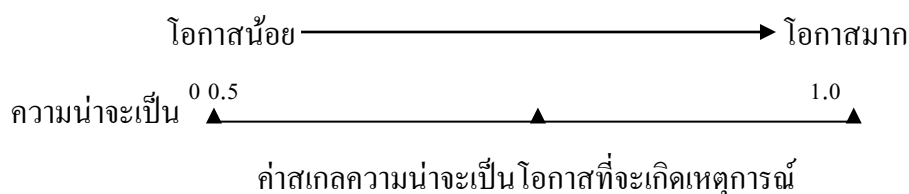


"ความน่าจะเป็น: กุญแจสำคัญในการตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน"

การวิเคราะห์ข้อมูลที่มีความหลากหลายและมีความซับซ้อนมากขึ้น หนีไม่พ้นกับการคาดการณ์หรือการพยากรณ์ทั้งแบบใช้หลักประสบการณ์หรือหลักเหตุผลขึ้นอยู่กับสถานการณ์ฐานข้อมูลที่มีอยู่ในขณะนั้น โดยในที่นี้จะพิจารณาหลักเกณฑ์เชิงเหตุผลในการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยการคำนวณหาความน่าจะเป็น (Probability) เพื่อใช้ในการพิจารณาต่อความไม่แน่นอนของข้อมูลหรือสถานการณ์ต่างๆ ซึ่งวิธีการคำนวณหาความน่าจะเป็นมีความสำคัญต่อการตัดสินใจของเหตุการณ์นั้นๆ ที่พิจารณาอย่างมีนัยสำคัญในโลกปัจจุบันเป็นอย่างมาก ที่จะพิจารณาถึงโอกาสของเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใดว่าจะเกิดขึ้น อาทิเช่น การคาดการณ์สถานการณ์ของการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของประเทศในช่วงไตรมาสที่ 3 มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น 0.4 หรือคาดการณ์อัตราการว่างงานของคนในประเทศจะลดลง 0.7 เป็นต้น นอกจากนั้นพบว่าการคาดการณ์ด้วยการนำคำนวณหาความน่าจะเป็นมิใช่เพียงเป็นการคาดการณ์ทางด้านเศรษฐกิจเท่านั้น ยังสามารถนำไปพิจารณาในด้านการเมือง ด้านสังคม ด้านอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องอย่างกว้างขวาง เพื่อนำมาถึงการหาโอกาสที่จะเป็นไปได้ในการพัฒนาและวางแผนตามความเหมาะสมดังนั้นในบทนี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจการคำนวณความน่าจะเป็นไปใช้จึงจะอธิบายความน่าจะเป็น 9 ส่วนเพื่อง่ายในการศึกษา (กัลยา, 2557: 78-114) ดังนี้ 1.ความหมายเบื้องต้นของความน่าจะเป็น 2.หลักการนับ 3.การคำนวณความน่าจะเป็น 4.คุณสมบัติของความน่าจะเป็น 5.กฎความน่าจะเป็น 6.เหตุการณ์อิสระต่อกัน 7.ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข 8.แผนผังต้นไม้ 9.กฎของเบย์

1.ความหมายเบื้องต้นของความน่าจะเป็น (Basic Definitions of Probability)

ความน่าจะเป็นเป็นเกณฑ์การคำนวณวิธีหนึ่งของเหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้นในช่วงหนึ่งช่วงใดที่เกี่ยวข้องพันซ์กับความไม่แน่นอน (Uncertainty) ที่ทำการวิเคราะห์ถึงความน่าจะเป็นที่สามารถเกิดขึ้นได้กับเกิดขึ้นไม่ได้ต่อการสร้างโอกาสของเหตุการณ์นั้นที่จะปรากฏ (Williams, Sweeney and Anderson, 2009: 157) โดยค่าของความน่าจะเป็นจะอยู่ในสเกลระหว่าง 0 ถึง 1 ซึ่งนับบ่งบอกว่า ถ้าความน่าจะเป็นใกล้กับค่า 0 หรือเท่ากับ 0 หมายถึง โอกาสในการจะไม่เกิดเหตุการณ์หรือโอกาสเกิดขึ้นน้อยมาก ขณะที่ถ้าความน่าจะเป็นใกล้กับค่า 1 หรือเท่ากับ 1 นั้น หมายถึง โอกาสในการเกิดเหตุการณ์มีสูงมาก ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ค่าโอกาสที่เกิดเหตุการณ์จาก 0 ถึง 1 ของความน่าจะเป็น

ที่มา: Williams, Sweeney and Anderson, 2009: 157

ตัวอย่างเช่น พิจารณาถึงโอกาสการเกิดอุบัติเหตุบนท้องถนนในช่วงเทศกาลสงกรานต์ มีโอกาสจะเกิดถึง 0.9 แสดงถึง ความน่าจะเป็นสูงมากที่จะเกิดอุบัติเหตุเพราะใกล้เคียงกับ 1.0 กรณีมีกฎหมายให้เล่นเทศกาลสงกรานต์เป็นเฉพาะพื้นที่ (Zoning) ตามจุดต่างๆ ของจังหวัด โอกาสในการเกิดอุบัติเหตุจะเกิดขึ้น 0.6 แสดงถึง ความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติเหตุอยู่ใกล้ค่า 0.5 มีโอกาสเกิดอุบัติเหตุแต่น้อยกว่าการให้เล่นที่ไม่กฎหมายบังคับ เป็นต้น

คำสำคัญและสัญลักษณ์ของความน่าจะเป็น

การคำนวณด้วยความน่าจะเป็นจะต้องเข้าใจถึงคำสำคัญและสัญลักษณ์ (Symbolism) ที่จะสื่อถึงการแปลความหมายของความสัมพันธ์ต่างๆ โดยสิ่งต้องเข้าใจจะประกอบด้วย ดังนี้ (Williams, Sweeney and Anderson, 2009: 157-158)

การใช้สัญลักษณ์แทนคำบรรยายจะใช้ $P(A)$ หมายถึง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A มีโอกาสจะเกิดขึ้นช่วงระหว่างค่า 0 ถึง 1 สามารถกำหนดได้ว่า $0 \leq P(A_i) \leq 1, i =$ เหตุการณ์ครั้งที่พิจารณา

การทดลอง (Experiment) เป็นกระบวนการหนึ่งของเหตุการณ์ที่ทำการทดสอบว่าจะเกิดผลลัพธ์ (Outcome) ในทิศทางความน่าจะเป็นเป็นอย่างไร (Douglas A., Other Authors, 2005: 141) อาทิเช่น การโยนเหรียญหนึ่งเหรียญที่โอกาสเกิดเหตุการณ์ที่ได้ คือ เหรียญออกหัวกับเหรียญออกก้อย เป็นต้น (Barrow, M., 2006: 78-79) นอกจากนั้นยังมีตัวอย่างประกอบ ดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ตัวอย่างการทดลอง

การทดลอง	ผลลัพธ์ของการทดลอง
การแข่งขันบาสเกตบอล	ชนะ, เสมอ, แพ้
การเลือกสีไฟจราจร	สีเขียว, สีเหลือง, สีแดง
การเลือกชั้นหอพักในมหาวิทยาลัย	ชั้นคี่, ชั้นคู่
การเลือกวันเดินทางไปท่องเที่ยว	จันทร์, อังคาร, พุธ, พฤหัสบดี, ศุกร์, เสาร์, อาทิตย์

ที่มา: ประยุกต์จาก Williams, Sweeney and Anderson, 2009: 157

โดยในการทดลองจะประกอบด้วยเหตุการณ์หลายเหตุการณ์ที่ส่งผลให้เกิดผลลัพธ์ (Outcome) ต่างๆ ที่สามารถสังเกตได้ที่เรียกเป็นชื่อเฉพาะที่สำคัญ ดังนี้

สเปซตัวอย่าง (Sample Space) เกิดจากการทดลองที่ทำให้เกิดผลลัพธ์ทั้งหมด โดยอยู่ในรูปของขอบเขตของเซตที่เรียกว่า “สเปซตัวอย่าง” ซึ่งในการทดลองที่เกิดผลในขอบเขตของเซตในแต่ละอย่างนั้นเรียกว่า “จุดตัวอย่าง” (Sample point) (กัลยา, 2557: 78-79) สัญลักษณ์ที่ใช้เป็นเครื่องหมาย S หรือ Ω

