6 &= 4(1) + 2 \\ 4 &= 2(2) \end{aligned}$$

แสดงว่า $2 = (16, 182)$

เนื่องจาก $2 \mid 1000$ แสดงว่า $16x + 182y = 1000$ มีผลเฉลย

ต่อไปหาผลเฉลย x_0, y_0 ของสมการ $16x + 182y = 1000$

โดยใช้ขั้นตอนการเขียนย้อนกลับจากขั้นตอนแบบยุคลิดดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
182 &= 16(11) + 6 \\
2 &= 6 - 4(1) \\
&= 6 - [16 - 6(2)](1) \\
&= 6(3) - 16 \\
&= [182 - 16(11)](3) - 16 \\
&= 182(3) - 16(34)
\end{aligned}$$

แสดงว่า

$$182(3) - 16(34) = 2$$

คูณด้วย $\frac{1000}{2}$ จะได้

$$182(3) \left[\frac{1000}{2} \right] - 16(34) \left[\frac{1000}{2} \right] = 2 \left[\frac{1000}{2} \right]$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$182(1500) + 16(-17000) = 1000$$

แสดงว่า $x_0 = 1500$ และ $y_0 = -17000$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $16x + 182y = 1000$ เขียนในรูป

$$x = 1500 + \frac{16}{2}t = 1500 + 8t \text{ และ}$$

$$y = -17000 - \frac{182}{2}t = -17000 - 91t \text{ เมื่อ } t \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $16x + 182y = 1000$ เขียนในรูป

$$x = 1500 + 8t \text{ และ } y = -17000 - 91t \text{ เมื่อ } t \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นในการดำเนินชีวิตนั้นบางครั้งต้องการผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบเท่านั้น จึงต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.8 แม่ค้าขายผลไม้ในตลาดแห่งหนึ่งขายผลไม้อยู่สองชนิดคือกล้วยและน้อยหน่า โดยขายกล้วยหวีละ 21 บาท และน้อยหน่าลูกละ 14 บาท ถ้าวันหนึ่งแม่ค้าขายผลไม้ได้เงิน 70 บาท อยากทราบว่าแม่ค้าขายกล้วยและน้อยหน่าในวันนั้นที่เป็นไปได้อย่างละเท่าไร

วิธีทำ สมมติให้ x แทนจำนวนกล้วยที่ขายได้
และ y แทนจำนวนน้อยหน่าที่ขายได้

เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$21x + 14y = 70$$

เนื่องจาก $(21, 14) = 7$ และ $7 | 70$ ดังนั้นสมการ $21x + 14y = 70$ มีผลเฉลย

ใช้ขั้นตอนของยุคลิดดังต่อไปนี้

$$21 = 14(1) + 7$$

$$14 = 7(1) + 0$$

โดยใช้ขั้นตอนการเขียนย้อนกลับจากขั้นตอนแบบยุคลิดดังจะได้

$$21 - 14(1) = 7$$

คูณด้วย $\frac{70}{7}$ จะได้

$$21\left(\frac{70}{7}\right) - 14(1)\left(\frac{70}{7}\right) = 7\left(\frac{70}{7}\right)$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$21(10) + 14(-10) = 70$$

จะได้ $x_0 = 10$ และ $y_0 = -10$ เป็นผลเฉลยของสมการ $21x + 14y = 70$

ผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $21x + 14y = 70$ เขียนในรูป

$$x = 10 + \frac{14}{7}t = 10 + 2t \quad \text{และ}$$

$$y = -10 - \left(\frac{21}{7}\right)t = -10 - 3t \quad \text{เมื่อ } t \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

เนื่องจากจำนวนกล้วยและน้อยหน่าเป็นจำนวนเต็มบวก จึงต้องกำหนดเงื่อนไขดังนี้

$$-10 - 3t \geq 0 \quad \text{และ} \quad 10 + 2t \geq 0$$

$$\text{จะได้ } -5 \leq t \leq -\frac{10}{3}$$

เนื่องจาก t เป็นจำนวนเต็มจึงแทนค่า t ตามจำนวนต่อไปนี้

$$-5 \leq t \leq \left\lfloor -\frac{10}{3} \right\rfloor \quad \text{หรือ} \quad -5 \leq t \leq -4$$

แทนค่า t เพื่อหาค่า x และ y จะได้จำนวนที่ขายกล้วยและน้อยหน่าที่เป็นไปได้ ดังต่อไปนี้

t	-5	-4
จำนวนกล้วย (x)	0	2
จำนวนน้อยหน่า (y)	5	2

ดังนั้น เป็นไปได้ 2 กรณีคือ

ขายน้อยหน่าได้ 5 ผลโดยไม่ได้ขายกล้วย หรือ

ขายน้อยหน่าได้ 2 ผลและขายกล้วยได้ 2 หวี

จากตัวอย่าง 7.8 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแก้โจทย์ปัญหาสมการไดโอแฟนไทน์ $21x + 14y = 70$ ดังภาพประกอบ 7.2



ภาพประกอบ 7.2 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงผลเฉลยสมการไดโอแฟนไทน์

$$21x + 14y = 70 \text{ กรณีที่ } x, y \geq 0$$

การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นในรูปแบบ $ax + by = c$ นั้นสามารถนำสมภาคเข้ามาช่วยแก้ปัญหาก็ได้ โดยการเขียนสมการให้อยู่สมภาคเชิงเส้นที่มีสองตัวแปรดังนี้

$$ax \equiv c \pmod{b} \text{ และ } by \equiv c \pmod{a}$$

ตัวอย่าง 7.9 จงหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $4x - 83y = -6$

วิธีทำ เนื่องจาก $(4, -83) = 1$ และ $1 \mid -6$ ดังนั้นสมการ $4x - 83y = -6$ มีผลเฉลยเขียนในรูปสมภาคเชิงเส้นที่มี y เป็นตัวแปร จะได้

$$-83y \equiv -6 \pmod{4} \text{ หรือ}$$

$$83y \equiv 6 \pmod{4}$$

เนื่องจาก $(83, 4) = 1$ จะได้

$$83^{\phi(4)-1} = 83^{2-1} \equiv 3 \pmod{4}$$

แสดงว่า 3 เป็นผกผันของ 83 มอดุโล 4 จะได้

$$(3)83y \equiv (3)6 \pmod{4}$$

$$y \equiv 2 \pmod{4}$$

นั่นคือ $4 \mid (y - 2)$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $y - 2 = 4n$ หรือ

$y = 4n + 2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

แทนค่า $y = 2 + 4n$ สมการไดโอแฟนไทน์ $4x - 83y = -6$ เพื่อหาค่า x จะได้

$$4x - 83(2 + 4n) = -6$$

$$4x - 166 - 332n = -6$$

$$4x = 332n + 160$$

$$x = 83n + 40$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $4x - 83y = -6$ คือ

$x = 83n + 40$ และ $y = 4n + 2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

จากตัวอย่าง 7.8 ใช้ Wolfram Alpha หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $4x - 83y = -6$ ดังภาพประกอบ 7.3



ภาพประกอบ 7.3 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $x = 83n + 40$ และ $y = 4n + 2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มเป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $4x - 83y = -6$

ตัวอย่าง 7.10 จงหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 13y = 15$

วิธีทำ เนื่องจาก $(2, 13) = 1$ และ $1 | 15$ ดังนั้นสมการ $2x + 13y = 13$ มีผลเฉลย

เขียนในรูปสมภาคเชิงเส้นที่มี x เป็นตัวแปร จะได้

$$2x \equiv 15 \pmod{13} \text{ หรือ}$$

$$2x \equiv 2 \pmod{13}$$

$$\frac{2x}{2} \equiv \frac{2}{2} \pmod{\frac{13}{(2,13)}}$$

$$x \equiv 1 \pmod{13}$$

นั่นคือ $13 | (x - 1)$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $x - 1 = 13n$ หรือ

