

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6

การประยุกต์ปริพันธ์จำกัดเขต

เนื้อหาประจำบท

1. การหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและแกน X หรือแกน Y
2. การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง
3. การหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจความหมายของพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและแกน X หรือแกน Y
2. สามารถหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งใด ๆ กับแกน X
3. สามารถหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งใด ๆ กับแกน Y
4. เข้าใจความหมายของพื้นที่ระหว่างโค้ง
5. สามารถหาพื้นที่ระหว่างโค้งได้
6. สามารถหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งที่กำหนดให้ โดยหมุนรอบแกน X
7. สามารถหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งที่กำหนดให้ โดยหมุนรอบแกน Y
8. หาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่กำหนดให้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 การหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและ X หรือ Y
 - 1.2 การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง
 - 1.3 การหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
 - 2.1. ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์เพิ่มเติม
 - 2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation
3. ใบงาน

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. การตอบคำถาม
3. ทดสอบท้ายชั่วโมง
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 6

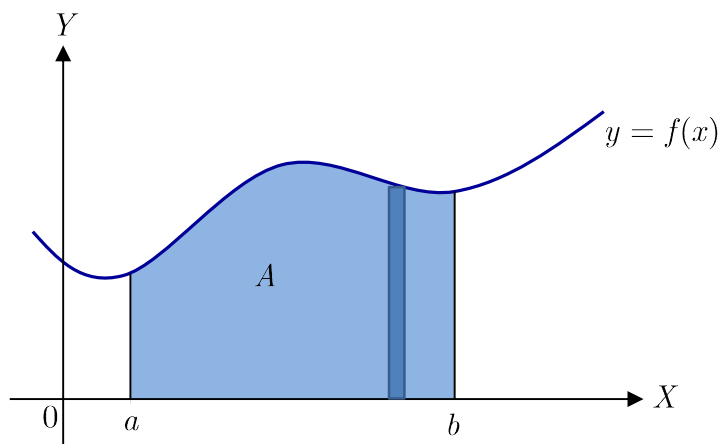
การประยุกต์ปริพันธ์จำกัดเขต

ในการหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมต่าง ๆ เช่น สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่เหลี่ยมผืนผ้า สี่เหลี่ยมด้านขนาน และรูปหลาย ๆ เหลี่ยมที่เคยได้ศึกษามาแล้วนั้น จะใช้สูตรการหาพื้นที่โดยตรงในการหา นอกเหนือจากพื้นที่รูปเหลี่ยมที่กล่าวมาข้างต้นแล้วการหาพื้นที่ในระนาบนั้นเราสามารถใช่วิธีแบ่งพื้นที่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมเล็ก ๆ หลาย ๆ รูป แล้วนำพื้นที่เหล่านั้นมารวมกันด้วยวิธีการของลิมิต ซึ่งคือนิยามของปริพันธ์จำกัดเขตนั่นเองสำหรับปริพันธ์จำกัดเขตมีประโยชน์ในการคำนวณหาพื้นที่ ปริมาตร ความยาวของเส้นโค้ง พื้นที่ผิว จุดศูนย์กลาง โมเมนต์ เป็นต้น ซึ่งพื้นที่ดังกล่าวนี้จะมีรูปแบบลักษณะแตกต่างกันออกไป และสำหรับในเนื้อหาที่เราจะศึกษาในบทนี้จะเป็นการประยุกต์ปริพันธ์เพื่อหาพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้งกับแกน X และแกน Y พร้อมทั้งการหาพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้งใด ๆ อีกด้วย และในหัวข้อสุดท้ายจะเป็นการประยุกต์ปริพันธ์เพื่อปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบแกน โดยเริ่มจากรอบแกน X แกน Y และแกนใด ๆ

6.1 พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งระหว่างแกน X หรือ Y

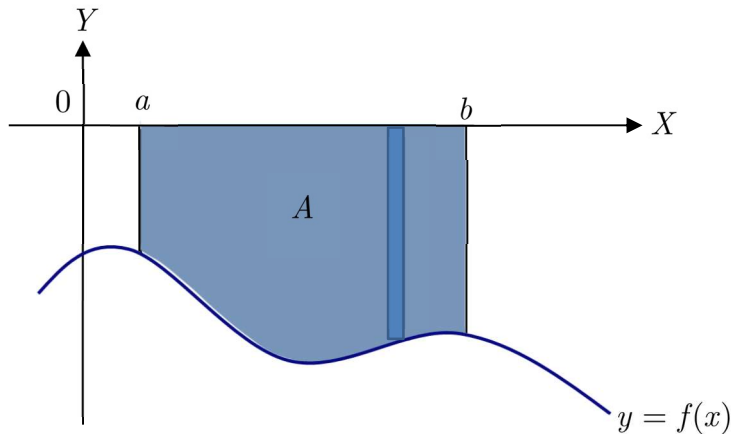
การหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและแกน X หรือ Y แบ่งพื้นที่ออกเป็น 4 รูปแบบโดย รัชชยศ จำปาหวาย (2564 : 180-187) และวิชัย วิทยาเกียรติเลิศ (2558 : 299-302) ได้แสดงไว้ดังนี้

1. ให้เส้นโค้ง $y = f(x) \geq 0$ มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน X เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$ โดยให้ A เป็นพื้นที่แรเงาที่ต้องการหาจะได้ $A = \int_a^b f(x) dx$ แสดงได้ดังภาพประกอบ 6.1



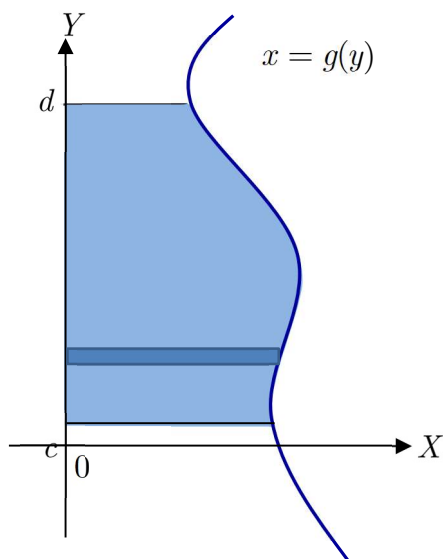
ภาพประกอบ 6.1 แสดงพื้นที่บนช่วงปิด $[a, b]$ เส้นโค้ง $y = f(x) \geq 0$

2. ให้เส้นโค้ง $y = f(x) \leq 0$ มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน X เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$ โดยให้ A เป็นพื้นที่แรเงาที่ต้องการหาจะได้ $A = \int_a^b -f(x) dx$ แสดงได้ดังภาพประกอบ 6.2



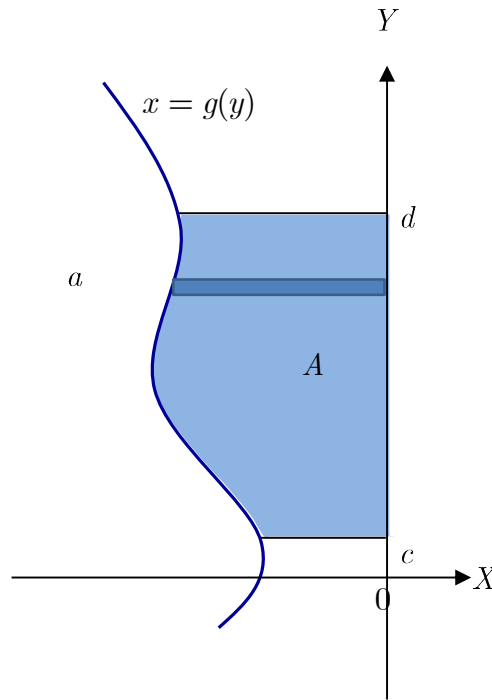
ภาพประกอบ 6.2 แสดงพื้นที่บนช่วงปิด $[a, b]$ เส้นโค้ง $y = f(x) \leq 0$

3. ให้เส้นโค้ง $x = g(y) \geq 0$ มีความต่อเนื่องบน $[c, d]$ พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = g(y)$ แกน Y เส้นตรง $y = c$ และเส้นตรง $y = d$ โดยให้ A เป็นพื้นที่แรเงาที่ต้องการหาจะได้ $A = \int_c^d g(y) dy$ แสดงได้ดังภาพประกอบ 6.3



ภาพประกอบ 6.3 แสดงพื้นที่บนช่วงปิด $[c, d]$ เส้นโค้ง $y = f(x) \geq 0$.