เหตุการณ์ (Event Space) เกิดจากการทดลองทำให้เกิดผลลัพธ์จุดตัวอย่าง 1 จุดหรือเกิดผลลัพธ์จุดตัวอย่างมากกว่า 1 จุด ในการเรียกเหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์นั้น ถ้าเป็นผลลัพธ์จุดตัวอย่าง 1 จุด เรียกว่า

“เหตุการณ์อย่างง่าย” (Simple Event) ขณะที่ถ้ามีผลลัพธ์ตัวอย่างมากกว่า 1 จุด เรียกว่า “เหตุการณ์ประสม” (Compound Event) (กัลยา, 2557: 79., Douglas A., Other Authors, 2005: 142)

ตัวอย่างที่ 4.1 ให้สุ่มเรียนนักศึกษาที่เรียนในมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ว่าเรียนอยู่ในชั้นปีการศึกษาที่เท่าไรซึ่งต้องการนักศึกษาที่เรียนตั้งแต่ระดับปีการศึกษาที่ 3 ขึ้นไปและผลการเรียนเฉลี่ยรวม (GPA) อยู่ในระดับมาตรฐานใดของเกณฑ์กลาง คือ 2.50 โดยนำมาเขียนการทดลอง, สเปซตัวอย่างและเหตุการณ์ดังกล่าว

วิธีทำจากตัวอย่างที่ 4.1 พบว่า มีความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อยู่ 2 เหตุการณ์ที่จะต้องนำมาเขียนดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 สรุปการทดลอง, สเปซตัวอย่างและเหตุการณ์

การทดลอง	สเปซตัวอย่าง	เหตุการณ์	ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์
1. สุ่มเรียนนักศึกษา	$S = \{1, 2, 3, 4\}$	X: ตั้งแต่ปีการศึกษาที่ 3 ขึ้นไป $X: \{3, 4\}$	$P(X) = 2/4 = 0.50$
2. ผลการเรียนเฉลี่ยรวม (GPA)	$S = \{\text{น้อยกว่า } 2.50, \text{เท่ากับ } 2.50, \text{มากกว่า } 2.50 \text{ ขึ้นไป}\}$	Y: ตั้งแต่ 2.50 ขึ้นไป $Y: \{\text{เท่ากับ } 2.50, \text{มากกว่า } 2.50 \text{ ขึ้นไป}\}$	$P(Y) = 2/3 = 0.67$

2. หลักการนับ (Principle of Counting)

การคำนวณความน่าจะเป็นจะมีความซับซ้อนมากขึ้น เมื่อมีสเปซตัวอย่างและเหตุการณ์ต่างๆ มาสัมพันธ์กันในการทดลองแต่ละครั้ง ดังนั้นขั้นตอนพื้นฐานที่สำคัญของการคำนวณมีความจำเป็นต่อความเข้าใจ ในที่นี้แบ่งเป็นประเด็นๆ ดังนี้

1. การคูณ (Multiplications Rule) หลักการคำนวณมีกฎเกณฑ์เบื้องต้นในการคำนวณ ดังนี้ (สรชัย, 2559: 33-34)

ข้อที่ 1 ถ้ามีขั้นตอนในการทำงานจำนวน 2 ขั้นตอน จะกำหนดให้ขั้นตอนที่ 1 มีค่าในการทำงาน n_1 ขั้นตอนที่ 2 มีค่าในการทำงาน n_2 ดังนั้นจะมีค่าในการทำงาน 2 ขั้นตอนเท่ากับ $n_1 n_2$ วิธี

ข้อที่ 2 ถ้ามีขั้นตอนในการทำงานมากกว่า 2 ขั้นตอนขึ้นไป จะกำหนดให้ขั้นตอนที่ 1 มีค่าในการทำงาน n_1 ขั้นตอนที่ 2 มีค่าในการทำงาน n_2 ขั้นตอนที่ 3 มีค่าในการทำงาน n_3 ไปจนถึงขั้นตอนที่ศึกษาทั้งหมดเป็นค่า k เท่ากับ $n_1 n_2 \dots n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4.2 เกษตรกรต้องทำการเพาะกล้าต้นไม้มักการปลูกลงในกระถางทั้งหมด 7 กระถางและ มีกล้าต้นไม้อยู่ 9 ต้น เกษตรกรสามารถทำได้กี่วิธี

วิธีทำ เกษตรกรมีกระถาง 7 กระถาง ทำได้ทั้งสิ้น 7 วิธีกำหนดเป็น n_1

เกษตรกรมีกล้าต้นไม้ 9 ต้น ทำให้ทั้งสิ้น 9 วิธีกำหนดเป็น n_2

ดังนั้น เกษตรกรจะทำการเพาะกล้าต้นไม้มักการปลูกลงในกระถางสามารถทำได้ $= n_1 n_2 = 7 \times 9 = 63$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4.3 จากตัวอย่างที่ 4.2 เกษตรกรมีการเพาะต้นกล้าลงในกระถาง โดยมีกระถางทั้งหมด 7 กระถาง มีกล้าต้นไม้ 9 ต้น และต้องการใส่ปุ๋ยเคมีสูตรต่างกัน คือ ปุ๋ยฟอสฟอรัส ปุ๋ยโพแทสเซียม ปุ๋ยไนโตรเจน ทั้งสิ้น 3 สูตร นอกจากนั้นจะนำไปตั้งไว้ในพื้นที่ต่างกัน คือ พื้นที่ร่ม พื้นที่แสงอ่อนและพื้นที่กลางแจ้ง 3 สถานที่ เกษตรกรสามารถดำเนินการได้กี่วิธี

วิธีทำ เกษตรกรมีกระถาง 7 กระถาง ทำได้ทั้งสิ้น 7 วิธีกำหนดเป็น n_1

เกษตรกรมีกล้าต้นไม้ 9 ต้น ทำได้ทั้งสิ้น 9 วิธีกำหนดเป็น n_2

เกษตรกรต้องการใส่ปุ๋ย 3 สูตร ทำได้ทั้งสิ้น 3 วิธี กำหนดเป็น n_3

เกษตรกรต้องนำไปไว้ในพื้นที่ต่างๆ ทำได้ทั้งสิ้น 3 วิธี กำหนดเป็น n_4

ดังนั้น เกษตรกรสามารถดำเนินการได้ $= n_1 n_2 n_3 n_4 = 7 \times 9 \times 3 \times 3 = 567$ วิธี

2. การจัดลำดับ (permutation) เป็นการเรียงข้อมูลภายใต้ในเซตของเหตุการณ์นั้นที่พิจารณาที่สามารถนำมาเรียงลำดับก่อนและหลังได้ (Gorini, C. A., 2012: 49-51) อาทิเช่น ภายใต้เซตของเหตุการณ์ มีสิ่งของอยู่ 2 ชนิด คือ {ปากกา, ดินสอ} โดยภายใต้เซตของเหตุการณ์นี้ สามารถนำมาจัดลำดับข้อมูลได้ 2 วิธี คือ {ปากกา, ดินสอ} และ {ดินสอ, ปากกา} เป็นต้น หรือมีวิชาที่เรียนอยู่ 3 วิชา คือ {เศรษฐศาสตร์, การตลาด, บัญชี} สามารถนำมาจัดลำดับการเรียนได้ 6 วิธี ดังนี้ {เศรษฐศาสตร์, การตลาด, บัญชี}, {การตลาด, เศรษฐศาสตร์, บัญชี}, {การตลาด, บัญชี, เศรษฐศาสตร์}, {บัญชี, การตลาด, เศรษฐศาสตร์}, {บัญชี, เศรษฐศาสตร์, การตลาด} และ {เศรษฐศาสตร์, บัญชี, การตลาด} เป็นต้น

ในการจัดลำดับมีเกณฑ์ทำความเข้าใจเบื้องต้น อันเนื่องจากการมีการจัดลำดับที่มีข้อมูลที่ซับซ้อนและจำนวนมากขึ้น ดังนั้นจึงมีวิธีที่ทำให้เกิดความสะดวกขึ้น คือ การใช้ค่า “แฟกทอเรียล” (Factorial) มาใช้ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคือ ! (exclamation mark) อาทิเช่น ให้ n เป็นจำนวนเต็มของข้อมูลทางบวก จะได้สัญลักษณ์เป็น $n!$ เป็นต้น (สรชัย, 2559: 34)