$x = 13n + 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

แทนค่า $x = 13n + 1$ สมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 13y = 15$ เพื่อหาค่า y จะได้

$$2(13n + 1) + 13y = 15$$

$$26n + 2 + 13y = 15$$

$$13y = 13 - 26n$$

$$y = 1 - 2n$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2x + 13y = 15$ คือ

$$x = 13n + 1 \text{ และ}$$

$$y = 1 - 2n \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

การหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสามตัวแปรนั้นมียุทธวิธีในการหาผลเฉลยคล้ายกันกับสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัว สำหรับการพิจารณาว่าสมการนั้นมีผลเฉลยหรือไม่ นั้นต้องอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.3

สมการไดโอแฟนไทน์ $ax + by + cz = n$ มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $d \mid n$ ซึ่ง

$d = (a, b, c)$ และ t เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

พิสูจน์ จัดสมการ $ax + by + cz = n$ ใหม่จะได้

$$ax + by = n - cz$$

ซึ่งสมการจะมีจำนวนเต็ม x และ y ที่สอดคล้องก็ต่อเมื่อ $d_1 \mid (n - cz)$

โดยที่ $d_1 = (a, b)$ เขียนในรูปสมภาค $cz \equiv n \pmod{d_1}$

ซึ่งสมภาคดังกล่าวมีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มก็ต่อเมื่อ $d \mid n$

โดยที่ $d = (d_1, c)$ เนื่องจาก $d = (d_1, c) = ((a, b), c) = (a, b, c)$

ดังนั้น $ax + by + cz = n$ มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $d \mid n$ โดยที่ $d = (a, b, c)$

เมื่อตรวจสอบแล้วว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $ax + by + cz = n$ มีผลเฉลยสำหรับขั้นตอนการหาผลเฉลยนั้นจะใช้วิธีการคล้ายกันกับสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปรโดยการนำสมภาคเข้ามาช่วยแก้ปัญหาดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.11 จงหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3x - 6y + 2z = 11$

วิธีทำ สมการมีผลเฉลยเพราะว่า $(3, -6, 2) = 1$ ซึ่ง $1|11$

จัดสมการใหม่จะได้

$$3x - 6y = 11 - 2z \quad \dots(1)$$

จะเห็นว่า $(3, -6) = 3$ ดังนั้น สมการ (1) มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $3|(11 - 2z)$

ค่า z ที่ทำให้ สมการ (1) มีผลเฉลยเขียนในรูปสมภาค ดังนี้

$$2z \equiv 11 \pmod{3} \text{ หรือ}$$

$$2z \equiv 2 \pmod{3}$$

$$z \equiv 1 \pmod{3}$$

นั่นคือ $3|z - 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม n_1 ที่ทำให้ $z - 1 = 3n_1$ หรือ

$$z = 1 + 3n_1 \text{ เมื่อ } n_1 \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

แทนค่า $z = 1 + 3n_1$ ลงในสมการ (1) จะได้

$$3x - 6y = 11 - 2(1 + 3n_1)$$

หรือ

$$x - 2y = 3 - 2n_1 \quad \dots(2)$$

จะเห็นว่า $(1, -2) = 1$ ดังนั้นสมการ (2) มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $1|(3 - 2n_1)$

ค่า y ที่ทำให้สมการ (2) มีผลเฉลยเขียนอยู่ในรูปสมภาค ดังนี้

$$-2y \equiv 3 - 2n_1 \pmod{1}$$

$$\text{จะได้ } y \equiv 0 \pmod{1}$$

นั่นคือ $1|y$

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม n_2 ที่ทำให้ $y = n_2$

แทนค่า $y = n_2$ ลงในสมการ (2) จะได้

$$x - 2n_2 = 3 - 2n_1$$

$$x = 3 - 2n_1 + 2n_2$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $3x - 6y + 2z = 11$ คือ

$$x = 3 - 2n_1 + 2n_2$$

$$y = n_2$$

$$z = 1 + 3n_1$$

เมื่อ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนเต็ม

จากตัวอย่าง 7.11 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3x - 6y + 2z = 11$ ดังภาพประกอบ 7.4



ภาพประกอบ 7.4 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อแสดงว่า $x = 3 - 2n_1 + 2n_2$, $y = n_2$ และ $z = 1 + 3n_1$ เมื่อ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนเต็ม เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3x - 6y + 2z = 11$

สำหรับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ที่มีตัวแปรมากกว่าสามตัวแปรนั้น ใช้วิธีคล้ายกันกับการหาผลเฉลยสมการที่มีสามตัวแปร แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.12 จงหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $7x + 3y + 15z + 45w = 100$

วิธีทำ สมการมีผลเฉลยเพราะว่า $(7, 3, 15, 45) = 1$ ซึ่ง $1 | 100$

จัดสมการใหม่

$$7x + 3y + 15z = 100 - 45w \quad \dots(1)$$

จะเห็นว่า $(7, 3, 15) = 1$ ดังนั้นสมการ (1) มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $1 | (100 - 45w)$

ค่า w ที่ทำให้สมการ (1) มีผลเฉลยเขียนอยู่ในรูปสมภาค ดังนี้

$$45w \equiv 100 \pmod{1}$$

จะได้ $w \equiv 0 \pmod{1}$

นั่นคือมีจำนวนเต็ม n_1 ที่ทำให้ $y = n_1$ เมื่อ n_1 เป็นจำนวนเต็ม

แทนค่า $w = n_1$ ลงในสมการ (1) จะได้

$$7x + 3y + 15z = 100 - 45n_1$$

หรือ

$$7x + 3y = 100 - 45n_1 - 15z \quad \dots(2)$$

จะเห็นว่า $(7, 3) = 1$ ดังนั้นสมการ (2) มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $1 | (100 - 45n_1 - 15z)$

ค่า z ที่ทำให้สมการ (2) มีผลเฉลยเขียนอยู่ในรูปสมภาค ดังนี้

$$15z \equiv 100 - 45n_1 \pmod{1}$$

จะได้ $z \equiv 0 \pmod{1}$

นั่นคือมีจำนวนเต็ม n_2 ที่ทำให้ $z = n_2$ เมื่อ n_2 เป็นจำนวนเต็ม

แทนค่า $z = n_2$ ลงในสมการ (2) จะได้

$$7x + 3y + 15n_2 = 100 - 45n_1$$

หรือ

$$7x + 3y = 100 - 45n_1 - 15n_2 \quad \dots(3)$$

จะเห็นว่า $(7, 3) = 1$ ดังนั้นสมการ (3) มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $1 \mid (100 - 45n_1 - 15n_2)$

ค่า x ที่ทำให้สมการ (3) มีผลเฉลยเขียนอยู่ในรูปสมภาค ดังนี้

$$7x \equiv 100 - 45n_1 - 15n_2 \pmod{3}$$

เนื่องจาก $45n_1 \equiv 0 \pmod{3}$ และ $15n_2 \equiv 0 \pmod{3}$ จะได้

$$7x \equiv 100 \pmod{3}$$

และเนื่องจาก $7x \equiv x \pmod{3}$ และ $100 \equiv 1 \pmod{3}$

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$

นั่นคือ $3 \mid x - 1$

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม n_3 ที่ทำให้ $3n_3 = x - 1$ หรือ

$$x = 3n_3 + 1 \text{ เมื่อ } n_3 \text{ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ}$$

แทนค่า x, z, w ลงในสมการ $7x + 3y + 15z + 45w = 100$ จะได้

$$7(3n_3 + 1) + 3y + 15n_2 + 45n_1 = 100$$

$$21n_3 + 7 + 3y + 15n_2 + 45n_1 = 100$$

$$3y = 93 - 45n_1 - 15n_2 - 21n_3$$

$$y = 31 - 15n_1 - 5n_2 - 7n_3$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $7x + 3y + 15z + 45w = 100$ คือ

$$x = 3n_3 + 1$$

$$y = 31 - 15n_1 - 5n_2 - 7n_3$$

$$z = n_2$$

$$w = n_1$$

เมื่อ n_1, n_2 และ n_3 เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

7.2 ระบบสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น

การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นในหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าเป็นการหาผลเฉลยของสมการมากกว่า 1 ตัวแปรที่มีเพียง 1 สมการเท่านั้น แต่สำหรับในหัวข้อนี้จะเป็นการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ ที่มีสมการมากกว่า 1 สมการ และเรียกว่าระบบสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นโดยมีบทนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 7.3

ระบบสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น ประกอบด้วยสมการไดโอแฟนไทน์
เชิงเส้น m สมการ และ n ตัวแปร โดยที่ $m, n > 1$

การหาผลเฉลยของระบบสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นนั้น เริ่มจากการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นด้วยวิธีในหัวข้อที่ผ่านมาเพื่อหาผลเฉลยของสมการแรก แล้วแทนค่าตัวแปรสำหรับการหาผลเฉลยในสมการที่สองเพื่อหาเงื่อนไขที่จะทำให้ได้ผลเฉลยของระบบสมการ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.13 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไดโอแฟนไทน์

$$2x + 3y + 5z = 23 \quad \dots(1)$$

$$5x + 7y - z = 16 \quad \dots(2)$$

วิธีทำ สมการ (1) มีผลเฉลยเพราะว่า $(2, 3, 5) = 1$ ซึ่ง $1 \mid 23$

จัดสมการใหม่จะได้

$$2x + 3y = 23 - 5z \quad \dots(3)$$

จะเห็นว่า $(2, 3) = 1$ ดังนั้นสมการ (3) มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $1 \mid 23 - 5z$

ค่า z ที่ทำให้สมการ (3) มีผลเฉลยเขียนอยู่ในรูปสมภาค ดังนี้

$$z \equiv 23 \pmod{1}$$

จะได้ $z \equiv 0 \pmod{1}$

นั่นคือมีจำนวนเต็ม n_1 ที่ทำให้ $z = n_1$

แทนค่า $z = n_1$ ลงในสมการ (3) จะได้

$$2x + 3y = 23 - 5n_1 \quad \dots(4)$$

จะเห็นว่า $(2, 3) = 1$ ดังนั้นสมการ (4) มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $1 \mid (23 - 5n_1)$

ค่า x ที่ทำให้สมการ (4) มีผลเฉลยเขียนอยู่ในรูปสมภาค ดังนี้

$$3y \equiv 23 - 5n_1 \pmod{2}$$

เนื่องจาก $3y \equiv y \pmod{2}$, $23 \equiv 1 \pmod{2}$ และ $5n_1 \equiv n_1 \pmod{2}$ จะได้

$$y \equiv 1 - n_1 \pmod{2}$$

นั่นคือ $2 \mid y - (1 - n_1)$

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม n_2 ที่ทำให้ $2n_2 = y - (1 - n_1)$ หรือ

$y = 1 - n_1 + 2n_2$ เมื่อ t_2 เป็นจำนวนเต็ม

แทนค่า $y = 1 - n_1 + 2n_2$ ลงในสมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} 2x + 3(1 - n_1 + 2t_2) &= 23 - 5n_1 \\ 2x &= 20 - 2n_1 - 6n_2 \\ x &= 10 - n_1 - 3n_2 \end{aligned}$$

แทนค่า $x = 10 - n_1 - 3n_2$, $y = 1 - n_1 + 2n_2$ และ $z = n_1$ ลงในสมการ (2) จะได้

$$\begin{aligned} 5(10 - n_1 - 3n_2) + 7(1 - n_1 + 2n_2) - n_1 &= 16 \\ -13n_1 - n_2 &= -41 \\ 13n_1 + n_2 &= 41 \end{aligned}$$

เมื่อ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณา

$$13n_1 + n_2 = 41 \quad \dots(5)$$

จะเห็นว่า $(13, 1) = 1$ ดังนั้นสมการ (5) มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $1 \mid 41$

ค่า n_1 ที่ทำให้สมการ (4) มีผลเฉลยเขียนอยู่ในรูปสมภาค ดังนี้

$$13n_1 \equiv 41 \pmod{1}$$

จะได้ $n_1 \equiv 0 \pmod{1}$

นั่นคือมีจำนวนเต็ม N ที่ทำให้ $n_1 = N$ เมื่อ N เป็นจำนวนเต็ม

แทนค่า $n_1 = N$ ในสมการ (5) จะได้

$$\begin{aligned} 13N + n_2 &= 41 \\ n_2 &= 41 - 13N \end{aligned}$$

แทนค่า $n_1 = N$ และ $n_2 = 41 - 13N$ ลงในผลเฉลยที่ได้จากสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned} x &= 10 - N - 3(41 - 13N) = 38N - 113 \\ y &= 1 - N + 2(40 - 13N) = 83 - 27N \\ z &= T \end{aligned}$$

เมื่อ N เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น ผลเฉลยของระบบสมการไดโอแฟนไทน์ คือ

$$\begin{aligned} x &= 38N - 113 \\ y &= 83 - 27N \\ z &= N \end{aligned}$$

เมื่อ N เป็นจำนวนเต็ม

จากตัวอย่าง 7.13 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไดโอแฟนไทน์
 $2x + 3y + 5z = 23$, $5x + 7y - z = 16$ ดังภาพประกอบ 7.5



ภาพประกอบ 7.5 ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไดโอแฟนไทน์

$$2x + 3y + 5z = 23, 5x + 7y - z = 16$$

การหาผลเฉลยของระบบสมการไดโอแฟนไทน์นอกจากวิธีในตัวอย่างที่ผ่านมาแล้วยังมีอีกหนึ่งวิธีในการหาผลเฉลย เริ่มต้นจากการกำจัดตัวแปรในระบบสมการให้เหลือน้อยลง นั่นคือการทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่จะกำจัดให้เท่ากัน แล้วนำสมการสองสมการมาบวกหรือลบกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.14 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไดโอแฟนไทน์

$$x + y + 2z = 31 \quad \dots(1)$$

$$x + 3y + 5z = 42 \quad \dots(2)$$

วิธีทำ กำจัดตัวแปร x โดยนำสมการ (2) - (1) จะได้

$$2y + 3z = 11 \quad \dots(3)$$

จะเห็นว่า $(2, 3) = 1$ ดังนั้นสมการ (3) มีผลเฉลยเพราะว่า $1 \mid 11$

ค่า y ที่ทำให้สมการ (3) มีผลเฉลยเขียนอยู่ในรูปสมภาค ดังนี้

$$2y \equiv 11 \pmod{3}$$

จะได้

$$y \equiv 1 \pmod{3}$$

นั่นคือ $3|y-1$

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม n_1 ที่ทำให้ $3n_1 = (y-1)$ หรือ

$$y = 1 + 3n_1 \text{ เมื่อ } n_1 \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

แทนค่า $y = 1 + 3n_1$ ลงในสมการ (3) จะได้ $2y + 3z = 11$

$$2(1 + 3n_1) + 3z = 11$$

$$3z = 9 - 6n_1$$

$$z = 3 - 2n_1$$

แทนค่า $y = 1 + 3n_1$ และ $z = 3 - 2n_1$ ลงในสมการ (1) เพื่อหาค่า x จะได้ว่า

$$x + (1 + 3n_1) + 2(3 - 2n_1) = 31$$

$$x = 31 - 1 - 3n_1 - 6 + 4n_1$$

$$x = 24 + n_1$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั้งหมดของระบบสมการไดโอแฟนไทน์ คือ

$$x = 24 + n_1$$

$$y = 1 + 3n_1$$

$$z = 3 - 2n_1$$

เมื่อ n_1 เป็นจำนวนเต็ม

7.3 สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส

ทฤษฎีบทพีทาโกรัสพบว่าผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านประกอบมุมฉากเท่ากับกำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก และในทางกลับกันผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านที่สั้นกว่าของด้านจะเท่ากับกำลังสองของด้านที่ยาวที่สุดแล้ว แล้วสามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ในหัวข้อนี้จะเป็นการหาสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีความยาวของด้านที่เป็นจำนวนเต็ม x, y และ z ที่เขียนให้อยู่ในรูปสมการไดโอแฟนไทน์ดังต่อไปนี้

$$x^2 + y^2 = z^2$$

จำนวนเต็มบวกสามจำนวนที่สอดคล้องกับสมการดังกล่าวเรียกว่าสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส แสดงไว้ในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 7.4

สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส คือ ชุดของจำนวนเต็มสามจำนวน x, y และ z

โดยที่ $x^2 + y^2 = z^2$

ตัวอย่าง 7.15

1. 3, 4, 5 เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส เพราะว่า $3^2 + 4^2 = 5^2$
2. 6, 8, 10 เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส เพราะว่า $6^2 + 8^2 = 10^2$
3. 5, 12, 13 เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส เพราะว่า $5^2 + 12^2 = 13^2$

บทนิยาม 7.5

สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสเรียกว่า สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมนฐาน ถ้า $(x, y, z) = 1$

จากตัวอย่าง 7.15 พบว่า 3, 4, 5 และ 5, 12, 13 เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมนฐาน เพราะว่า $(3, 4, 5) = 1$ และ $(5, 12, 13) = 1$ แต่ 6, 8, 10 ไม่เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมนฐาน การหาสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสอื่น ๆ นั้นสามารถหาได้จากการคูณจำนวนเต็มบวกเข้ากับสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมนฐานได้ ดังจะแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.4

ถ้า x, y และ z เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส และ $c \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า cx, cy และ cz เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส

พิสูจน์

เพราะว่า $(cx)^2 + (cy)^2 = (cz)^2 = c^2(x^2 + y^2) = c^2z^2 = (cz)^2$

ดังนั้น cx, cy และ cz เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส

ให้ x, y และ z เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสที่ $(x, y, z) = 1$

จะมีจำนวนเต็ม x_1, y_1 และ z_1 เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส

ซึ่ง $x = dx_1$, $y = dy_1$ และ $z = dz_1$ เพราะว่า $x^2 + y^2 = z^2$

จะได้ $\left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = \left(\frac{z}{d}\right)^2$ และ $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$

นั่นคือ x_1, y_1 และ z_1 เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสที่เป็นปฐมนฐาน

ในทางกลับกัน ถ้า x_1, y_1 และ z_1 เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$$

จึงได้

$$(dx_1)^2 + (dy_1)^2 = (dz_1)^2$$

ดังนั้น dx_1, dy_1 และ dz_1 เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส

ทฤษฎีบท 7.5

ไม่มีสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (x, y, z) ซึ่ง $x = y$

พิสูจน์ พิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง

ถ้ามีสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส x, x, z ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

และจะได้ว่า $x^2 + x^2 = z^2$ นั่นคือ $z^2 = 2x^2$

จะได้ว่า z^2 เป็นจำนวนคู่ทำให้ได้ว่า z เป็นจำนวนคู่ด้วย

ให้ $z = 2z_1$ เมื่อ z_1 เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $4z_1^2 = 2x^2$

จะได้ว่า x^2 เป็นจำนวนคู่ ทำให้ได้ว่า x เป็นจำนวนคู่ด้วย

ให้ $x = 2x_1$ เมื่อ x_1 เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ว่า $z_1^2 = 2x_1^2 = x_1^2 + x_1^2$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วอีกรูปหนึ่ง

และได้สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสชุดที่สอง x_1, x_2 และ z_1 ซึ่ง

$x > x_1$ และ $z_1 > z$ ทำเช่นนี้ไปจะได้สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสชุดที่สาม

x_2, x_2 และ z_2 ซึ่ง $x_1 > x_2$ และ $z_1 > z_2$ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

จะได้สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสชุดต่อไป ทำให้ได้ลำดับของจำนวน

$x > x_1 > x_2 > \dots$ เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนเต็มบวก ซึ่งเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ ไม่มีสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (x, y, z) ซึ่ง $x = y$

ต่อไปจะเป็นบทตั้งที่เกี่ยวข้องกับสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส โดยบทตั้งเหล่านี้จะนำไปพิสูจน์ทฤษฎีบทสำหรับการหาสามจำนวนปฐมฐานทั้งหมดของพีทาโกรัส ดังนี้

บทตั้ง 7.1

ถ้า x, y และ z เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน จะได้ว่า

$$(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$$

พิสูจน์

ถ้า x, y และ z เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน จะได้ว่า $(x, y, z) = 1$

สมมติว่า $(x, y) > 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $p|x$ และ $p|y$

เนื่องจาก $p|x$ และ $p|y$ จะได้ว่า $p|(x^2 + y^2)$ ดังนั้น $p|z^2$

เพราะว่า $p|z^2$ จึงได้ว่า $p|z$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ $(x, y, z) = 1$

ดังนั้น $(x, y) = 1$.

ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า $(x, z) = (y, z) = 1$

บทตั้ง 7.2

ถ้า x, y และ z เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน จะได้ว่า $x \not\equiv y \pmod{2}$

พิสูจน์

กำหนดให้ x, y และ z เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน

ทั้ง x และ y ไม่เป็นจำนวนคู่หรือเป็นจำนวนคี่พร้อมกัน

จากบทตั้ง 7.1 ได้ว่า $(x, y) = 1$

ดังนั้น x และ y ไม่เป็นจำนวนคู่พร้อมกัน

ถ้าทั้ง x และ y เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

ดังนั้น

$$z^2 \equiv x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะว่า z เป็นจำนวนเต็มคี่

ดังนั้น x และ y ไม่เป็นจำนวนคี่พร้อมกัน

นั่นคือ ถ้า x, y และ z เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน แล้ว $x \not\equiv y \pmod{2}$

บทตั้ง 7.3

ถ้า r, s และ t เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $(r, s) = 1$ และ $rs = t^2$

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม m และ n ซึ่ง $r = m^2$ และ $s = n^2$

พิสูจน์

ถ้า $r = 1$ หรือ $s = 1$ เห็นชัดว่าบทตั้งเป็นจริง

สมมติว่า $r > 1$ และ $s > 1$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของเลขคณิต จะได้

$$r = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_u^{a_u}$$

$$s = p_1^{a_{u+1}} p_2^{a_{u+2}} \cdots p_v^{a_v}$$

$$t = q_1^{b_{u+1}} p_2^{b_{u+2}} \cdots p_k^{b_k}$$

จาก $(r, s) = 1$ จึงได้ว่าจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบของ r และ s ต่างกัน

และเนื่องจาก $rs = t^2$ จะได้ว่า

$$rs = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_u^{a_u} p_{u+1}^{a_{u+1}} \cdots p_v^{a_v} = q_1^{2b_1} p_2^{2b_2} \cdots q_k^{2b_k}$$

จะได้ว่าจำนวนเฉพาะทั้งสองด้านของสมการข้างต้นเหมือนกัน

ดังนั้น p_i แต่ละตัวต้องเท่ากับ q_j สำหรับ j บางตัวและมีเลขชี้กำลังเท่ากัน

นั่นคือ $a_i = 2b_j$ ทำให้ได้ว่า a_i เป็นจำนวนคู่ และ $\frac{a_i}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

ให้

$$m = p_1^{\frac{a_1}{2}} p_2^{\frac{a_2}{2}} \cdots p_u^{\frac{a_u}{2}}$$

$$n = p_1^{\frac{a_{u+1}}{2}} p_2^{\frac{a_{u+2}}{2}} \cdots p_v^{\frac{a_v}{2}}$$

ดังนั้น $r = m^2$ และ $s = n^2$ ซึ่ง m และ n เป็นจำนวนเต็ม

ทฤษฎีบท 7.6

จำนวนเต็มบวก x, y และ z เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน โดยที่ y เป็นจำนวนเต็มคู่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็มบวก m และ n โดยที่ $m > n$, $(m, n) = 1$ และ $m \not\equiv n \pmod{2}$ ที่ทำให้

$$x = m^2 - n^2$$

$$y = 2mn$$

$$z = m^2 + n^2$$

พิสูจน์

กำหนดให้ x, y และ z เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน

โดยบทตั้ง 7.2 จะได้ว่า $x \not\equiv y \pmod{2}$

สมมติ y เป็นจำนวนคู่ x และ z เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่าทั้ง $z + x$ และ $z - x$ เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ มีจำนวนเต็มบวก r และ s ซึ่ง

$$r = \frac{(z + x)}{2} \text{ และ}$$

$$s = \frac{(z - x)}{2}$$

เพราะว่า $x^2 + y^2 = z^2$ จะได้ $y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$

$$\text{ดังนั้น } \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{z + x}{2}\right)\left(\frac{z - x}{2}\right) = rs$$