4. ให้เส้นโค้ง $x = g(y) \leq 0$ มีความต่อเนื่องบน $[c, d]$ พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = g(y)$ แกน Y เส้นตรง $y = c$ และเส้นตรง $y = d$ โดยให้ A เป็นพื้นที่แรเงาที่ต้องการหาจะได้ $A = \int_c^d -g(y) dy$ แสดงได้ดังภาพประกอบ 6.4



ภาพประกอบ 6.4 แสดงพื้นที่บนช่วงปิด $[c, d]$ เส้นโค้ง $x = g(y) \leq 0$

สำหรับตัวอย่างการหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน X นั้น สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ (2558 : 118-119) อธิระศักดิ์ อรุณจันนันท (2555 : 468-471) ได้แสดงไว้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.1 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 4x$ และแกน X

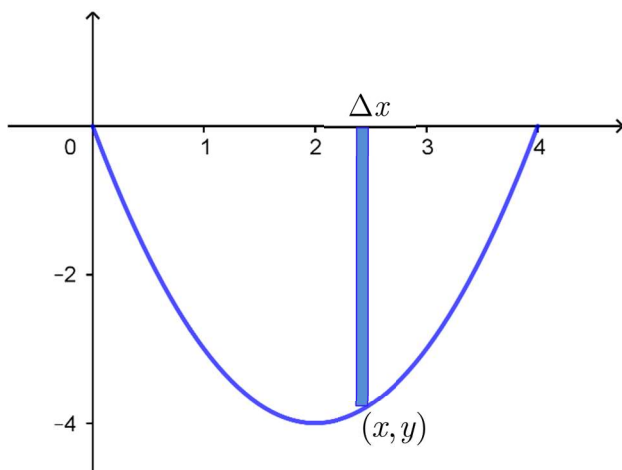
วิธีทำ หาจุดตัดแกน X ของเส้นโค้ง $y = x^2 - 4x$ โดยให้ $y = 0$

$$0 = x^2 - 4x = (x - 4)x$$

จะได้ $x = 0, 4$

แสดงว่าเส้นโค้งนี้ตัดแกน X ที่จุด $x = 0$ และ $x = 4$

แสดงได้ดังภาพ



เนื่องจาก $y = x^2 - 4x$ ต่อเนื่องทุก $x \in [0, 4]$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad A &= \int_0^4 -(x^2 - 4x) dx \\
 &= \int_0^4 (4x - x^2) dx \\
 &= \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 \\
 &= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 \\
 &= \left[2(4)^2 - \frac{(4)^3}{3} \right] - \left[2(0)^2 - \frac{(0)^3}{3} \right] \\
 &= 32 - \frac{64}{3} \\
 &= \frac{96 - 64}{3} \\
 &= \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 4x$ และแกน X

มีค่าเท่ากับ $\frac{32}{3}$ ตารางหน่วย

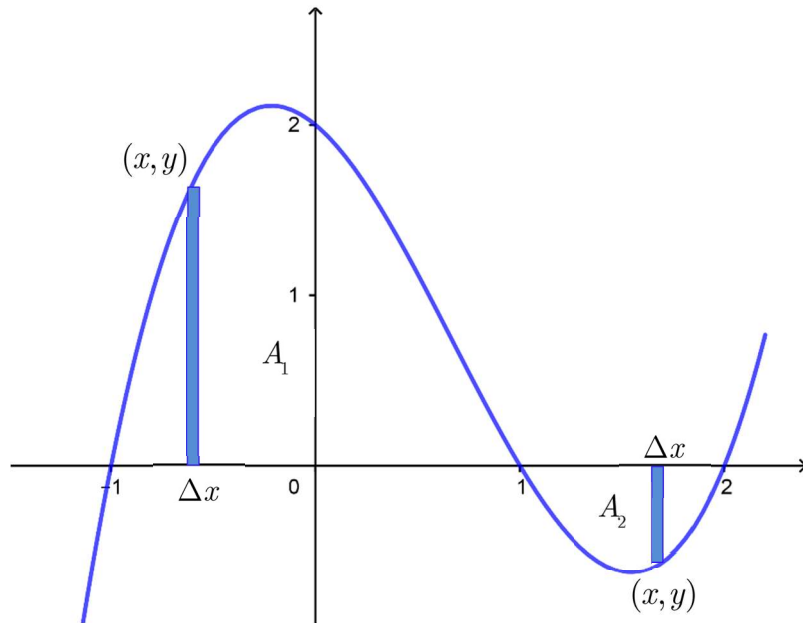
ตัวอย่าง 6.2 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ และแกน X บนช่วง $[-1, 2]$

วิธีทำ หาจุดตัดแกน X ของเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ โดยให้ $y = 0$

$$0 = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$$

แสดงว่าเส้นโค้งนี้ตัดแกน X ที่จุด $x = -1, x = 1$ และ $x = 2$

แสดงได้ดังภาพประกอบ



เนื่องจาก $f(x) \geq 0$ ทุก $x \in [-1, 1]$ และ $f(x) \leq 0$ ทุก $x \in [1, 2]$ ในการหาพื้นที่จึงต้องแบ่งออกเป็น 2 ตอน

ให้

$$A = A_1 + A_2$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 \\ &= \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{2(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2} + 2(1) \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{2(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right] \\ &= \frac{13}{12} - \left(-\frac{19}{12} \right) \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^2 -(x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\
&= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 \\
&= \left[-\frac{(2)^4}{4} + \frac{2(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} - 2(2) \right] - \left[-\frac{(1)^4}{4} + \frac{2(1)^3}{3} + \frac{(1)^2}{2} - 2(1) \right] \\
&= -\frac{2}{3} - \left(-\frac{13}{12} \right) \\
&= \frac{5}{12} \\
\text{จะได้ } A &= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}
\end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ และแกน X บนช่วง $[-1, 2]$ มีค่าเท่ากับ $\frac{37}{12}$ ตารางหน่วย

สำหรับตัวอย่างที่ผ่านมาเป็นการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งใด ๆ กับแกน X และต่อไปจะเป็นการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งใด ๆ กับแกน Y ซึ่ง Harold Jan R.T. (2015 : 56-60) และ วิลลภ เหมวงษ์ (2557 : 181-182) ได้แสดงตัวอย่างไว้ดังนี้

ตัวอย่าง 6.3 จงหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยแกน Y และเส้นโค้ง $x = 4y - y^2$

วิธีทำ หาจุดตัดแกน Y ของเส้นโค้ง $x = 4y - y^2$ โดยให้ $x = 0$

$$0 = 4y - y^2 = (4 - y)y$$

จะได้ $y = 0, 4$

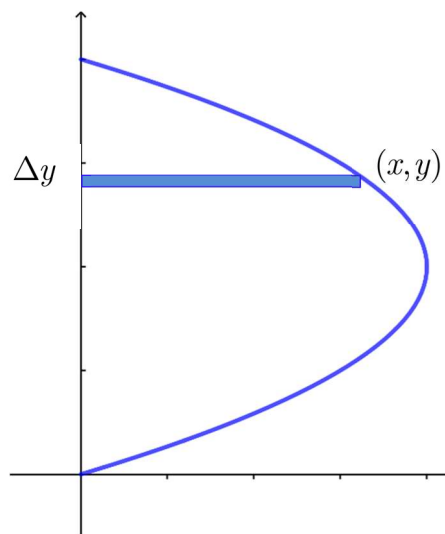
แสดงว่าเส้นโค้งนี้ตัดแกน Y ที่จุด $y = 0$ และ $y = 4$