ขณะที่การอ่านจะอ่านว่า n แฟกทอเรียล โดยความหมายของ $n!$ คือ จำนวนเต็มของข้อมูลทางบวกที่เกิดจากผลคูณทั้งหมดตั้งแต่ค่า 1 ถึงค่า n หรือเขียน $n! = n(-1)(-2).....2.1$, กรณีค่า n เป็น 0 คือ $0! = 1$ (Gorini, C. A., 2012: 49)

ตัวอย่างที่ 4.4 จงหาค่า $5!$, $2!3!$ และ $\frac{6!}{3!}$

วิธีทำ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$$\begin{aligned} 2!3! &= (2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) = 2 \times 6 = 12 \\ \frac{6!}{3!} &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 120 \end{aligned}$$

ในการจัดลำดับในสถานการณ์ต่างๆ ของการจัดเรียงสิ่งของต่างๆ ที่พิจารณานั้น สามารถนำมาจัดเรียงลำดับได้ตามความต้องการได้หลายแบบ โดยในที่นี้จะทำการพิจารณาการจัดเรียงลำดับทั้งสิ้น 4 แบบ ดังนี้ (สรชัย, 2559: 35-37., กัลยา, 2557: 82-85)

1. การจัดลำดับด้วยการจัดเรียงสลับทั้งหมดของ n สิ่งที่แตกต่างกันเป็นเส้นตรง

ให้จำนวน n เป็นสิ่งของที่แตกต่างกันนำมาจัดเรียงสลับทั้งหมด ได้ $n!$ เขียนเป็นสัญลักษณ์เป็น $P_{n,n} = n! = n(-1)(-2).....2.1$ เช่น $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40,320$

2. การจัดลำดับด้วยการจัดเรียงสลับทั้งหมดของ n สิ่งที่แตกต่างกันเป็นเส้นตรงแต่จัดเรียงทีละ r สิ่ง

ให้จำนวน n เป็นสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดนำมาเรียงสลับ แต่จัดเรียงทีละ r สิ่ง เมื่อ $r \leq n$ สามารถนำมาเขียนเป็นสัญลักษณ์เป็น ${}_nP_r = P_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี (Gorini, C. A., 2012: 50)

ตัวอย่างที่ 4.5 รถยนต์ในมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์มีจำนวน 10 คัน โดยมีสีที่แตกต่างกัน ในที่นี้มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์จะนำรถยนต์ไปปรับผู้บริหารจากมหาวิทยาลัยอื่นๆ มาร่วมการประชุมจำนวน 5 ท่าน จงหาวิธีการในการจัดเรียงสลับสีรถยนต์ได้กี่วิธี

วิธีทำ รถยนต์มีทั้งสิ้น 10 คัน แต่ต้องการนำไปใช้เพียง 5 คันเท่านั้น สามารถทำได้

$$\text{ดังนั้น } P_{(10,5)} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{(5)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 30,240 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 4.6 มีต้นไม้ยืนต้นจำนวน 5 ต้น คนละสายพันธุ์ต้องการจะนำมาจัดในสวนเป็นเส้นตรง จะมีกี่วิธีในการจัดเรียงต้นไม้ยืนต้น

วิธีทำ นำต้นไม้ยืนต้นจำนวน 5 ต้น มาจัดเรียงสลับกันทั้งหมด สามารถทำได้

$$\text{ดังนั้น } P_{(5,5)} = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{(0)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 120 \text{ วิธี}$$

3. การจัดลำดับด้วยการจัดเรียงของ n สิ่งที่มีบางส่วนที่มีลักษณะเหมือนกัน

จำนวนแรกเป็น n_1 สิ่ง, จำนวนที่สองเป็น n_2 สิ่ง...กระทั่งจำนวนสิ่งของที่เราพิจารณาเป็น n_r สิ่ง นำมาเขียนเป็นสัญลักษณ์เป็น $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!.....n_r!}$ วิธี (กัลยา, 2557: 83)

ตัวอย่างที่ 4.7 ทำการจัดเรียงเก้าอี้จำนวน 7 ตัว โดยเก้าอี้หนึ่งมีความแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิง ภายในเก้าอี้หนึ่งจะมีเก้าอี้ขนาดสูงจำนวน 5 ตัวและมีเก้าอี้ขนาดต่ำจำนวน 2 ตัว จงหาวิธีการจัดเรียงเก้าอี้ดังกล่าวสามารถทำได้กี่วิธี

วิธีทำ มีจำนวนเก้าอี้ทั้งสิ้นจำนวน 7 ตัว ซึ่งในจำนวนเก้าอี้นี้มีทั้งหมด 2 ชุด คือ ชุดเก้าอี้ขนาดใหญ่จำนวน 5 ตัวและชุดเก้าอี้ขนาดเล็กจำนวน 2 ตัว ดังนั้น จำนวนเก้าอี้ทั้งนี้ทั้งหมด 7 ตัว เป็น $n = 7$, ชุดเก้าอี้ขนาดใหญ่ 5 ตัว เป็น $n_1 = 5$, ชุดเก้าอี้ขนาดเล็ก 2 ตัว เป็น $n_2 = 2$

$$\text{ดังนั้น } \frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 21 \text{ วิธี}$$

4. การจัดลำดับด้วยการจัดเรียงของ n สิ่งที่มีลักษณะแตกต่างกันอยู่ในรูปวงกลม

ในการจัดเรียงด้วยการสลับไปมาของสิ่งของ n สิ่งที่มีความแตกต่างกันในรูปวงกลมนั้น สามารถพิจารณาได้ในลักษณะแบบทวนเข็มนาฬิกาและแบบตามเข็มนาฬิกาจะมีความแตกต่างกัน (กัลยา, 2557: 84) ดังนั้นเพื่อให้เกิดความไม่สับสนต้องยึดเกณฑ์อย่างหนึ่งอย่างใดเป็นหลักและตำแหน่งสิ่งที่เราพิจารณาหลังจากนั้นนำ $n-1$ นำมาสลับเรียงกัน คือ $(n-1)!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4.8 มีอาหารทั้งหมด 6 ชนิดที่แตกต่างกัน นำมาจัดสลับเรียงเป็นวงกลมจะได้กี่วิธี

วิธีทำ มีอาหาร 6 ชนิดให้เป็น n และนำมาเรียงสลับเป็นวงกลม $= (n-1)!$

$$= (6-1)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 4.9 นักศึกษาสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์ชั้นปีที่ 1 ที่มีระดับผลการศึกษาก่อนเข้า 3.5 ขึ้นไป โดยมีจำนวนนักศึกษาชาย 6 คน นักศึกษาหญิง 10 คน จงหาวิธีจัดเรียงโดยให้นักศึกษาชายยืนเป็นวงกลม และนักศึกษาชายยืนติดกัน 2 คนเท่านั้น

วิธีทำ ให้นักศึกษาชายยืนติดกัน 2 คน เปรียบเสมือนเป็นคนเดียวกัน ดังนั้น มีนักศึกษาชาย 6 คนที่สามารถยืนติดกันเป็น 3 คน ขณะที่นักศึกษาหญิง 10 คน ดังนั้น จะเรียงเป็นวงกลมได้ $3+10 = 13$ คน

นำมาจัดเรียงเป็นวงกลมจะได้ $(n-1)! = (13-1)!$ วิธี อย่างไรก็ตาม นักศึกษาชายยืนติดกันเป็น 3 คน ก็สามารถนำมาสลับเรียงได้อีก 3!

$$\text{ดังนั้น สามารถพิจารณาได้ว่า } (13-1)!3! = 12!3! = 2,874,009,600 \text{ วิธี}$$

3. การจัดหมู่ (combination) เป็นการจัดเรียงลำดับที่มีได้คำนึงถึงว่าสิ่งไหนมาก่อนหลังเป็นการจัดหมู่หรือเป็นชุดข้อมูล โดยมีสัญลักษณ์เป็น $C_{n,r}$ ซึ่งค่า n และ r จะต้องไม่เกิน n หมายความว่า $1 \leq r \leq n$, ความหมายของค่า n หมายถึง จำนวนวิธีการจัดหมู่สิ่งที่แตกต่างกัน ขณะที่ค่า r หมายถึง กลุ่มหรือชุดข้อมูลที่มีจำนวน r สิ่ง (DeGroot, Morris H., and Mark J. Schervish, 2002: 28)

$$\text{การเขียนในสัญลักษณ์ในการจัดหมู่สามารถเขียนได้ } C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ เมื่อ } 1 \leq r \leq n$$