ให้ $(r, s) = d$ จาก $d \mid r$ และ $d \mid s$ จะได้ $d \mid (r + s) = z$ และ $d \mid (r - s) = x$

จึงได้ว่า $d \mid (r, s) = 1$ ดังนั้น $d = 1$

โดยบทตั้ง 7.3 จะมีจำนวนเต็ม m และ n โดยที่ $r = m^2$ และ $s = n^2$
เขียน x, y และ z ในพจน์ของ m และ n จะได้

$$\begin{aligned}x &= r - s = m^2 - n^2 \\y &= \sqrt{4rs} = \sqrt{4m^2n^2} = 2mn \\z &= r + s = m^2 + n^2\end{aligned}$$

ให้ $(m, n) = e$ จะได้ $e|m$ และ $e|n$ ทำให้ได้ว่า $e|x$, $e|y$ และ $e|z$

จะได้ว่า $e|(x, y, z) = 1$ ดังนั้น $e = 1$

จาก $(m, n) = 1$ โดยที่ m และ n ไม่เป็นจำนวนคู่พร้อมกัน

จึงได้ว่า $m \not\equiv n \pmod{2}$

สมมติว่ามีจำนวนเต็มบวก m และ n โดยที่ $m > n$, $(m, n) = 1$ และ $m \not\equiv n \pmod{2}$

ที่ทำให้ $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ และ $z = m^2 + n^2$ อยู่ในรูปสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส
จะได้

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\&= (m^4 - 2m^2n^2 + n^4) + 4m^2n^2 \\&= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\&= (m^2 + n^2)^2 \\&= z^2\end{aligned}$$

ถ้า $(x, y, z) = d > 1$ จะมีจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $p|(x, y, z)$

เพราะว่า $x = m^2 - n^2$ และ $m \not\equiv n \pmod{2}$ ทำให้ x เป็นจำนวนคี่

จึงได้ว่า $p \neq 2$ และเพราะว่า $p|x$ และ $p|z$ จะได้ว่า $p|(x + z) = 2m^2$ และ

$p|(x - z) = 2n^2$ ดังนั้น $p|m$ และ $p|n$ ซึ่งขัดแย้งกับ $(m, n) = 1$

ดังนั้น $(x, y, z) = 1$ นั่นคือ x, y และ z เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน

ตัวอย่าง 7.15 จงหาสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน เมื่อกำหนดให้ $m = 7$ และ $n = 2$

วิธีทำ ให้ $m = 7$ และ $n = 2$ จะได้ $(7, 2) = 1$

เนื่องจาก $7 > 2$ และ $7 \not\equiv 2 \pmod{2}$ จากทฤษฎีบท 7.6 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}x &= m^2 - n^2 = 7^2 - 2^2 = 45 \\y &= 2mn = 2 \cdot 7 \cdot 2 = 28 \\z &= m^2 + n^2 = 7^2 + 2^2 = 53\end{aligned}$$

ดังนั้น 28, 45 และ 53 เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน

สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสพื้นฐาน สามารถหาได้จากการกำหนดจำนวนที่หนึ่งมาแล้ว และสามารถหาอีกสองจำนวนที่เหลือได้โดยแยกเป็นสองกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 จำนวนแรกที่กำหนดมาให้เป็นจำนวนเต็มคู่ แทนด้วย a ดำเนินการหาอีกสองจำนวนดังนี้

1. แยกตัวประกอบของ a เป็นผลคูณของสองจำนวน
2. เขียนตัวประกอบที่มีค่ามากในรูป $m + n$ และเขียนตัวประกอบที่มีค่าน้อยในรูป $m - n$
3. แก้สมการเพื่อหาค่า m และ n
4. หาค่า x, y และ z จาก

$$x = m^2 - n^2$$

$$y = 2mn$$

$$z = m^2 + n^2$$

กรณีที่ 2 จำนวนแรกที่กำหนดมาให้เป็นจำนวนเต็มคี่ แทนด้วย b ดำเนินการหาอีกสองจำนวนดังนี้

1. ถ้า $4 \nmid b$ แล้ว แสดงว่า b ไม่เป็นหนึ่งในจำนวนพีทาโกรัสพื้นฐาน
2. ถ้า $4 \mid b$ แล้ว ดำเนินการหาตามขั้นตอนต่อไปนี้
 - 2.1 เขียน b ในรูป $2mn$ โดยที่ $(m, n) = 1$ และมี m หรือ n เป็นจำนวนเต็มคู่ และอีกจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนเต็มคี่
 - 2.2 หาค่า x, y และ z จาก

$$x = m^2 - n^2$$

$$y = 2mn$$

$$z = m^2 + n^2$$

ตัวอย่าง 7.16 กำหนดให้ 63 เป็นหนึ่งในจำนวนพีทาโกรัสพื้นฐานจงหาจำนวนที่เหลืออีก 2 จำนวน

วิธีทำ เนื่องจาก 63 เป็นจำนวนเต็มคี่

พิจารณาหาจำนวนพีทาโกรัสพื้นฐานจงหาจำนวนที่เหลืออีก 2 จำนวนดังต่อไปนี้

1. $63 = 9 \times 7$
2. ให้ $m + n = 9$ และ $m - n = 7$
จะได้ $m = 8$ และ $n = 1$
3. หาค่า x, y และ z จาก

$$x = m^2 - n^2 = 8^2 - 1^2 = 63$$

$$y = 2mn = 2 \cdot 8 \cdot 1 = 16$$

$$z = m^2 + n^2 = 8^2 + 1^2 = 65$$

ดังนั้น 16, 63 และ 65 เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสพื้นฐาน

ตัวอย่าง 7.17 กำหนดให้ 62 เป็นหนึ่งในจำนวนพีทาโกรัสปฐมฐานจงหาจำนวนที่เหลืออีก 2 จำนวน
วิธีทำ 62 เป็นจำนวนเต็มคู่ แต่ เนื่องจาก $4 \nmid 62$

แสดงว่า 42 ไม่เป็นหนึ่งในจำนวนพีทาโกรัส

ตัวอย่าง 7.18 กำหนดให้ 60 เป็นหนึ่งในจำนวนพีทาโกรัสปฐมฐานจงหาจำนวนที่เหลืออีก 2 จำนวน
วิธีทำ เนื่องจาก 60 เป็นจำนวนเต็มคู่

พิจารณาหาจำนวนพีทาโกรัสปฐมฐานจงหาจำนวนที่เหลืออีก 2 จำนวนดังต่อไปนี้

$$1. 4 \mid 60$$

$$2. 60 = 2(6)(5) \text{ จะได้ } m = 6 \text{ และ } n = 5 \text{ และ } (6, 5) = 1$$

3. หาค่า x, y และ z จาก

$$x = m^2 - n^2 = 6^2 - 5^2 = 11$$

$$y = 2mn = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$$

$$z = m^2 + n^2 = 6^2 + 5^2 = 61$$

ดังนั้น 11, 60 และ 61 เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน

7.4 สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง

สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลังได้รับความสนใจอย่างมากจากนักคณิตศาสตร์หลายคนในช่วง 10 ปีที่ผ่านมา โดยเฉพาะอย่างยิ่งสมการในรูปแบบ $a^x + b^y = z^2$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ x, y, z เป็นตัวแปรที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในแก้ปัญหาของสมการในรูปแบบนี้ส่วนมาก จะประยุกต์มาจากข้อคาดการณ์ของคาตาลาน (Catalan's conjecture) Catalan (1844 : 92) ได้คาดการณ์ว่า a, b, x และ y ที่เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min \{a, b, x, y\} > 1$ สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้นคือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$ ข้อคาดการณ์นี้ได้พิสูจน์โดย P. Mihailescu และตีพิมพ์ใน Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Mihailescu, 2004 : 167-195) สำหรับในหัวข้อนี้จะแสดงการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลังที่นักคณิตศาสตร์ได้ดำเนินการหาผลเฉลยในรูปแบบและวิธีการต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ในปี 2012 Sroysang B. (2012 : 601-604) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 19^y = z^2$ และตีพิมพ์ไว้ในวารสาร International Journal of Pure and Applied Mathematics มีบทตั้งทฤษฎีบท และบทแทรกดังต่อไปนี้