เนื่องจากสมการอยู่ในรูปที่ x เป็นฟังก์ชันของ y

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } A &= \int_0^4 (4y - y^2) dy \\
&= \left[\frac{4y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_0^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[2y^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^4 \\
&= \left[2(4)^2 + \frac{(4)^3}{3} \right] - \left[2(0)^2 + \frac{(0)^3}{3} \right] \\
&= \frac{32}{3} - 0 \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

แสดงได้ดังภาพ



ดังนั้น พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยแกน Y และเส้นโค้ง $x = 4y - y^2$ มีค่าเท่ากับ $\frac{32}{3}$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6.4 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ แกน X แกน Y และเส้นตรง $x = 3$

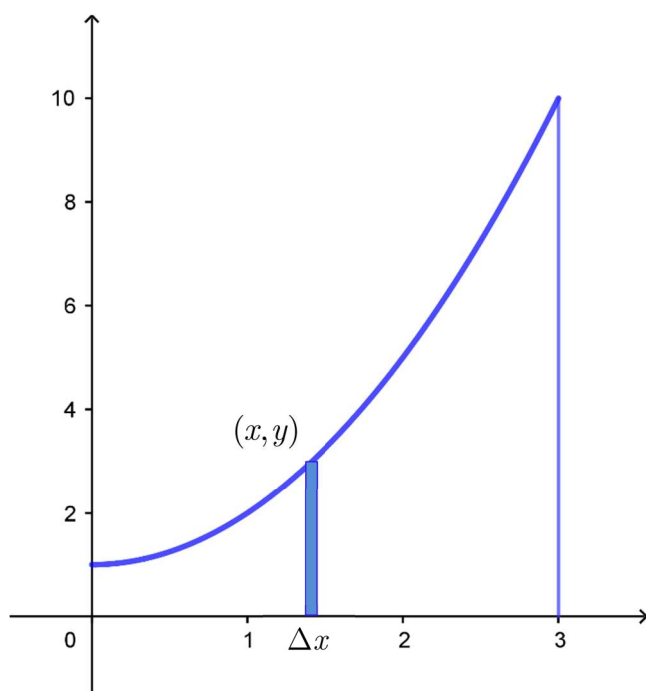
วิธีทำ เนื่องจาก $y = x^2 + 1 > 0$ ต่อเนื่องทุก $x \in [0, 3]$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } A &= \int_0^3 (x^2 + 1) dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^3 \\
&= \left[\frac{3^3}{3} + 3 \right] - \left[\frac{0^3}{3} + 0 \right]
\end{aligned}$$

$$= 12 - 0$$

$$= 12$$

แสดงได้ดังภาพ



ดังนั้น พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ แกน X แกน Y และเส้นตรง $x = 3$ มีค่าเท่ากับ 12 ตารางหน่วย

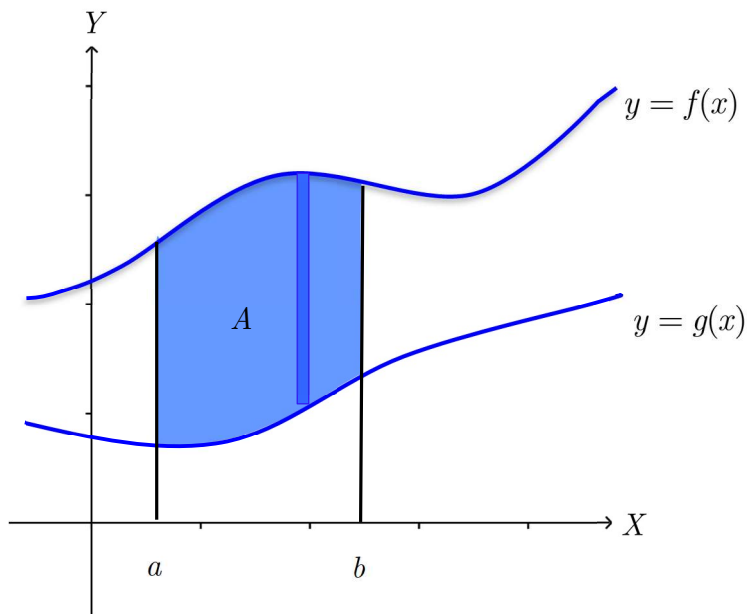
6.2 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

Gilbert. S. (2018 : 325-327) และ Edwin.J.H. and Gilbert.S. (2016 : 624-632) ได้แสดงการหาพื้นที่ระหว่างโค้ง กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุก x ใน $[a, b]$ พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x), y = g(x)$ เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$

ให้ A เป็นพื้นที่แรเงาที่ต้องการหาจะได้

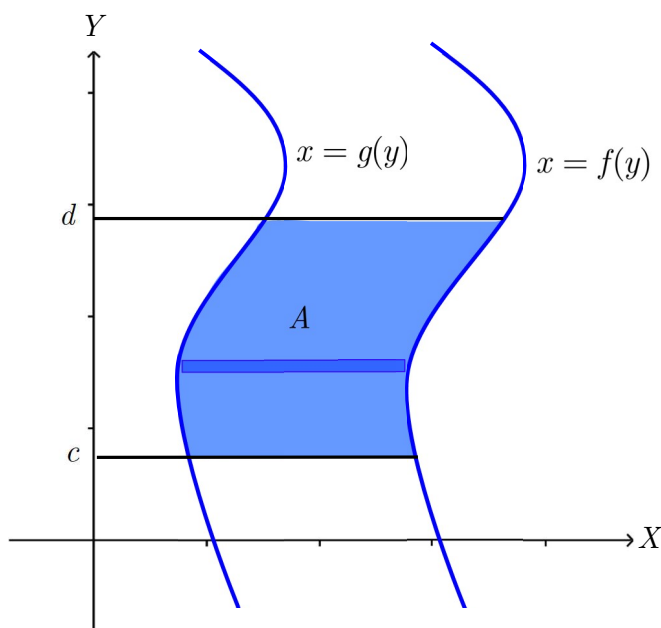
$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

แสดงได้ดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 6.5 แสดงพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้งบนช่วง $[a, b]$

ให้ $f(y)$ และ $g(y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน $[c, d]$ และ $f(y) \geq g(y)$ สำหรับทุก y ใน $[c, d]$ พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = f(y)$, $x = g(y)$ เส้นตรง $y = c$ และเส้นตรง $y = d$ ให้ A เป็นพื้นที่แรเงาที่ต้องการหา จะได้ $A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$
แสดงได้ดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 6.6 แสดงพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้งบนช่วง $[c, d]$

สำหรับตัวอย่างพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x), y = g(x)$ เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$ โดย Sigurd A. (2010 : 109) และคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร (2558 : 5-6) ได้แสดงไว้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.5 จงหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วย $y = 3 - x$ และ $y = x^2 - 9$

วิธีทำ หาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = 3 - x$ และ $y = x^2 - 9$

$$x^2 - 9 = 3 - x$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

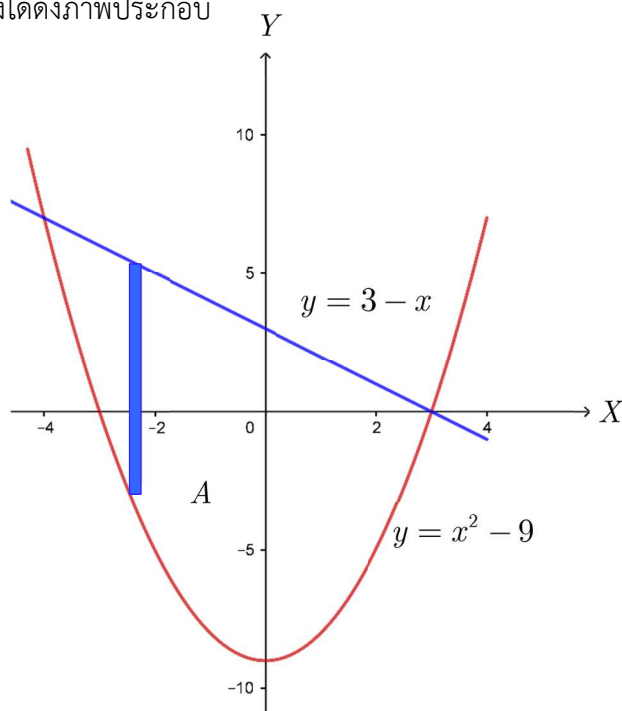
$$x = -4, 3$$

แทนค่า $x = -4$ ใน $y = 3 - x$ จะได้ $y = 3 - (-4) = 7$

แทนค่า $x = 3$ ใน $y = 3 - x$ จะได้ $y = 3 - 3 = 0$

นั่นคือเส้นโค้ง $y = 3 - x$ และ $y = x^2 - 9$ ตัดกันที่จุด $(-4, 7)$ และ $(3, 0)$