ตัวอย่างที่ 4.10 คณะวิทยาการจัดการ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์จะทำการขยายวิทยาเขตไปเปิดที่อำเภอประจำ ดังนั้นจึงต้องคัดเลือกพนักงานมหาวิทยาลัยไปเป็นอาจารย์ประจำ โดยมีพนักงานมหาวิทยาลัยทั้งหมดของคณะวิทยาการจัดการ จำนวน 50 คน ต้องเลือกพนักงานมหาวิทยาลัยจำนวน 35 คน คณะวิทยาการจัดการจะมีวิธีเลือกได้กี่วิธี

วิธีทำ พนักงานมหาวิทยาลัยทั้งหมด จำนวน 50 คน แทนด้วย n , พนักงานมหาวิทยาลัยที่ต้องการเลือกไปประจำที่อำเภอประจำ จำนวน 35 คน แทนด้วย r ดังนั้น

$$C_{50,35} = \binom{50}{35} = \frac{P_{50,35}}{35!} = \frac{50!}{35!(50-35)!} = \frac{50!}{35!15!} = 2.028 \times 10^{10} \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 4.11 ร้านขายปลาสดขงามมีปลากัด 7 ตัว ปลาน้ำผึ้ง 3 ตัว ปลาหางนกยูง 5 ตัว ปลาเทวดา 4 ตัวและปลาทอง 8 ตัว ใส่ในอ่างเลี้ยงปลาารวมกัน ถ้ามีลูกค้ามาดักซื้อปลาสดขงามด้วยตนเองจำนวน 3 ตัว จงหาจำนวนวิธีการได้ปลาสดขงาม

ก. ปลากัดทั้งหมด 3 ตัว

ข. ปลาหางนกยูง 2 ตัวกับปลาทอง 1 ตัว

ค. ปลาเทวดา 2 ตัวกับปลากัด 1 ตัว

ง. ปลาน้ำผึ้ง 1 ตัว, ปลากัด 1 ตัวและปลาทอง 1 ตัว

จ. ปลาน้ำผึ้ง 2 ตัว อีก 1 ตัวเป็นปลาอะไรก็ได้

วิธีทำ ก.ปลากัดทั้ง 3 ตัว โดยมีปลากัดทั้งหมด 7 ตัว $C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = 35$ วิธี

ข. ปลาหางนกยูง 2 ตัวกับปลาทอง 1 ตัว โดยมีปลาหางนกยูงทั้งหมด 5 ตัวและปลาทองทั้งหมด 8 ตัว ดังนั้น ปลาหางนกยูง $= C_{5,2}$ และปลาทอง $= C_{8,1}$

$$\text{จำนวนวิธี} = C_{5,2} \times C_{8,1} = \binom{5}{2} \binom{8}{1} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \times \frac{8!}{1!(8-1)!} = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{8!}{1!7!} = 10 \times 8 = 80 \text{ วิธี}$$

ค. ปลาเทวดา 2 ตัวกับปลากัด 1 ตัว โดยมีปลาเทวดาทั้งหมด 4 ตัวและปลากัดทั้งหมด 7 ตัว ดังนั้น ปลาเทวดา $= C_{4,2}$ และปลากัด $= C_{7,1}$

$$\text{จำนวนวิธี} = C_{4,2} \times C_{7,1} = \binom{4}{2} \binom{7}{1} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \times \frac{7!}{1!(7-1)!} = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{7!}{1!6!} = 6 \times 7 = 42 \text{ วิธี}$$

ง. ปลาน้ำผึ้ง 1 ตัว, ปลากัด 1 ตัวและปลาทอง 1 ตัว โดยมีปลาน้ำผึ้งทั้งหมด 3 ตัว ปลากัดทั้งหมด 7 ตัวและปลาทองทั้งหมด 8 ตัว ดังนั้น ปลาน้ำผึ้ง $= C_{3,1}$ ปลากัด $= C_{7,1}$ ปลาทอง $= C_{8,1}$

$$\begin{aligned} \text{จำนวนวิธี} &= C_{3,1} \times C_{7,1} \times C_{8,1} = \binom{3}{1} \binom{7}{1} \binom{8}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} \times \frac{7!}{1!(7-1)!} \times \frac{8!}{1!(8-1)!} \\ &= \frac{3!}{1!2!} \times \frac{7!}{1!6!} \times \frac{8!}{1!7!} = 3 \times 7 \times 8 = 168 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

จ. ปลาน้ำผึ้ง 2 ตัวและปลาอะไรก็ได้ อีก 1 ตัว โดยมีปลาน้ำผึ้งทั้งหมด 3 ตัวและปลาสดขงามอื่นๆ ที่มีปลาน้ำผึ้งทั้งหมด 24 ตัว ดังนั้น ปลาน้ำผึ้ง $= C_{3,2}$ ปลาสดขงามอื่นๆ $= C_{24,1}$

$$\text{จำนวนวิธี} = C_{3,2} \times C_{24,1} = \binom{3}{2} \binom{24}{1} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \times \frac{24!}{1!(24-1)!} = \frac{3!}{2!1!} \times \frac{24!}{1!23!} = 3 \times 24 = 72 \text{ วิธี}$$

3.การคำนวณความน่าจะเป็น (Probability calculation)

หลักการคำนวณความน่าจะเป็นที่มีความน่าเชื่อถือสามารถแบ่งเป็น 2 วิธี คือ 1. วิธีแบบดั้งเดิมหรือวิธีแบบคลาสสิก (Classical method) 2. วิธีแบบอิงฐานข้อมูลจากอดีต (Posteriori or Empirical method) โดยมีหลักเกณฑ์การคำนวณ ดังนี้ (Pagano, Robert R, 2013: 193-195)

1. วิธีแบบดั้งเดิมหรือวิธีแบบคลาสสิก (Classical method) เป็นการทดลองเพื่อทดสอบโอกาสความน่าจะเป็นด้วยคำนิยามที่ว่า

$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ } A = P(A) = \frac{\text{จำนวนเหตุการณ์ } A}{\text{จำนวนความน่าจะเป็นทั้งหมดของเหตุการณ์}}$$

ในที่นี้หมายถึง การทดลองของ $P(A)$ ที่บ่งบอกถึงความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ จากการทดลองที่ปรากฏจำนวนเหตุการณ์ A ต่อจำนวนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นทั้งหมด อาทิเช่น เลือกวันออกเดินทางไปท่องเที่ยวทั้งหมด 7 วัน ประกอบด้วย วันจันทร์ วันอังคาร วันพุธ วันพฤหัสบดี วันศุกร์ วันเสาร์ และวันอาทิตย์ โดยการสุ่มจากการทำเป็นฉลากแล้วหยิบขึ้นมา 1 ชิ้น ความเป็นไปได้ของเหตุการณ์ว่าจะได้ในแต่ละวันมีโอกาส $\frac{1}{7}$ ของเหตุการณ์ หรือประมาณ 0.143

ตัวอย่างที่ 4.12 สมมติว่ามีหนังสือทั้งหมด 5 เล่ม โดยมีหนังสืออย่างละ 1 เล่ม ประกอบด้วย หนังสือเศรษฐศาสตร์ หนังสือบัญชี หนังสือการเงินและการธนาคาร หนังสือการตลาดและหนังสือการท่องเที่ยว ให้โอกาสทั้งหมด 3 ครั้งที่จะหยิบหนังสือเศรษฐศาสตร์ได้อย่างน้อย 1 ครั้งว่าจะมีความน่าจะเป็นเท่าไร

วิธีทำ การหยิบหนังสือเศรษฐศาสตร์ 3 ครั้งจากจำนวนหนังสือทั้งหมด 5 เล่ม มีโอกาสได้ภายใต้เซตคือ {หยิบไม่ได้, หยิบไม่ได้, หยิบไม่ได้}, {หยิบได้, หยิบไม่ได้, หยิบไม่ได้}, {หยิบไม่ได้, หยิบได้, หยิบไม่ได้}, {หยิบไม่ได้, หยิบไม่ได้, หยิบได้}, {หยิบได้, หยิบได้, หยิบไม่ได้}, {หยิบได้, หยิบไม่ได้, หยิบได้}, {หยิบไม่ได้, หยิบได้, หยิบได้}, {หยิบได้, หยิบได้, หยิบได้}