บทตั้ง 7.4

$(1, 3)$ เป็นผลเฉลย (x, z) เพียงผลเฉลยเดียว ของสมการไดโอแฟนไทน์

$8^x + 1 = z^2$ โดยที่ x และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

ให้ x และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณี $x = 0$ แล้วจะได้ $z^2 = 2$ เป็นไปไม่ได้เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณี $x \geq 1$ เนื่องจาก $z^2 = 8^x + 1 \geq 8^1 + 1 = 9$ แสดงว่า $z \geq 3$

ดังนั้นจากข้อคาดการณ์ของคาตาลาน พบว่าผลเฉลยของสมการ $z^2 - 8^x = 1$

คือ $x = 1$ และ $z = 3$

นั่นคือ $(x, z) = (1, 3)$ เป็นผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 1 = z^2$

บทตั้ง 7.5

สมการไดโอแฟนไทน์ $1 + 19^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

ให้ y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณี $y = 0$ แล้วจะได้ $z^2 = 2$ เป็นไปไม่ได้เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณี $y \geq 1$ เนื่องจาก $z^2 = 1 + 19^y \geq 1 + 19^1 = 20$ แสดงว่า $z \geq 5$

จากข้อคาดการณ์ของคาตาลานพบว่าสมการ $z^2 - 19^y = 1$ ไม่มีผลเฉลย

นั่นคือ สมการไดโอแฟนไทน์ $1 + 19^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 7.7

$(1, 0, 3)$ เป็นผลเฉลย (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว ของสมการไดโอแฟนไทน์

$8^x + 19^y = z^2$ โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีที่ $x = 0$ ได้พิจารณาใน บทตั้ง 7.5 ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ $x \geq 1$

จาก $8^x + 19^y = z^2$ พบว่า z เป็นจำนวนคี่

ให้ $z = 2t + 1$ โดยที่ $z = t$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้

$$8^x + 19^y = 4(t^2 + t) + 1$$

เนื่องจาก $8^x \equiv 0 \pmod{4}$ ทำให้ได้ว่า $19^y \equiv 1 \pmod{4}$

เนื่องจาก $19^y \equiv 1 \pmod{4}$ ทำให้ได้ว่า y เป็นจำนวนคู่

แยกพิจารณาเป็น 2 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $y = 0$ จากบทตั้ง 7.4 จะได้ $x = 1$ และ $z = 3$

กรณีที่ 2 $y \geq 0$ ให้ $y = 2k$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{จะได้ } 8^x + 19^{2k} = z^2$$

$$\text{หรือ } 8^x = z^2 - 19^{2k} = (z - 19^k)(z + 19^k)$$

$$\text{จะได้ } 2^{3x} = (z - 19^k)(z + 19^k)$$

ให้ $z - 19^k = 2^u$ โดยที่ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

$$\text{แสดงว่า } z + 19^k = 2^{3x-u}$$

$$\text{ทำให้ได้ว่า } 2(19^k) = 2^{3x-u} - 2^u = 2^u(2^{3x} - 1)$$

แบ่งค่า u ออกเป็นสองกรณี ดังนี้

กรณี $u = 0$ จะได้ $z - 19^k = 1$ เนื่องจาก z เป็นจำนวนคู่

ทำให้สมการ $z - 19^k = 1$ เป็นไปไม่ได้

กรณี $u = 1$ จะได้ $2^{3x-2} - 1 = 19^k$ หรือ $2^{3x-2} - 19^k = 1$

ถ้า $x = 1$ แล้ว $k = 0$ ทำให้ $y = 0$ แสดงว่า $x \geq 2$

จะได้ $k = 1$ นั่นคือ $2^{3x-2} = 20$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

จากข้อคาดการณ์ของคาคตาลาน จึงได้ว่า

$$2^{3x-2} - 19^k = 1 \text{ ไม่มีผลเฉลย}$$

จากบทตั้งและทฤษฎีบทพบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 19^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z)

ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(1, 0, 3)$

บทแทรก 7.1

สมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 19^y = w^4$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบ

พิสูจน์

ให้ x, y และ w เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ $8^x + 19^y = w^4$

ให้ $z = w^2$ จะได้ $8^x + 19^y = z^2$ จากทฤษฎีบท 7.7 พบว่าผลเฉลยของสมการคือ

$$(x, y, z) = (1, 0, 3)$$

แสดงว่า $w^2 = z = 3$ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้นสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 19^y = w^4$ จึงไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบ

ในปี 2020 Orosram W. and Comemuang C. (2020 : 520-522) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + n^y = z^2$ โดยที่ $n \equiv 10 \pmod{15}$ และตีพิมพ์งานวิจัยไว้ใน วารสาร Wseas Transactions on Mathematics มีบทตั้ง ทฤษฎีบท และบทแทรกดังต่อไปนี้

บทตั้ง 7.6

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $n \equiv 10 \pmod{15}$ แล้ว $n \equiv 1 \pmod{3}$
และ $n \equiv 0 \pmod{5}$

พิสูจน์

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n \equiv 10 \pmod{15}$

แสดงว่า $15 \mid n - 10$ นั่นคือ $n - 10 = 15k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

เนื่องจาก

$$n = 15k + 10 = 3(5k + 9) + 1$$

แสดงว่า $n \equiv 1 \pmod{3}$

และเนื่องจาก

$$n = 15k + 10 = 5(3k + 2)$$

แสดงว่า $n \equiv 0 \pmod{5}$

บทตั้ง 7.7

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n \equiv 10 \pmod{15}$ สมการไดโอแฟนไทน์
 $1 + n^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบ

พิสูจน์

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n \equiv 10 \pmod{15}$ และ y, z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบ
แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 3 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $y = 0$ แล้ว $2 = z^2$ เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2 ถ้า $y = 1$ แล้ว $z^2 - 1 = n$

เนื่องจาก $n \equiv 1 \pmod{3}$ และ $n \equiv 0 \pmod{5}$

ทำให้ได้ว่า

$$z^2 - 1 \equiv 1 \pmod{3} \text{ และ } z^2 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

หรือ

$$z^2 \equiv 2 \pmod{3} \text{ และ } z^2 \equiv 1 \pmod{5}.$$

แต่ $\left(\frac{2}{3}\right) = -1$. เนื่องจาก 2 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ 5

กรณีที่ 3 ถ้า $y > 1$ แล้ว $z^2 = 1 + n^y > 11$ แสดงว่า $z > 3$

นั่นคือ $\min\{y, z\} > 1$ จากข้อคาดการณ์ของคาตาลาน จึงได้ว่าไม่มีผลเฉลย

ทฤษฎีบท 7.8

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n \equiv 10 \pmod{15}$ สมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + n^y = z^2$ มีผลเฉลย $(x, y, z) = (1, 0, 3)$ เพียงผลเฉลยเดียวโดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n \equiv 10 \pmod{15}$ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ การพิสูจน์แบ่งออกเป็น 3 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $x = 0$ จากบทตั้ง 7.7 พบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $1 + n^y = z^2$

ไม่มีผลเฉลย y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบ

กรณีที่ 2 $x \geq 1$ และ $y = 0$. จากบทตั้ง 7.4 พบว่า $(1, 3)$ เป็นผลเฉลย (x, z)

เพียงผลเฉลยเดียว ของสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 1 = z^2$