แสดงได้ดังภาพประกอบ



$$\begin{aligned} \text{จะได้ } A &= \int_{-4}^3 [(3 - x) - (x^2 - 9)] dx \\ &= \int_{-4}^3 [12 - x - x^2] dx \\ &= \left[12x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[12(3) - \frac{(3)^2}{2} - \frac{(3)^3}{3} \right] - \left[12(-4) - \frac{(-4)^2}{2} - \frac{(-4)^3}{3} \right] \\
&= \frac{343}{6}
\end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วย $y = 3 - x$ และ $y = x^2 - 9$ มีค่าเท่ากับ $\frac{343}{6}$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6.6 จงหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วย $y = 6x - x^2$ และเส้นโค้ง $y = 2x + x^2$

วิธีทำ หาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = 6x - x^2$ และเส้นโค้ง $y = 2x + x^2$

$$6x - x^2 = 2x + x^2$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0$$

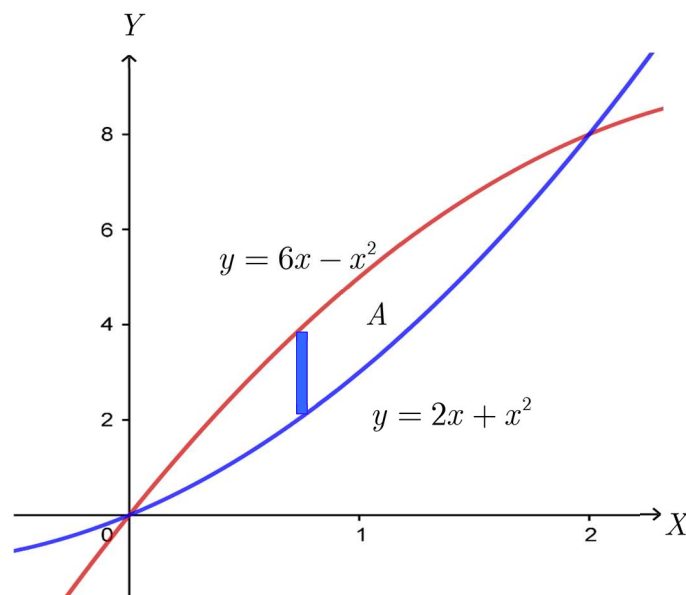
$$x = 0, 2$$

แทนค่า $x = 0$ ใน $y = 6x - x^2$ จะได้ $y = 0$

แทนค่า $x = 2$ ใน $y = 6x - x^2$ จะได้ $y = 8$

นั่นคือเส้นโค้ง $y = 6x - x^2$ และ $y = 2x + x^2$ ตัดกันที่จุด $(0, 0)$ และ $(2, 8)$

แสดงได้ดังภาพประกอบ



$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } A &= \int_0^2 [(6x - x^2) - (2x + x^2)] dx \\
&= \int_0^2 [4x - 2x^2] dx \\
&= \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[2(2)^2 - \frac{2}{3}(2)^3 \right] - \left[2(0)^2 - \frac{2}{3}(0)^3 \right] \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วย $y = 6x - x^2$ และ $y = 2x + x^2$ มีค่าเท่ากับ $\frac{8}{3}$ ตารางหน่วย

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างการหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = f(y), x = g(y)$ เส้นตรง $y = c$ และเส้นตรง $y = d$

ตัวอย่าง 6.7 จงหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยพาราโบลา $x = y^2$ และเส้นตรง $x = y + 2$

วิธีทำ หาจุดตัดของพาราโบลา $x = y^2$ และเส้นตรง $x = y + 2$

$$y^2 = y + 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y - 2)(y + 1) = 0$$

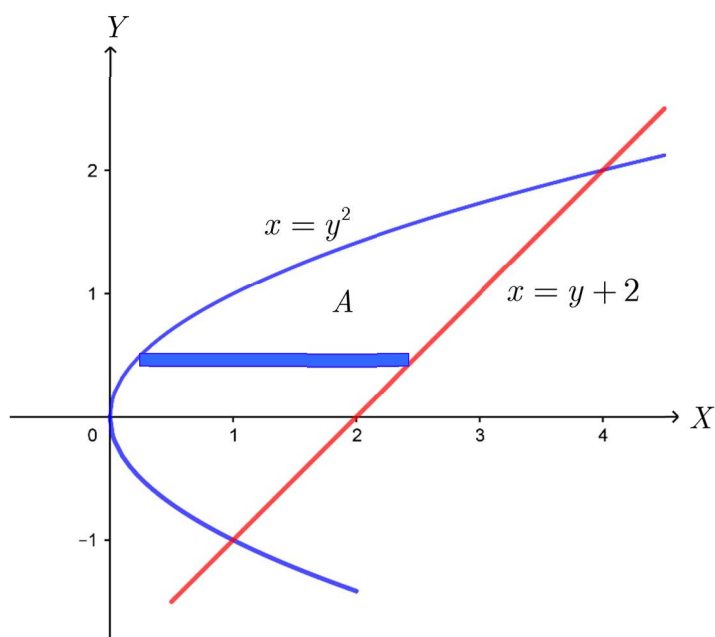
$$y = -1, 2$$

แทนค่า $y = -1$ ใน $x = y + 2$ จะได้ $x = 1$

แทนค่า $y = 2$ ใน $x = y + 2$ จะได้ $x = 4$

จุดตัดของพาราโบลา $x = y^2$ และเส้นตรง $x = y + 2$ ตัดกันที่จุด $(1, -1)$ และ $(4, 2)$

แสดงได้ดังภาพประกอบ



$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } A &= \int_{-1}^2 [(y+2) - (y^2)] dx \\
&= \int_{-1}^2 [y+2-y^2] dx \\
&= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 \\
&= \left[\frac{(2)^2}{2} + 2(2) - \frac{(2)^3}{3} \right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยพาราโบลา $x = y^2$ และเส้นตรง $x = y + 2$

มีค่าเท่ากับ $\frac{9}{2}$ ตารางหน่วย

สำหรับการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนั้นบางครั้งเราอาจจะต้องแบ่งการหาพื้นที่ออกเป็นหลายๆ พื้นที่ย่อย โดย สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2554 : 49 -50) ได้แสดงตัวอย่างไว้ดังนี้

ตัวอย่าง 6.8 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 3x^3 - x^2 - 10x$ และ

$$y = -x^2 + 2x$$

วิธีทำ หาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = 3x^3 - x^2 - 10x$ และ $y = -x^2 + 2x$