ดังนั้น A : {หยิบได้, หยิบไม่ได้, หยิบไม่ได้}, {หยิบไม่ได้, หยิบได้, หยิบไม่ได้}, {หยิบไม่ได้, หยิบไม่ได้, หยิบได้}, {หยิบได้, หยิบได้, หยิบไม่ได้}, {หยิบได้, หยิบไม่ได้, หยิบได้}, {หยิบได้, หยิบได้, หยิบได้}

$$P(A) = \frac{\text{จำนวนเหตุการณ์ } A}{\text{จำนวนความน่าจะเป็นทั้งหมดของเหตุการณ์}} = \frac{7}{8} = 0.875$$

สรุปได้ว่า ความน่าจะเป็นในการหยิบหนังสือเศรษฐศาสตร์ 3 ครั้งขอเพียงอย่างน้อย 1 เล่มในการหยิบได้จะมีโอกาสถึง 0.875

2. วิธีแบบอิงฐานข้อมูลจากอดีต (Posteriori or Empirical method) เป็นการนำข้อมูลจากอดีตที่เกิดขึ้นจริงนำมาจัดเรียงลำดับให้เป็นหมวดหมู่ภายใต้ความน่าจะเป็นเพื่อนำมาวิเคราะห์โอกาสที่จะเป็นไปได้ (Pagano, Robert R, 2013: 194., กัลยา, 2557: 91)

$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ } A = P(A) = \frac{\text{จำนวนเหตุการณ์ } A \text{ เกิดขึ้นจากอดีตที่ผ่านมา}}{\text{จำนวนความน่าจะเป็นทั้งหมดของเหตุการณ์}}$$

ตัวอย่างที่ 4.13 สมมติสำรวจพฤติกรรมการเดินทางท่องเที่ยวของคนจังหวัดบุรีรัมย์ พ.ศ. 2560 โดยเก็บรวบรวมข้อมูลในเดือนมกราคม-กุมภาพันธ์ 2560 จากประชากรที่มีอายุ 15 ปีขึ้นไป เก็บจากกลุ่มตัวอย่างจำนวน 1,000 ราย พบว่า ในส่วนของพฤติกรรมแบบพักค้างคืนอย่างน้อย 1 คืน มีจำนวน 450 ราย ขณะที่ผู้ที่ไม่พักค้างคืนมีจำนวน 378 ราย และผู้ที่มีพฤติกรรมทั้ง 2 ลักษณะ คือ พักค้างคืนและไม่พักค้างคืนมีจำนวน 172 ราย ให้หาโอกาสพฤติกรรมการเดินทางท่องเที่ยวของคนจังหวัดบุรีรัมย์ ในปีหน้า คือ ปี พ.ศ. 2561 มีความน่าจะเป็นเป็นอย่างไรต่อพฤติกรรมการเดินทางท่องเที่ยว

วิธีทำ พฤติกรรมการเดินทางท่องเที่ยวของคนจังหวัดบุรีรัมย์ในการพักค้างคืน มี 3 ลักษณะ ดังนี้

1. พฤติกรรมแบบค้างคืนอย่างน้อย 1 คืน จำนวน 450 ราย จากกลุ่มตัวอย่าง 1,000 ราย มีโอกาสความน่าจะเป็น

$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ } A = P(A) = \frac{\text{จำนวนเหตุการณ์ } A \text{ เกิดขึ้นจากอดีตที่ผ่านมา}}{\text{จำนวนความน่าจะเป็นทั้งหมดของเหตุการณ์}} = \frac{450}{1,000} = 0.45$$

2. พฤติกรรมแบบไม่ค้างคืน จำนวน 378 ราย จากกลุ่มตัวอย่าง 1,000 ราย มีโอกาสความน่าจะเป็น

$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ } B = P(B) = \frac{\text{จำนวนเหตุการณ์ } B \text{ เกิดขึ้นจากอดีตที่ผ่านมา}}{\text{จำนวนความน่าจะเป็นทั้งหมดของเหตุการณ์}} = \frac{378}{1,000} = 0.38$$

3. พฤติกรรมทั้ง 2 แบบ คือ มีทั้งค้างคืนและไม่ค้างคืน จำนวน 172 ราย จากกลุ่มตัวอย่าง 1,000 ราย มีโอกาสความน่าจะเป็น

$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ } C = P(C) = \frac{\text{จำนวนเหตุการณ์ } C \text{ เกิดขึ้นจากอดีตที่ผ่านมา}}{\text{จำนวนความน่าจะเป็นทั้งหมดของเหตุการณ์}} = \frac{172}{1,000} = 0.17$$

สรุปได้ว่า โอกาสในปีหน้า คือ ปี พ.ศ. 2561 พฤติกรรมการเดินทางท่องเที่ยวของคนจังหวัดบุรีรัมย์ มีแนวโน้มในการพักค้างคืนที่ต้องมีการพักค้างแรม คิดเป็นร้อยละ 0.45 ขณะที่ไม่พักค้างแรม คิดเป็นร้อยละ 0.38 และพักค้างแรมและไม่พักค้างแรมทั้ง 2 แบบ คิดเป็นร้อยละ 0.17

นอกจาก 2 วิธีในการคำนวณความน่าจะเป็น กล่าวคือ วิธีที่ 1 แบบดั้งเดิมหรือวิธีแบบคลาสสิกและวิธีที่ 2 แบบอิงฐานข้อมูลจากอดีต ยังมีอีกวิธีที่มีได้ใช้ในการคำนวณความน่าจะเป็นแต่เป็นการใช้

ประสบการณ์และวิจารณ์งานในการทำงานเป็นเวลายาวนานจากอดีตนำมาวิเคราะห์โอกาสที่จะเป็นไปได้ ซึ่งเรียกวิธีนี้ว่า “Subjective Probability” (กัลยา, 2557: 92) อาทิเช่น เกษตรกรวิเคราะห์ถึงสถานการณ์ราคาข้าวในปีนี้มีแนวโน้มลดลงอันเกิดจากภัยแล้ง แต่จะมีโอกาสราคาเพิ่มขึ้นถ้ามีการเปลี่ยนพันธุ์ข้าวที่มีความคงทนต่อภัยแล้งในปีหน้า เป็นต้น

4. คุณสมบัติและกฎของความน่าจะเป็น (Characteristics and Rule of Probability)

การวิเคราะห์ความน่าจะเป็นมีคุณสมบัติเฉพาะที่ต้องทำความเข้าใจเบื้องต้น ดังนี้ (Bowerman., O’Connell., Murphree., Orris., 2012: 166., Devore, L. J., 2012: 56)

1. ความน่าจะเป็นจะอยู่ในรูปของเซต จะมีอยู่ 2 เหตุการณ์ คือ 1.การตัดกัน (Intersection) 2.การรวมกัน (Union) ภายใต้ข้อสมมติที่ว่า มีเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B

ถ้าเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ตัดกัน หมายถึง ผลลัพธ์ของเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เกิดใน A และ B ที่มีส่วนเหมือนกัน เรียกว่า A intersection B (สัญลักษณ์ ใช้ $A \cap B$) ซึ่งบ่งบอกถึงความน่าจะเป็นในเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B พร้อมกัน

ถ้าเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B รวมกัน หมายถึง ผลลัพธ์ของเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ที่เกิดขึ้นทั้งของเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เรียกว่า A union B (สัญลักษณ์ ใช้ $A \cup B$) ซึ่งบ่งบอกถึงความน่าจะเป็นในโอกาสเป็นไปได้ทั้งเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B

2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A, $P(A) \geq 0$ แต่อยู่ในเซตของ $P(S) = 1$ กล่าวคือ ค่าความน่าจะเป็นจะอยู่ตั้งแต่ 0 ถึง 1 โดยจะมีค่าความน่าจะเป็นที่ไม่มีโอกาสเกิดเหตุการณ์เลย คือ 0 ไปจนถึงความน่าจะเป็นที่มีโอกาสเกิดเหตุการณ์มากที่สุด คือ 1

3. ถ้ามีเหตุการณ์หลายเหตุการณ์เกิดขึ้นค่าผลรวมทั้งหมดจะต้องเท่ากับ 1 เสมอ กล่าวคือ ถ้ามี $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$ ผลรวมทั้งหมดของค่าเหตุการณ์จะได้ $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$, สามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้ $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$