กรณีที่ 3 $x \geq 1$ และ $y \geq 1$. แยกพิจารณาออกเป็น 2 กรณีดังต่อไปนี้

กรณี 3.1 x เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

$$8^x \equiv 2 \pmod{5} \text{ หรือ } 8^x \equiv 3 \pmod{5}.$$

เนื่องจาก $n \equiv 0 \pmod{5}$ แสดงว่า

$$z^2 = 8^x + n^y \equiv 3, 2 \pmod{5}$$

นั่นคือ

$$\left(\frac{2}{5}\right) = 1 \text{ และ } \left(\frac{3}{5}\right) = 1$$

เนื่องจาก 2 และ 3 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ 5

จึงเกิดข้อขัดแย้ง ทำให้กรณีนี้ไม่มีผลเฉลย

กรณี 3.2 x เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

$$8^x \equiv 1 \pmod{3}$$

เนื่องจาก $n \equiv 1 \pmod{3}$ แสดงว่า

$$z^2 = 8^x + n^y \equiv 2 \pmod{3}$$

นั่นคือ

$$\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

เนื่องจาก 2 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ 3

จึงเกิดข้อขัดแย้ง ทำให้กรณีนี้ไม่มีผลเฉลยเช่นกัน

ตัวอย่าง 7.19 สมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 10^y = z^2$ และ $8^x + 175^y = z^2$ มีผลเฉลย

$(x, y, z) = (1, 0, 3)$ เพียงผลเฉลยเดียวโดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เนื่องจาก $10 \equiv 10 \pmod{15}$ และ $175 \equiv 10 \pmod{15}$ โดยทฤษฎีบท 7.8 จึงได้ว่า
สมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 10^y = z^2$ และ $8^x + 175^y = z^2$ มีผลเฉลย $(x, y, z) = (1, 0, 3)$
เพียงผลเฉลยเดียวโดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทแทรก 7.2

สมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 25^y = k^{4t+6}$ มีผลเฉลย $(x, y, z) = (1, 0, 3)$ เพียง
ผลเฉลยเดียวโดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

ให้ $k^{2t+3} = z$ สำหรับ k และ t เป็นจำนวนเต็มบวก $25 \equiv 10 \pmod{15}$

จะได้สมการไดโอแฟนไทน์

$$8^x + 25^y = z^2$$

จากทฤษฎีบท 7.8 ได้ว่า $(x, y, z) = (1, 0, 3)$ เป็นผลเพียงผลเฉลยเดียว

ของสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 25^y = k^{4t+6}$

โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ในปี 2022 Orosram W., Jaidee S. and Tangjai W. (2022 : 1677-1683) ได้ศึกษาสมการ
ไดโอแฟนไทน์ $(p+2)^x + (2p+1)^y = z^2$ โดยที่ $p \equiv 1 \pmod{4}$ $p, p+2$, และ $2p+1$ เป็น
จำนวนเฉพาะ และได้ตีพิมพ์งานวิจัยไว้ในวารสาร International Journal of Mathematics and
Computer Science มีบทตั้ง ทฤษฎีบท และบทแทรกดังต่อไปนี้

บทตั้ง 7.8

ให้ b เป็นจำนวนเต็มคี่ สมการไดโอแฟนไทน์ $1 + (2b+1)^y = z^2$ มีผลเฉลย
ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบก็ต่อเมื่อ $b = 2t^2 - 1$ บางจำนวน $t \in \mathbb{Z}$.

พิสูจน์

ให้ (y, z) เป็นผลเฉลยที่จำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ $1 + (2b+1)^y = z^2$

ถ้า $y = 0$ แล้ว $z^2 = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า $y > 1$ แล้ว $z > 1$ จากข้อคาดการณ์ของคาตาลานทำให้สมการไม่มีผลเฉลย

ถ้า $y = 1$ แล้ว $z^2 = 2b + 2$ ดังนั้น $z = 2\sqrt{\frac{b+1}{2}}$ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบ

แสดงว่า $\sqrt{\frac{b+1}{2}}$ ต้องเป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบด้วยทำให้ได้ว่า $b = 2t^2 - 1$ บาง $t \in \mathbb{Z}$

ให้ $b = 2t^2 - 1$ บางจำนวน $t \in \mathbb{Z}$.

นั่นคือ $(y, z) = \left(1, 2\sqrt{\frac{b+1}{2}}\right)$ เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + (2b + 1)^y = z^2$

บทแทรก 7.3

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ สมการไดโอแฟนไทน์ $1 + (2p + 1)^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบก็ต่อเมื่อ $p = 2t^2 - 1$ บางจำนวน $t \in \mathbb{Z}$.

พิสูจน์คล้ายกันกับบทตั้ง 7.8

บทตั้ง 7.9

ให้ b เป็นจำนวนเต็มคี่ สมการไดโอแฟนไทน์ $(b + 2)^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบก็ต่อเมื่อ $b = t^2 - 3$ โดยที่ $t \geq 2$.

พิสูจน์

ให้ (x, z) เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ $(b + 2)^x + 1 = z^2$

ถ้า $x = 0$ แล้ว $z^2 = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า $x > 1$ แล้ว $z > 1$ จากข้อคาดการณ์ของคาตาลานทำให้สมการไม่มีผลเฉลย

ถ้า $x = 1$ แล้ว $z^2 = b + 3$ ดังนั้น $z = \sqrt{b + 3}$ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบ

แสดงว่า $\sqrt{b + 3}$ ต้องเป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบด้วยทำให้ได้ว่า

$b = t^2 - 3$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $t > 2$

นั่นคือ $(x, z) = (1, \sqrt{b + 3})$ เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $(b + 2)^x + 1 = z^2$

บทแทรก 7.4

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ สมการไดโอแฟนไทน์ $(b+2)^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบก็ต่อเมื่อ $p = t^2 - 3$ โดยที่ $t \geq 2$.

พิสูจน์คล้ายกันกับบทตั้ง 7.9

จากบทแทรก 7.3 และ 7.4 พบว่าพหุนามไม่เชิงเส้น $2x^2 - 1$ และ $x^2 - 3$ เป็นไปตามเงื่อนไขข้อ (i) – (iv) ของ Bunyakovsky conjecture ดังนั้น สมการไดโอแฟนไทน์ในบทแทรก 7.3 และ 7.4 จึงมีมากมายหลายคำตอบ

ทฤษฎีบท 7.9

ให้ $p, p+2$ และ $2p+1$ เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้ารากที่สองของ $\frac{p+1}{2}, p+3$ เป็นจำนวนเต็ม และ $p \equiv 1 \pmod{4}$. ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ลบของสมการ

$$(p+2)^x + (2p+1)^y = z^2 \text{ คือ } (x, y, z) = \left(0, 1, 2\sqrt{\frac{p+1}{2}}\right) \text{ และ } (1, 0, \sqrt{p+3})$$

พิสูจน์

ให้ (x, y, z) เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ

$$(p+2)^x + (2p+1)^y = z^2$$

$x = 0$ หรือ $y = 0$ จากบทแทรก 7.3 และ 7.4 จะได้

$$(x, y, z) = \left(0, 1, 2\sqrt{\frac{p+1}{2}}\right) \text{ หรือ } (1, 0, \sqrt{p+3})$$

$x > 0$ และ $y > 0$ แบ่งการพิจารณาออกเป็น 4 กรณีดังต่อไปนี้

กรณี 1 x และ y เป็นจำนวนเต็มคู่

เนื่องจาก x และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ ทำให้ได้ว่า z เป็นจำนวนเต็มคู่ด้วย

เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็มคู่แสดงว่า

$$z^2 \equiv 0 \pmod{4}.$$

เนื่องจาก $(p+2)^x \equiv 1 \pmod{4}$ และ $(2p+1)^y \equiv 1 \pmod{4}$ นั่นคือ

$$z^2 = (p+2)^x + (2p+1)^y \equiv 2 \pmod{4}$$

เกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 2 x และ y เป็นจำนวนเต็มคี่

เนื่องจาก x และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ ทำให้ได้ว่า z เป็นจำนวนเต็มคู่

เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็มคู่แสดงว่า

$$z^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

เนื่องจาก $(p+2)^x \equiv -1 \pmod{4}$ และ $(2p+1)^y \equiv -1 \pmod{4}$ นั่นคือ

$$z^2 = (p+2)^x + (2p+1)^y \equiv 2 \pmod{4} \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