$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$

$$3x^3 - 12x = 0$$

$$3x(x^2 - 4) = 0$$

$$3x(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = -2, 0, 2$$

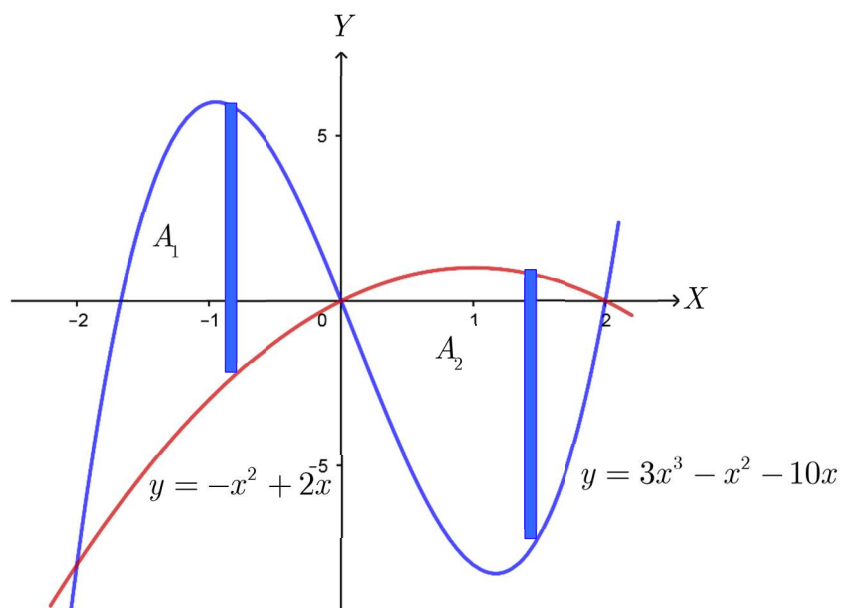
แทนค่า $x = -2$ ใน $y = -x^2 + 2x$ จะได้ $y = -8$

แทนค่า $x = 0$ ใน $y = -x^2 + 2x$ จะได้ $y = 0$

แทนค่า $x = 2$ ใน $y = -x^2 + 2x$ จะได้ $y = 0$

นั่นคือเส้นโค้งทั้งสอง ตัดกันที่จุด $(-2, -8), (0, 0)$ และ $(2, 0)$

แสดงได้ดังภาพประกอบ



ต้องแบ่งออกเป็น 2 ตอน

โดยให้

$$A = A_1 + A_2$$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } A_1 &= \int_{-2}^0 [(3x^3 - x^2 - 10x) - (-x^2 + 2x)] dx \\
 &= \int_{-2}^0 [3x^3 - 12x] dx \\
 &= \left[\frac{3}{4} x^4 - 6x^2 \right]_{-2}^0 \\
 &= \left[\frac{3}{4} (0)^4 - 6(0)^2 \right] - \left[\frac{3}{4} (-2)^4 - 6(-2)^2 \right] \\
 &= 0 - (12 - 24) \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } A_2 &= \int_0^2 [(-x^2 + 2x) - (3x^3 - x^2 - 10x)] dx \\
 &= \int_0^2 [-3x^3 + 12x] dx \\
 &= \left[-\frac{3}{4} x^4 + 6x^2 \right]_0^2
 \end{aligned}$$

$$= \left[-\frac{3}{4}(2)^4 + 6(2)^2 \right] - \left[-\frac{3}{4}(0)^4 + 6(0)^2 \right]$$

$$= 12$$

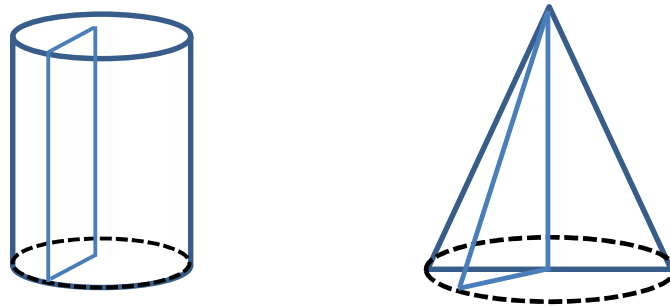
จะได้ $A = 12 + 12 = 24$

ดังนั้น พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 3x^3 - x^2 - 10x$

และ $y = -x^2 + 2x$ มีค่าเท่ากับ 24 ตารางหน่วย

6.3 ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน

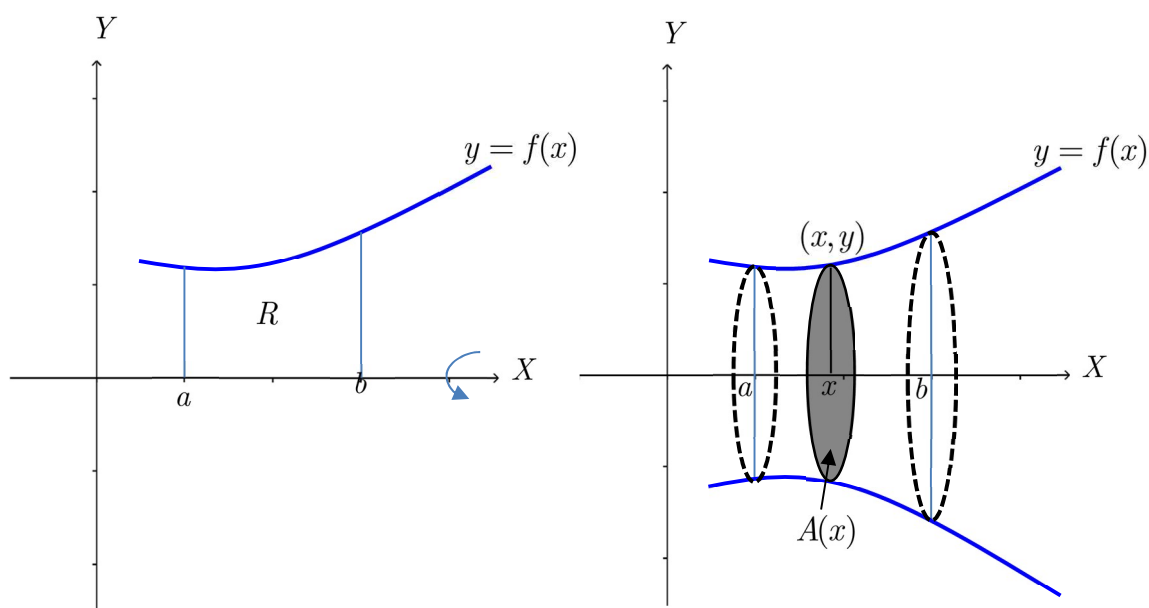
รูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนหมายถึงรูปทรงตันที่ได้จากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบรอบเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งอยู่ในระนาบเดียวกัน เรียกเส้นตรงนั้นว่า แกนหมุน เช่น หมุนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารอบด้านใดด้านหนึ่งจะได้ ทรงกระบอก หมุนรูปสามเหลี่ยมรอบด้านประกอบมุมฉากด้านใดด้านหนึ่งจะได้กรวยกรม แสดงได้ดังภาพประกอบ 6.7



ภาพประกอบ 6.7 แสดงรูปทรงกระบอกและกรวยกรมที่เกิดจากการหมุน

สำหรับการหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบ xy รอบแกน X หรือแกน Y หรือเส้นตรงที่ขนานกับแกน X หรือแกน Y ในการหาปริมาตรนี้เราจะพิจารณา คือแบบจาน (Disk method) สำหรับการหาปริมาตรของรูปทรงตันแบบจานใช้หลักว่าปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนมีภาคตัดที่ตั้งฉากกับแกนหมุนเป็นวงกลมหรือวงแหวน

Guichard. D. (2019 : 199-200) Paul. D. (2011 : 184 - 188) และ Sigurd A. (2010 : 110 -113) ได้แสดงการหาปริมาตรของรูปทรงตันแบบจาน โดยให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบน $[a, b]$ และให้ R เป็นพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $y = f(x)$ และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ต้องการหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของพื้นที่ R รอบแกน X ดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 6.8 แสดงการหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของพื้นที่ R รอบแกน X