4. $P(\emptyset) = 0$, โดยความหมายของ $\emptyset$ (empty set) หรือ เซตว่าง เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีผลลัพธ์ต่างๆ เกิดขึ้นในเหตุการณ์ กล่าวคือ ถ้ามี $A_1 = \emptyset, A_2 = \emptyset, A_3 = \emptyset, A_4 = \emptyset, \dots, A_n = \emptyset$ พิจารณาดังนี้

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_n) = P(\emptyset) = \sum_{i=1}^n P(\emptyset) = 0$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_n) = P(\emptyset) = \sum_{i=1}^n P(\emptyset) = 0$$

กฎของความน่าจะเป็น (Rule of Probability)

การศึกษาความน่าจะเป็นสิ่งที่ต้องเข้าใจเบื้องต้นก็คือ กฎพื้นฐานของความน่าจะเป็นที่มีความสัมพันธ์กับคุณสมบัติเฉพาะที่เกี่ยวข้องกัน ดังนั้น การทำความเข้าใจของกฎของความน่าจะเป็นเป็นสาระสำคัญในการพัฒนาสู่การวิเคราะห์ข้อมูลที่ซับซ้อนขึ้น โดยในที่นี้จะให้พิจารณากฎพื้นฐานที่สำคัญ ดังนี้ (กัลยา, 2557: 93-95)

กฎที่ 1 กฎการบวก (The Addition Rule)

กฎเกี่ยวกับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นร่วมกันหรือพร้อมกันไม่ได้ ซึ่งเกิดในเหตุการณ์ของเหตุการณ์ตนเอง กล่าวคือ เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ มีเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B จะเกิดกฎการบวกอาจเกิดขึ้นเฉพาะ เหตุการณ์ของตนเองด้วยไม่ได้เกิดร่วมกันแต่อย่างใด ลักษณะแบบนี้เรียกว่า “Mutually Exclusive Events” สามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ ดังนี้

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

โดย $P(A \cap B)$ บ่งบอกถึงเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ของ A กับ B ไม่ได้เกิดร่วมกันแต่อย่างใด ทำให้ค่าของ $P(A \cap B) = 0$ = 0 จึงไม่ปรากฏเหตุการณ์ A กับ B ว่ามีส่วนใดที่เหมือนกัน (Bowerman., O'Connell., Murphree., Orris., 2012: 166., Devore, L. J., 2012: 166)

ตัวอย่างที่ 4.14 มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์มีร้านอาหาร 50 ร้าน มีร้านอาหารตามสั่ง 13 ร้าน ร้านอาหารที่ขายก๋วยเตี๋ยว 20 ร้าน และมีร้านอาหารขายทั้งอาหารตามสั่งและขายก๋วยเตี๋ยว 10 ร้าน

ก. หาคความน่าจะเป็นที่เป็นร้านอาหารขายตามสั่งหรือร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวอย่างหนึ่งอย่างใด

ข. หาคความน่าจะเป็นที่เป็นร้านอาหารขายตามสั่งและร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวพร้อมกัน

ค. หาคความน่าจะเป็นที่ไม่ใช่ร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยว

วิธีทำ

ก. ร้านอาหารขายตามสั่งหรือร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวอย่างหนึ่งอย่างใดโดยให้ร้านอาหารขายตามสั่งเป็น A, ให้ร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวเป็น B ดังนั้น

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{13}{50} + \frac{20}{50} = \frac{33}{50} = 0.66$$

สรุปได้ว่า ร้านอาหารให้มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ขายอาหารตามสั่งหรือร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวอย่างหนึ่งอย่างใด มีความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.66

ข. ร้านอาหารขายตามสั่งและร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวพร้อมกัน โดยให้ร้านอาหารขายตามสั่งเป็น A, ให้ร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวเป็น B, ให้ร้านอาหารขายทั้งตามสั่งและก๋วยเตี๋ยวเป็น C ดังนั้น

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{50} + \frac{20}{50} - \frac{10}{50} = \frac{23}{50} = 0.46$$

สรุปได้ว่า ร้านอาหารให้มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ขายอาหารตามสั่งหรือร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวมมีความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.46

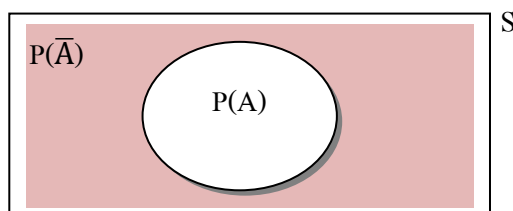
ค. ไม่ใช่ร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวโดยให้ร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวเป็น B, และให้ไม่ใช่ร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวเป็น $\bar{B}$ ดังนั้น

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{20}{50} = \frac{50}{50} - \frac{20}{50} = \frac{30}{50} = 0.60$$

สรุปได้ว่า ร้านอาหารที่ไม่ใช่ร้านอาหารขายก๋วยเตี๋ยวมมีความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.60

กฎที่ 2 การไม่เกิดเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใดที่พิจารณา (The Complement Rule)

เมื่อพิจารณาเหตุการณ์ A ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีโอกาสเกิดขึ้นของเหตุการณ์ A โดยสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, ความหมายของ $\bar{A}$ บ่งบอกถึง โอกาสที่จะไม่เกิดเหตุการณ์ A (กัลยา, 2557: 93)



รูปที่ 4.1 การไม่เกิดเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใดที่พิจารณา

จากรูปที่ 4.1 ภายใต้เซตของ S พบว่า การไม่เกิดเหตุการณ์ $P(A)$ กับ $P(\bar{A})$ รวมกันไม่ได้ ดังนั้น ทำให้ $P(S) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$ และเมื่อนำมาพิจารณาจะได้สัญลักษณ์ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

ตัวอย่างที่ 4.15 ประชากรในจังหวัดบุรีรัมย์บริโภคกาแฟ ร้อยละ 25 โดยที่ผู้บริโภคกาแฟจะไม่บริโภคชาแต่อย่างใด จงหาการไม่เกิดเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใดที่พิจารณา (The Complement Rule) ของการบริโภคชา

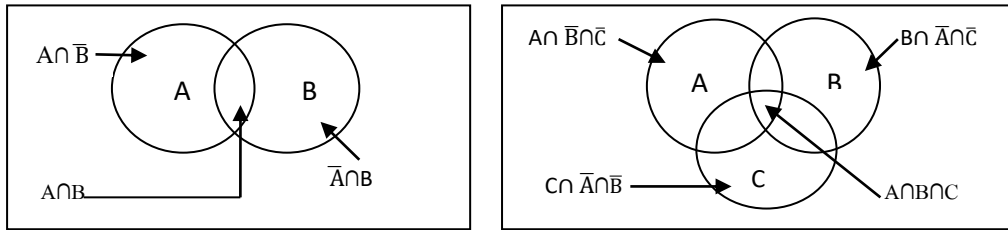
วิธีทำ กำหนดให้ การบริโภคกาแฟเป็น $P(A) = 0.25$, การบริโภคชาเป็น $P(\bar{A})$ หาค่า

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.25 = 0.75$$

สรุปได้ว่า ประชากรในจังหวัดบุรีรัมย์บริโภคกาแฟร้อยละ 25 ขณะที่ส่วนหนึ่งร้อยละ 75 บริโภคชา โดยเลือกบริโภคอย่างหนึ่งอย่างใดเท่านั้น

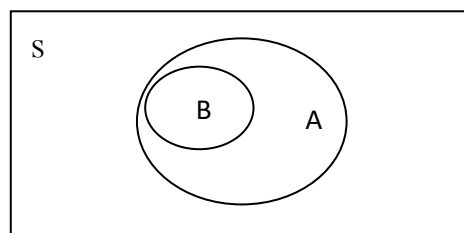
กฎที่ 3 เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B จะเกิดขึ้นทั้ง 2 เหตุการณ์พร้อมกันหรือเกิดแค่เพียงเหตุการณ์ A หรือเกิดแค่เหตุการณ์ B ภายใต้อะไรวัดกัน โดยมีสัญลักษณ์ได้ว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ถ้ามีเหตุการณ์ 3 เหตุการณ์ กล่าวคือ เหตุการณ์ A, เหตุการณ์ B, และเหตุการณ์ C จะเกิดขึ้นทั้ง 3 เหตุการณ์พร้อมกันก็ได้ หรือเกิดแค่เพียงเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใด คือ เกิดเพียงเหตุการณ์ A หรือเกิดเพียงเหตุการณ์ B หรือเกิดเพียงเหตุการณ์ C เท่านั้น โดยมีสัญลักษณ์ได้ว่า $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ (กัลยา, 2557: 94-95)