กรณี 3 x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ y เป็นจำนวนเต็มคี่

ให้ $x = 2k$ และ $y = 2s+1$ บางค่า $k \geq 1$ และ $s \geq 0$ จะได้

$$(p+2)^{2k} + (2p+1)^{2s+1} = z^2$$

หรือ

$$\begin{aligned} (2p+1)^{2s+1} &= z^2 - (p+2)^{2k} \\ &= \left[z - (p+2)^k \right] \left[z + (p+2)^k \right] \end{aligned}$$

จึงได้ว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ α และ β ที่ทำให้

$$(2p+1)^\alpha = z - (p+2)^k \text{ และ}$$

$$(2p+1)^\beta = z + (p+2)^k$$

โดยที่ $\alpha < \beta$ และ $\alpha + \beta = 2s+1$ จะได้

$$2(p+2)^k = (2p+1)^\alpha \left[(2p+1)^{\beta-\alpha} - 1 \right].$$

กรณี $\alpha = 0$

$$\text{จะได้ } 2(p+2)^k = (2p+1)^{2s+1} - 1$$

ถ้า $s = 0$ แล้ว $(p+2)^k = p$ เป็นไปไม่ได้

ถ้า $s \geq 1$ จะได้

$$2(p+2)^k = p \left[(2p+1)^{2s} + (2p+1)^{2s-1} + \cdots + (2p+1) + 1 \right].$$

แสดงว่า $p \mid (p+2)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณี $\alpha \geq 1$

แสดงว่า $(2p+1) \mid (p+2)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณี 4 x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ y เป็นจำนวนเต็มคู่

ให้ $x = 2k+1$ และ $y = 2s$ บางค่า $k \geq 0$ และ $s \geq 1$ จะได้

$$(p+2)^{2k+1} + (2p+1)^{2s} = z^2$$

หรือ

$$\begin{aligned}(p+2)^{2k+1} &= z^2 - (2p+1)^{2s} \\ &= \left[z - (2p+1)^s \right] \left[z + (2p+1)^s \right]\end{aligned}$$

จึงได้ว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ α และ β ที่ทำให้

$$(p+2)^\alpha = z - (2p+1)^s \text{ และ}$$

$$(p+2)^\beta = z + (2p+1)^s$$

โดยที่ $\alpha < \beta$ และ $\alpha + \beta = 2k + 1$ จะได้

$$2(2p+1)^s = (p+2)^\alpha \left[(p+2)^{\beta-\alpha} - 1 \right].$$

กรณี $\alpha = 0$

$$\text{จะได้ } 2(2p+1)^s = (p+2)^{2k+1} - 1$$

ถ้า $k = 0$ แล้ว $2(2p+1)^s = p+1$ เป็นไปไม่ได้

ถ้า $k \geq 1$ จะได้

$$2(2p+1)^s = (p+1) \left[(p+2)^{2k} + (p+2)^{2k-1} + \cdots + (p+2) + 1 \right].$$

เนื่องจาก $p+1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ

$$(p+2)^{2k} + (p+2)^{2k-1} + \cdots + (p+2) + 1 \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}$$

แสดงว่า $p+1 = 2(2p+1)^l$ บางจำนวนเต็ม l โดยที่ $0 \leq l < s$

ถ้า $l = 0$ แสดงว่า $p = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า $1 \leq l < s$ แสดงว่า $2(2p+1)^l - p = 1$ เป็นไปไม่ได้

กรณี $\alpha \geq 1$

แสดงว่า $(p+2) \mid (2p+1)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ทฤษฎีบท 7.10

ให้ $p, p+2$ และ $2p+1$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \equiv 1 \pmod{4}$

สมการไดโอแฟนไทน์ $(p+2)^x + (2p+1)^y = z^2$ มีผลเฉลยที่ไม่เป็นลบก็ต่อเมื่อ

รากที่สองของ $\frac{p+1}{2}$ หรือ $p+3$ เป็นจำนวนเต็ม

7.5 สรุปท้ายบทที่ 7

สมการไดโอแฟนไทน์นี้จะสนใจคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้นและเรียกสมการที่สนใจคำตอบที่เป็นจำนวนเต็ม โดยสมการนั้นเป็นสมการดีกรีหนึ่งหรือดีกรีน้อยกว่าหนึ่ง ที่มีตัวแปรหนึ่งตัวหรือหลายตัว หรือระบบสมการ สำหรับการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นนั้นจะเป็นการศึกษาสมการทุกตัวแปรมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง และไม่มีพจน์ใดที่อยู่ในรูปผลคูณของตัวแปรโดยมีรูปสมการเป็น $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \dots + a_nx_n = b$ เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ซึ่งไม่เป็นศูนย์ และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ สำหรับระบบสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นนั้นจะเป็นการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น m สมการ และ n ตัวแปร โดยที่ $m, n > 1$ ในการหาผลเฉลยนั้นจะเริ่มจากการหาผลเฉลยของสมการแรก แล้วแทนค่าตัวแปรเพื่อหาผลเฉลยในสมการต่อไปเรื่อย ๆ ทีละสมการ เพื่อหาเงื่อนไขที่จะทำให้ได้ผลเฉลยของระบบสมการ สำหรับชุดของจำนวนเต็มสามจำนวน x, y และ z ที่ $x^2 + y^2 = z^2$ เรียกจำนวนที่มีคุณสมบัติดังกล่าวว่า สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส การหาสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน สามารถหาได้จากการกำหนดจำนวนแรกมา แล้วสามารถหาอีกสองจำนวนที่เหลือได้ และในหัวข้อสุดท้ายจะเป็นการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง ในรูปแบบ $a^x + b^y = z^2$ ซึ่งนักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาและหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวในรูปแบบต่าง ๆ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

1. จงหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1.1 $6x + 8y = 3$

1.2 $4x + 33y = 28$

1.3 $3x + 4y = 12$

1.4 $6x - 15y = 1$

1.5 $4x + 9y = 7$

1.6 $117x + 6y = 1$

1.7 $2x - 5y + 3z = 17$

1.8 $10x + 16y - 4z = 48$

1.9 $3x + 6y + 2z + 13w = 200$

1.10 $7x + 8y + 9z + 5w = 100$

2. จงหาผลเฉลยของระบบสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นต่อไปนี้

2.1 $2x + 3y + 7z = 22$

2.2 $x + y + 2z = 3$

$x - 4y - 5z = 25$

$x + 2y - z = 4$

2.3 $2x + 5y + 7z = 21$

2.4 $5x + y + 2z = 23$

$2x - 5y - 7z = 3$

$x + 2y - 3z = 41$

2.5 $7x + 5y + 3z = 102$

2.6 $x + 5y + 2z = 203$

$6x - 5y - 7z = 130$

$2x + 7y - 3z = 141$

3. มีเงิน 100 บาท ต้องการแลกเหรียญห้าบาท หนึ่งบาท และห้าสิบบาท โดยต้องให้มีเหรียญทั้งสามชนิดซึ่งรวมกันแล้วเท่ากับ 100 บาทจะแลกได้กี่วิธี
4. ถุงใบหนึ่งมีเหรียญสามชนิดคือ ห้าบาท หนึ่งบาท และห้าสิบบาท รวม 50 เหรียญ และในถุงนั้นมีเงิน 120 บาท จงหาว่ามีเหรียญแต่ละชนิดอย่างละเท่าใด
5. สำหรับจำนวนเต็มบวก n จงแสดงว่า $(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส
6. กำหนดจำนวนต่อไปนี้เป็นหนึ่งในจำนวนพีทาโกรัสปฐมนิจหาจำนวนที่เหลืออีก 2 จำนวน
- 6.1 8
- 6.2 13
- 6.3 15
- 6.4 24
- 6.5 35
- 6.6 45
- 6.7 56
- 6.8 60
7. จงหาสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส a, b, c ซึ่ง $40 < a, b, c < 100$
8. จงหาค่าของ (x, y, z) ที่ทำให้ $x^2 + y^2 = z^2$ เมื่อ $x, y > 0$ และ $0 < z < 20$
9. จงพิสูจน์ว่าถ้า a, b, c เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2 + y^2 = z^2$ แล้ว $4|a$ หรือ $4|b$