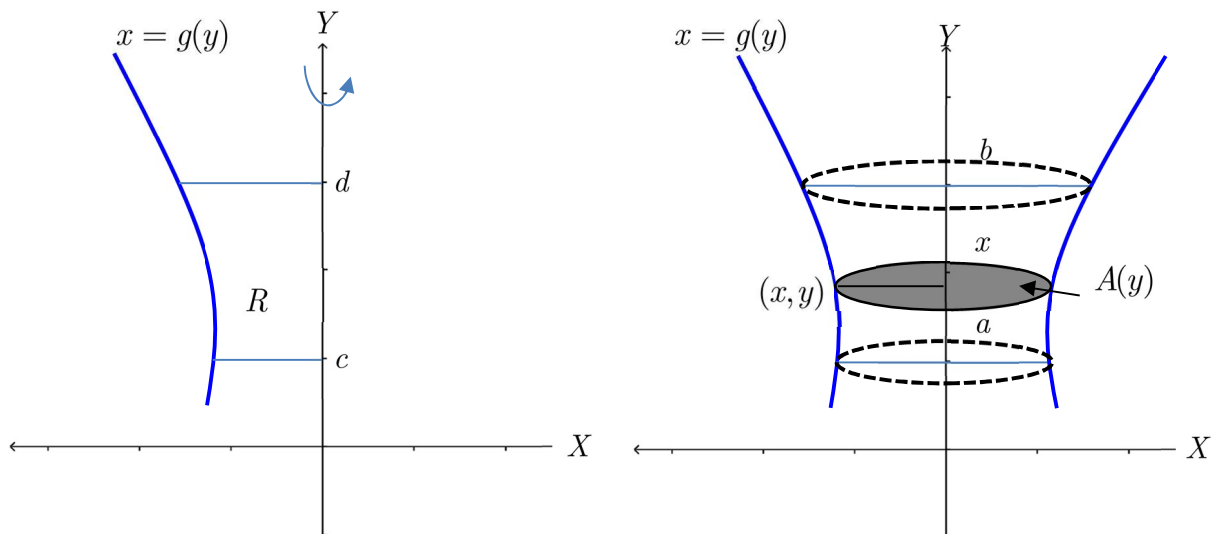
ให้ V_x แทนปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ R รอบแกน X
 $A(x)$ แทนพื้นที่ภาคตัดขวางที่ตั้งฉากกับแกน X ณ จุด x ใด ๆ
 $A(x)$ มีพื้นที่เป็นรูปวงกลม รัศมียาว y นั่นคือ

$$A(x) = \pi y^2$$

ดังนั้นจะได้ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบแกน X คือ

$$V_x = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi y^2 dx$$

ในทำนองเดียวกัน ให้ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบน $[c, d]$ และให้ R เป็นพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $x = g(y)$ แกน Y เส้นตรง $y = c$ และ $y = d$ ดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 6.9 แสดงการหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของพื้นที่ R รอบแกน Y

ให้ V_y แทนปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ R รอบแกน Y
 $A(y)$ แทนพื้นที่ภาคตัดขวางที่ตั้งฉากกับแกน Y ณ จุด y ใด ๆ
 $A(y)$ มีพื้นที่เป็นรูปวงกลม รัศมียาว x นั่นคือ

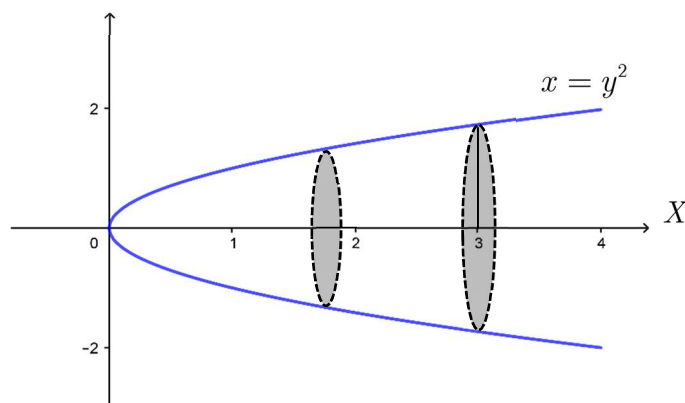
$$A(y) = \pi x^2$$

ดังนั้นจะได้ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบแกน Y คือ

$$V_y = \int_c^d A(y) dy = \int_a^b \pi x^2 dy$$

ตัวอย่าง 6.9 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ ระหว่าง $x = 0$ และ $x = 3$

วิธีทำ ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ให้ V_x เป็นปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน X จะได้

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^3 \pi y^2 dx \\ &= \int_0^3 \pi x dx \\ &= \left[\frac{x^2 \pi}{2} \right]_0^3 \\ &= \left[\frac{3^2 \pi}{2} \right] - \left[\frac{0^2 \pi}{2} \right] \\ &= \frac{9}{2} \pi \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ ระหว่าง $x = 0$

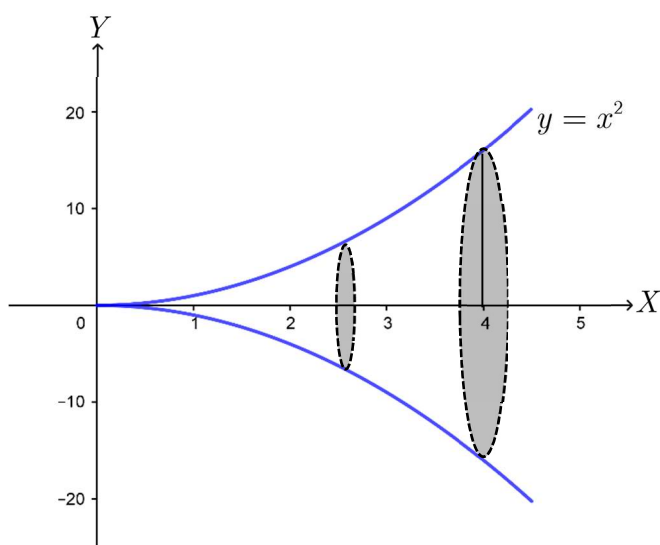
และ $x = 3$ มีค่าเท่ากับ $\frac{9}{2} \pi$ ลูกบาศก์หน่วย

ตัวอย่าง 6.10 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$

ระหว่าง $x = 0$ และ $x = 4$

วิธีทำ ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$

แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ให้ V_x เป็นปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน X จะได้

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^4 \pi y^2 dx \\ &= \int_0^4 \pi x^4 dx \\ &= \left[\frac{x^5 \pi}{5} \right]_0^4 \\ &= \left[\frac{4^5 \pi}{5} \right] - \left[\frac{0^5 \pi}{5} \right] \\ &= 512\pi \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ ระหว่าง $x = 0$ และ $x = 4$ มีค่าเท่ากับ 512π ลูกบาศก์หน่วย

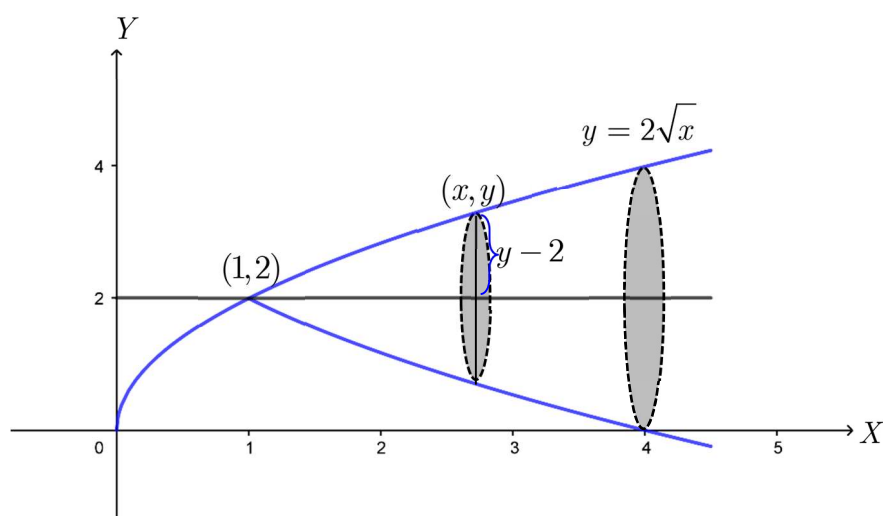
ตัวอย่าง 6.11 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 2\sqrt{x}$ เส้นตรง $x = 4$ รอบเส้นตรง $y = 2$