รูปที่ 4.2 กรณีมี 2 เหตุการณ์และมี 3 เหตุการณ์ (กัลยา, 2557: 94-95)

กฎที่ 4 เหตุการณ์ในสเปซเดียวกันของเหตุการณ์ A และ B โดยที่ เหตุการณ์ $B \subseteq A$ บ่งบอกว่า $P(B) \leq P(A)$ (กัลยา, 2557: 95)



รูปที่ 4.4 เหตุการณ์ $B \subseteq A, P(B) \leq P(A)$ (กัลยา, 2557: 95)

ตัวอย่างที่ 4.16 นักศึกษาชั้นปีที่ 1 สาขาวิชาเศรษฐศาสตร์ ที่เข้ามาศึกษาในมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ พบว่า มีฐานะรายได้ทางครอบครัวยากจนคิดเป็นร้อยละ 25 ขณะที่ร้อยละ 15 มีฐานะรายได้ทางครอบครัวดี และมีฐานะรายได้ทางครอบครัวยากจนและรายได้ทางครอบครัวที่ดีแต่ทำการกู้ยืมเงินเพื่อการศึกษา (กยศ.) ร้อยละ 10 อยากทราบว่านักศึกษาที่จะเข้ามาใหม่ในรอบหน้าจะมีนักศึกษามีฐานะรายได้ครอบครัวยากจนหรือมีฐานะรายได้ครอบครัวดีหรือมีฐานะรายได้ยากจนและกู้ยืมเงินเพื่อการศึกษา เป็นเท่าใด

วิธีทำ ให้ A คือ ฐานะรายได้ครอบครัวยากจน

ให้ B คือ ฐานะรายได้ครอบครัวดี

โจทย์ให้มา $P(A) = 0.25, P(B) = 0.15, P(A \cap B) = 0.10$, หา $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.15 - 0.10 = 0.30$$

นักศึกษาที่จะเข้ามาใหม่ที่ต้องการกู้ยืมเงินเพื่อการศึกษาที่จะมีโอกาสทั้งฐานะรายได้ครอบครัวยากจนหรือรายได้ครอบครัวดี คิดเป็นร้อยละ 30

5.เหตุการณ์อิสระต่อกัน (Independent Events)

การเกิดเหตุการณ์อิสระต่อกันเป็นการเกิดเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใดแล้วไม่เกิดผลต่อเหตุการณ์หนึ่งตามมา อาทิเช่น ผลการเกิดเหตุการณ์ A ไม่ส่งผลต่อการเกิดเหตุการณ์ B ถึงแม้จะมีการทดสอบหลายครั้งของเหตุการณ์ A ก็ตาม เหตุการณ์ B ก็ไม่มีความสัมพันธ์กับเหตุการณ์ A แต่อย่างใด (DeGroot, Morris H., and Mark J. Schervish, 2002: 56-62)

กรณีมีเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ คือ เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็นอิสระต่อกัน สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้ว่า $P(AB) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ และถ้าเหตุการณ์ $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ แล้วความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A|B) = P(A)$ หรือ $\frac{P(AB)}{P(A)} = P(B|A) = P(B)$ อาทิเช่น กรณีการโยนเหรียญ 1 เหรียญ โดยมีความต้องการให้เกิดออกหัว ในกรณีนี้ต่อให้เกิดการทดลองหลายๆ ครั้ง ความต้องการที่จะให้เกิดออกหัวมีโอกาสเท่าเดิมไม่มีการเปลี่ยนแปลงเพราะการโยนเหรียญที่จะออกหัวหรือออกก้อยมีอิสระกัน

ตัวอย่างที่ 4.17 สมมติให้จับฉลากหมายเลขระหว่าง 1 ถึง 10 จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิด

ก. ได้เลขคู่หรือได้เลขคู่ ข. ได้เลขที่มากกว่าหรือเท่ากับ 7 ขึ้นไป

วิธีทำ ก. ความน่าจะเป็นอิสระกันต่อการจับฉลากได้เลขคู่หรือได้เลขคู่

$$\text{กำหนดให้} \quad P(A) = \text{เลขคู่} = 1, 3, 5, 7, 9 = \frac{5}{10} = 0.50$$

$$P(B) = \text{เลขคู่} = 2, 4, 6, 8, 10 = \frac{5}{10} = 0.50$$

$$\text{ดังนั้น} \quad P(AB) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.50 \times 0.50 = 0.25$$

ข. จับฉลากที่ได้เลขมากกว่าหรือเท่ากับ 7 ขึ้นไป

$$\text{กำหนดให้} \quad P(A) = \text{เลขที่น้อยกว่า 7} = 1, 2, 3, 4, 5, 6 = \frac{6}{10} = 0.60$$

$$P(B) = \text{เลขที่มากกว่าหรือเท่ากับ 7} = 7, 8, 9 = \frac{3}{10} = 0.30$$

$$\text{ดังนั้น} \quad P(AB) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.60 \times 0.30 = 0.18$$

6.ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

การมีเงื่อนไขเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใดเกิดการเปลี่ยนแปลงทำให้เกิดผลต่ออีกเหตุการณ์หนึ่งอย่างมีนัยสำคัญ โดยสามารถพิจารณาได้ ดังนี้

A : ฝนตก

B : มดเกิดการอพยพรังมาอยู่ที่สูง

$P(A|B)$ = ความน่าจะเป็นเกิดเหตุการณ์ A เกิดขึ้นต่อเมื่อเหตุการณ์ B เกิดขึ้นเรียบร้อยแล้ว กล่าวได้ว่า เงื่อนไขของเหตุการณ์ B มีความสัมพันธ์กับเหตุการณ์ A

$P(A|B)$ = ความน่าจะเป็นเกิดเหตุการณ์ A เกิดขึ้น ภายใต้เงื่อนไขเมื่อเหตุการณ์ B ไม่ได้เกิดขึ้น

หรือ $P(A|B) > P(A|\bar{B})$

ในกรณีเหตุการณ์ทั้ง 2 ของ A และ B ไม่มีความสัมพันธ์กัน อาจกล่าวได้ว่า เหตุการณ์ของ A จะเกิดขึ้นไม่เกี่ยวข้องกับเงื่อนไขของเหตุการณ์ Bว่าจะเกิดเหตุการณ์หรือไม่ก็ตาม

$$P(A|B) = P(B) \text{ และ } P(B|A) = P(A)$$

ตัวอย่างที่ 4.18 ให้เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็นเหตุการณ์อิสระหรือเหตุการณ์ร่วมกัน โดยมีการพิจารณา ดังนี้

ก. $P(A \cup B) = 0.56, P(A) = 0.32, P(B) = 0.45$

ข. $P(A \cup B) = 0.85, P(A) = 0.56, P(B) = 0.23$

วิธีทำ ก. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ย้ายข้างได้ $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$P(AB) = 0.32 + 0.45 - 0.56 = 0.21$$

นัยบ่งบอกว่า เมื่อค่ามีมากกว่าศูนย์ ดังนั้นเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B มีโอกาสที่เหตุการณ์เกิดขึ้นร่วมกันได้ ส่วน $P(A|B) = P(AB) / P(B) = 0.21 / 0.45 = 0.467$ ซึ่งบ่งบอกได้ว่า เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็นอิสระต่อกันและสามารถเกิดขึ้นร่วมกันได้

ข. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ย้ายข้างได้ $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$P(AB) = 0.56 + 0.23 - 0.85 = -0.06$$

นัยบ่งบอกว่า เมื่อค่ามีค่าน้อยกว่าศูนย์ ดังนั้นเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ไม่ได้เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นร่วมกันได้ ส่วน $P(A|B) = P(AB) / P(B) = -0.06 / 0.23 = -0.261$ ซึ่งบ่งบอกได้ว่า เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ไม่เป็นอิสระต่อกันและไม่สามารถเกิดขึ้นร่วมกันได้

กฎการคูณ (Multiplication Rules)

กฎการคูณ ประกอบด้วย 2 ประเด็นหลัก ดังนี้

1. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใดในสเปซตัวอย่าง พบว่า

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

ขณะที่ถ้า A และ B อิสระต่อกัน พบว่า $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