วิธีทำ ให้ V_x เป็นปริมาตรของรูปทรงตัน

$A(x)$ เป็นพื้นที่ภาคตัดขวางที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $y = 2$

ภาคตัดขวางดังกล่าวเป็นวงกลมรัศมียาว $y - 2$

แสดงได้ดังภาพประกอบ



$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } V_x &= \int_1^4 \pi r^2 dx \\
&= \int_1^4 \pi(y-2)^2 dx \\
&= \int_1^4 \pi[2\sqrt{x}-2]^2 dx \\
&= \int_1^4 \pi[4x-8\sqrt{x}+4] dx \\
&= 4\pi \int_1^4 [x-2\sqrt{x}+1] dx \\
&= 4\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + x \right]_1^4 \\
&= 4\pi \left[\left(\frac{(4)^2}{2} - \frac{4}{3}(4)^{3/2} + (4) \right) - \left(\frac{(1)^2}{2} - \frac{4}{3}(1)^{3/2} + (1) \right) \right] \\
&= \frac{14}{3}\pi
\end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 2\sqrt{x}$ และเส้นตรง

$$x = 4 \text{ รอบเส้นตรง } y = 2 \text{ มีค่าเท่ากับ } \frac{14}{3}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

ต่อไปจะพิจารณาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบ xy ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ ในกรณีนี้เมื่อหมุนพื้นที่รอบแกนหมุนจะทำให้เกิดช่องว่างปริมาตรที่หาได้จึงเป็นผลต่างของปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่นั้นกับปริมาตรของส่วนที่เป็นช่องว่าง

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร (2558 : 22-23) ได้สรุปไว้ดังนี้ ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบ xy ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ รอบเส้นตรง $y = k$ โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $f(x) \geq g(x) \geq k$ ทุก ๆ $x \in [a, b]$

$A(x)$ เป็นพื้นที่ภาคตัดขวางที่ตั้งฉากกับแกนหมุน $y = k$ ณ จุด x ใด ๆ ภาคตัดดังกล่าวเป็นวงแหวนที่มี

$$\text{รัศมีวงนอกเท่ากับ } f(x) - k$$

$$\text{รัศมีวงในเท่ากับ } g(x) - k$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } A(x) &= \pi R^2 - \pi r^2 \\
&= \pi(R^2 - r^2) \\
&= \pi \left([f(x) - k]^2 - [g(x) - k]^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi \left([f(x) - k]^2 - [g(x) - k]^2 \right) dx$$

ในทำนองเดียวกันปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบ xy ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ เส้นตรง $y = c$ และ $y = d$ รอบเส้นตรง $x = k$ โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[c, d]$ และ $f(y) \geq g(y) \geq k$ ทุก ๆ $y \in [c, d]$

$$\text{จะได้ } V = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \pi \left([f(y) - k]^2 - [g(y) - k]^2 \right) dy$$

ตัวอย่าง 6.12 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y = 4x - x^2$ และหมุนรอบแกน X

วิธีทำ หาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y = 4x - x^2$

$$x^2 = 4x - x^2$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0$$

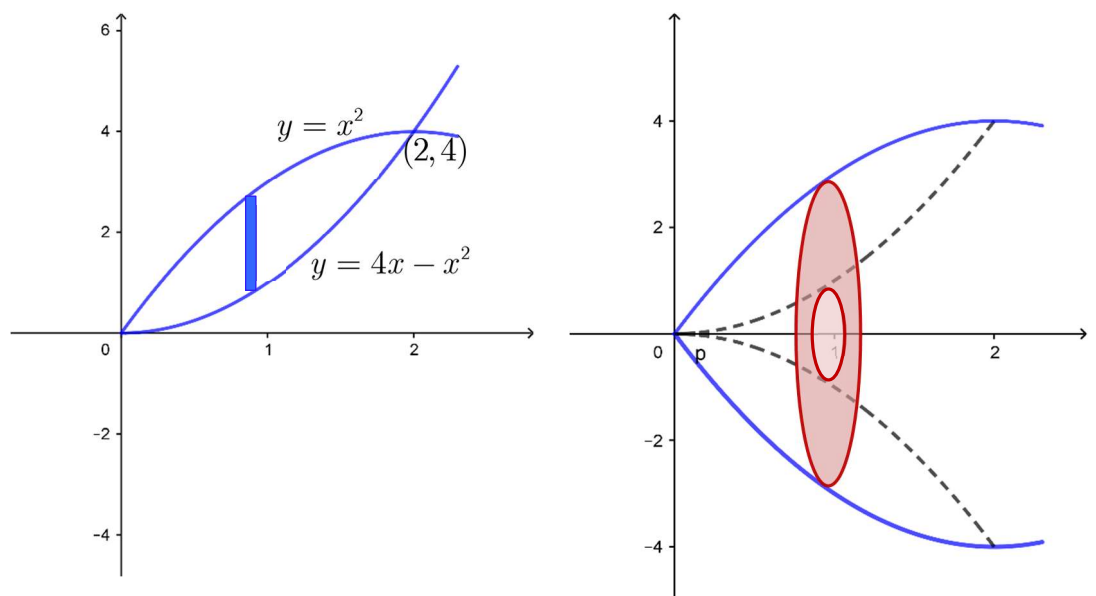
$$x = 0, 2$$

แทนค่า $x = 0$ ใน $y = x^2$ จะได้ $y = 0$

แทนค่า $x = 2$ ใน $y = x^2$ จะได้ $y = 4$

นั่นคือเส้นโค้งทั้งสอง ตัดกันที่จุด $(0, 0)$ และ $(2, 4)$

แสดงได้ดังภาพประกอบ



ให้ V_x เป็นปริมาตรของรูปทรงตัน

จาก

$$V_x = \int_a^b \pi \left([f(x) - k]^2 - [g(x) - k]^2 \right) dx$$

เนื่องจาก $k = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} V_x &= \int_a^b \pi \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx \\ &= \int_0^2 \pi \left([4x - x^2]^2 - [x^2]^2 \right) dx \\ &= \int_0^2 \pi (16x^2 - 8x^3 + x^4 - x^4) dx \\ &= \int_0^2 \pi (16x^2 - 8x^3) dx \\ &= \pi \left[\frac{8}{3} x^3 - 2x^4 \right]_0^2 \\ &= \pi \left[\left(\frac{8}{3} (2)^2 - 2(2)^4 \right) - \left(\frac{8}{3} (0)^2 - 2(0)^4 \right) \right] \\ &= \frac{32}{3} \pi \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ

$$y = 4x - x^2 \text{ และหมุนรอบแกน } X \text{ มีค่าเท่ากับ } \frac{32}{3} \pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

ตัวอย่าง 6.13 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง

$$y = x^2 + 1 \text{ และเส้นตรง } y = x + 3 \text{ หมุนรอบเส้นตรง } y = -1$$

วิธีทำ หาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ และเส้นตรง $y = x + 3$

$$x^2 + 1 = x + 3$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

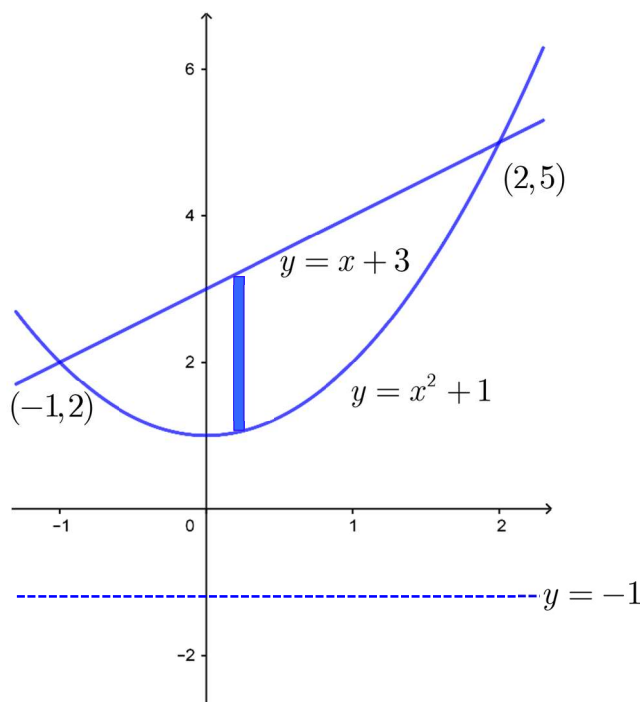
$$x = 2, -1$$

แทนค่า $x = -1$ ใน $y = x + 3$ จะได้ $y = 2$

แทนค่า $x = 2$ ใน $y = x + 3$ จะได้ $y = 5$

นั่นคือเส้นโค้งทั้งสอง ตัดกันที่จุด $(-1, 2)$ และ $(2, 5)$

แสดงได้ดังภาพประกอบ



ให้ V_x เป็นปริมาตรของรูปทรงตัน

จาก

$$V_x = \int_a^b \pi \left([f(x) - k]^2 - [g(x) - k]^2 \right) dx$$

เนื่องจาก $k = -1$ จะได้

$$\begin{aligned} V_x &= \int_{-1}^2 \pi \left([(x+3)+1]^2 - [(x^2+1)+1]^2 \right) dx \\ &= \int_{-1}^2 \pi \left([x+4]^2 - [x^2+2]^2 \right) dx \\ &= \int_{-1}^2 \pi \left([x^2+4x+16] - [x^4+4x^2+2] \right) dx \\ &= \int_{-1}^2 \pi (-x^4 - 3x^2 + 4x + 14) dx \\ &= \pi \left[-\frac{x^5}{5} - x^3 + 2x^2 + 14x \right]_{-1}^2 \\ &= \left[\frac{38}{5} - \frac{54}{5} \right] \pi \\ &= \frac{16}{5} \pi \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ และ

เส้นตรง $y = x + 3$ หมุนรอบเส้นตรง $y = -1$ มีค่าเท่ากับ $\frac{16}{5} \pi$ ลูกบาศก์หน่วย

6.4 สรุปท้ายบท

การหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและแกน X หรือ Y แยกพิจารณา ดังนี้พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน X เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$ คือ

$$A = \int_a^b f(x) dx \text{ สำหรับเส้นโค้ง } y = f(x) \geq 0 \text{ แต่ถ้า } y = f(x) \leq 0 \text{ แล้ว } A = \int_a^b -f(x) dx$$

ในทำนองเดียวกันพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = g(y)$ แกน Y เส้นตรง $y = c$ และเส้นตรง

$$y = d \text{ คือ } A = \int_c^d g(y) dy \text{ สำหรับ } x = g(y) \geq 0 \text{ และ } A = \int_c^d -g(y) dy \text{ สำหรับ}$$

$$x = g(y) \leq 0$$

การหาพื้นที่ระหว่างโค้งระหว่าง $f(x)$ และ $g(x)$ บน $[a, b]$ และ $f(x) \geq g(x)$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

การหาพื้นที่ระหว่างโค้งระหว่าง $f(y)$ และ $g(y)$ บน $[c, d]$ และ $f(y) \geq g(y)$ จะได้

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

การหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบ xy รอบแกน X หรือแกน Y หรือเส้นตรงที่ขนานกับแกน X หรือแกน Y

$$V_x = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi y^2 dx$$

$$V_y = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \pi x^2 dy$$

ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบ xy ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ รอบเส้นตรง $y = k$ และ $f(x) \geq g(x) \geq k$

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi \left([f(x) - k]^2 - [g(x) - k]^2 \right) dx$$

ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบ xy ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ รอบเส้นตรง $x = k$ และ $f(y) \geq g(y) \geq k$

$$V = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \pi \left([f(y) - k]^2 - [g(y) - k]^2 \right) dy$$

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. จงหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและเส้นตรงที่กำหนดให้

1.1 $y = x^2$ แกน X เส้นตรง $x = 1$ และเส้นตรง $x = 4$

1.2 $x = y^2 - 2y - 8$ แกน Y เส้นตรง $y = -1$ และเส้นตรง $y = 3$

1.3 $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ และแกน X

1.4 $y = x^2$ และแกน X

1.5 $y = x^2 - 7x + 6$ แกน X เส้นตรง $x = 2$ และเส้นตรง $x = 6$

1.6 $y^2 = 4x$ และ $y = 2x - 4$

1.7 $y = 6x - x^2$ และ $y = x^2 - 2x$

2. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งที่กำหนดให้ โดยหมุนรอบแกน X

2.1 $y = x^2, x = 0, x = 2, y = 0$

2.2 $y = \sqrt{25 - x^2}, y = 3$

2.3 $x = \sqrt{y}, x = y/4$

2.4 $x = 2y - 2y^2, x = 0$

2.5 $y^2 = x, y = 1, x = 0$

2.6 $y = x^2, x = 1, y = 0$

2.7 $y^2 = 8x, y = 0, x = 2$

3. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งที่กำหนดให้ โดยหมุนรอบแกน Y

3.1 $y = x^3, x = 0, y = 1$

3.2 $x = \sqrt{1 + y}, x = 0, y = 3$

3.3 $x = y^2, x = y + 2$

$$3.4 \quad y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$$

$$3.5 \quad y = x^3, \quad x = 1, \quad y = 0$$

$$3.6 \quad y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$$

$$3.7 \quad y = 2x - 1, \quad y = -2x + 3, \quad x = 2$$

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่กำหนดให้ รอบเส้นตรงที่กำหนดให้

$$4.1 \quad \text{บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย } y = 2 - x, \quad y = 0 \text{ และ } x = 0 \text{ หมุนรอบแกน } y = 3$$

$$4.2 \quad \text{บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย } y = \sqrt{x}, y = 2 \text{ และ } x = 0 \text{ หมุนรอบแกน } x = 4$$

$$4.3 \quad \text{บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย } y = e^x, x = 0, x = 2 \text{ และ } y = 0 \text{ หมุนรอบแกน } y = -2$$

$$4.4 \quad \text{บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย } y = 4 - x, y = 4 \text{ และ } y = x \text{ หมุนรอบแกน } x = 4$$

$$4.5 \quad \text{บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย } y = x \text{ และ } y = x^2 - 6 \text{ หมุนรอบแกน } y = 3$$

$$4.6 \quad \text{บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย } y = x^2, y = 2 - x \text{ และ } x = 0 \text{ หมุนรอบแกน } x = 1$$

เอกสารอ้างอิง

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร. (2558). **คณิตศาสตร์**

เบื้องต้น. พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยนเรศวร.

ธีระศักดิ์ อัจฉนนท์. (2555). **แคลคูลัส 1. สำหรับวิศวกร**. ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์.

ธัญยศ จำปาหวาย. (2564). **แคลคูลัส 2**. กรุงเทพมหานคร : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

วัลลภ เหมวงศ์. (2557). **แคลคูลัส 1**. อุตรธานี : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรธานี.

วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. (2558). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : ปลาทอง ก๊อปปี้ ปริ้นท์.

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. (2554).

แคลคูลัส 2 มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ. (2558). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : พิมพ์ดีการพิมพ์.

Edwin.J.H. and Gilbert.S. (2016). **Calculus Volume 2**. Texas : OpenStax Rice University.

Gilbert. S. (2018). **Calculus**. Massachusetts : MIT Department of Mathematics.

Guichard. D. (2019). **Single Variable Calculus**. Washington : Whitman College.

Harold Jan R.T. (2015). **Calculus 2**. London : Lap Lambert Academic.

Paul. D. (2011). **Calculus III**. Texas : Lamar University.

Sigurd A. (2010). **First Semester Calculus**. Minneapolis : University of Minnesota.