2. ถ้า $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใดในสเปซตัวอย่าง พบว่า

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_{n-1} A_{n-2} \dots A_2 A_1)$$

แต่ถ้า $A_1, A_2, \dots, A_n$ ไม่เกี่ยวข้องกันจะพบว่า $P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$

ขณะการเป็นอิสระต่อกันของเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B จะพบว่า (กัลยา วานิชย์บัญชา, 2560: 102-104)

1. ถ้า A และ $\bar{B}$ เป็นเหตุการณ์อิสระต่อกัน

2. ถ้า $\bar{A}$ และ B เป็นเหตุการณ์อิสระต่อกัน

3. ถ้า $\bar{A}$ และ $\bar{B}$ เป็นเหตุการณ์อิสระต่อกัน

ถ้ามีเหตุการณ์มากกว่า 2 เหตุการณ์ขึ้นไป การเป็นอิสระต่อกันของเหตุการณ์ n

การมีเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นมากกว่า 2 เหตุการณ์นั้น สามารถนำมาจัดหมวดหมู่ของเหตุการณ์ ดังนี้ เช่น เมื่อมีเหตุการณ์เกิด 3 เหตุการณ์ กล่าวคือ เหตุการณ์ A, เหตุการณ์ B และเหตุการณ์ C โดยทั้ง 3 เหตุการณ์ เป็นอิสระต่อกันเมื่อ

1. $P(AB) = P(A).P(B)$
2. $P(BC) = P(B).P(C)$
3. $P(AC) = P(A).P(C)$
4. $P(ABC) = P(A).P(B).P(C)$

7. แผนผังต้นไม้ (Tree diagram)

การสร้างแผนผังต้นไม้เริ่มมีใช้เพื่อเป็นจุดประสงค์ในการวิเคราะห์ในการดำเนินกลยุทธ์ ต่อการวิเคราะห์วิศวกรรมคุณค่า (value engineering) ในชื่อของแผนผังระบบ เพื่อให้ประสิทธิภาพต่อการบรรลุเป้าหมาย (วิบูลย์ พงศ์พรทรัพย์, 2015: 16-18) ดังนั้น การใช้แผนผังต้นไม้เป็นแนวคิดที่ทำให้เกิดผลกระทบผลจากก่อนไปหลัง ทำให้นำมาใช้วิเคราะห์ในองค์กรต่างๆ ปัจจุบัน

ตัวอย่างที่ 4.19 นักศึกษาสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์ชั้นปีที่ 1 ถึงชั้นปีที่ 4 พบว่า ต้องมีการทำกิจกรรมจิตอาสาภายใต้ก่อนจะได้ทุนการศึกษาของมหาวิทยาลัย พบว่า 12 เปอร์เซ็นต์ต้องทำกิจกรรมจิตอาสา โดยจำนวนต้องทำจิตอาสาต้องให้ครบ 18 ชั่วโมงต่อเทอม พบว่า ภายใต้ 100 เปอร์เซ็นต์ เป็นนักศึกษาชาย 55 เปอร์เซ็นต์และอีก 20 เปอร์เซ็นต์เป็นนักศึกษาหญิง

ก. หาความน่าจะเป็นในการทำกิจกรรมจิตอาสาเป็นนักศึกษาชาย

ข. สมมติว่านักศึกษาชายทำกิจกรรมจิตอาสา มีความน่าจะเป็นที่ทำการกิจกรรมครบ 18 ชั่วโมง

วิธีทำ สมมติให้ A คือ นักศึกษาชายได้ทำการกิจกรรมจิตอาสาครบ 18 ชั่วโมง

B คือ นักศึกษาชาย

จากโจทย์กำหนดให้ $P(B|A) = P(\text{นักศึกษาชาย}|\text{ทำการกิจกรรมครบ}) = 0.55$

$P(\bar{B}|A) = P(\text{ไม่ใช่}|\text{นักศึกษาชาย}|\text{ทำการกิจกรรมครบ})$
 $= 1 - 0.55 = 0.45$

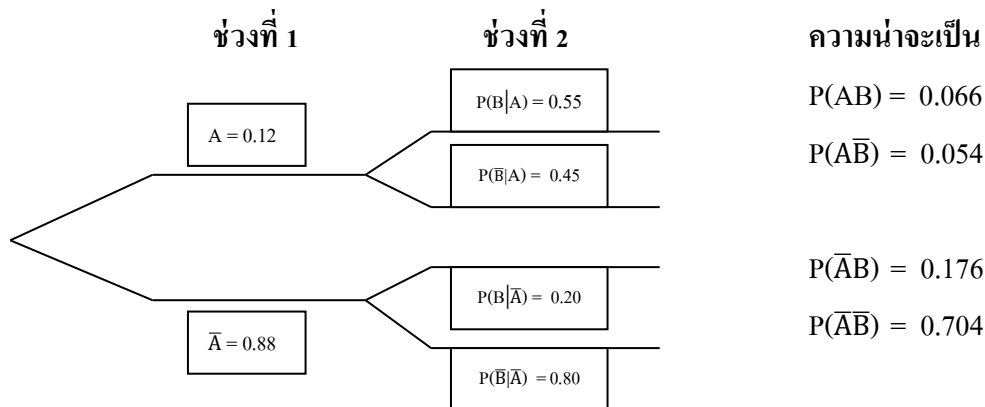
$P(B|\bar{A}) = P(\text{นักศึกษาชาย}|\text{ทำไม่กิจกรรมครบ}) = 0.20$

$P(\bar{B}|\bar{A}) = P(\text{ไม่ใช่}|\text{นักศึกษาชาย}|\text{ทำการกิจกรรมครบ})$
 $= 1 - 0.20 = 0.80$

โดย $P(AB) = P(A).P(B|A) = (0.12)(0.55) = 0.066$

$P(\bar{A}|\bar{B}) = P(\bar{A}) P(\bar{B}|\bar{A}) = (0.88)(0.45) = 0.396$

นำมาสร้างเป็นแผนผังต้นไม้



นำมาจัดเรียงได้ในตาราง

	ความน่าจะเป็น		
	B	$\bar{B}$	รวม
A	$P(AB) = 0.066$	$P(A\bar{B}) = 0.054$	$P(A) = 0.12$
$\bar{A}$	$P(\bar{A}B) = 0.176$	$P(\bar{A}\bar{B}) = 0.704$	$P(\bar{A}) = 0.88$
รวม	0.242	0.758	1.00

$$\text{ก. } P(B) = P(\text{นักศึกษาชาย}) = P(AB) + P(\bar{A}B) = 0.066 + 0.176 = 0.242$$

$$\begin{aligned} \text{ข. } P(A|B) &= P(\text{ทำกิจกรรมครบ} | \text{นักศึกษาชาย}) \\ &= P(AB) / P(B) = 0.066 / 0.242 = 0.273 \end{aligned}$$

8. กฎของเบย์ (Bayes' Theorem)

หลักการของกฎของเบย์เกิดจากการมีการนำมาใช้กับความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของ Thomas Bayes ที่มีการพัฒนาภายใต้แนวคิดที่ว่า ถ้าเกิดเอกภพสัมพัทธ์ที่เป็นเหตุการณ์ U ที่ไม่สามารถเกิดขึ้นได้ทั้งหมดพร้อมๆ กัน ของเหตุการณ์จำนวน c เหตุการณ์ กล่าวคือ $T_c, T_{c+1}, T_{c+2}, \dots, T_{c+t}$ ดังนั้น ถ้าเหตุการณ์ T_c ที่เกิดขึ้นในจำนวนเหตุการณ์ A เหตุการณ์ในเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใด ก็สามารถวิเคราะห์ได้ว่าความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขตามแนวคิดของเบย์ โดยที่ $P(A) \neq 0$ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ T_i เกิดขึ้น คือ (กัลยา วานิชย์บัญชา, 2557: 109-114)

$$\begin{aligned} P(T_c|A) &= \frac{P(A|T_c) P(T_c)}{\sum_{i=0}^n P(A|T_c) P(T_c)} \\ &= \frac{P(A|T_c) P(T_c)}{P(A)} \end{aligned}$$

$P(T_c|A)$ คือ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่เหตุการณ์ T_c เกิดขึ้น เมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว

$P(A|T_c)$ คือ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่เหตุการณ์ A เกิดขึ้น เมื่อเหตุการณ์ T_c เกิดขึ้นแล้ว

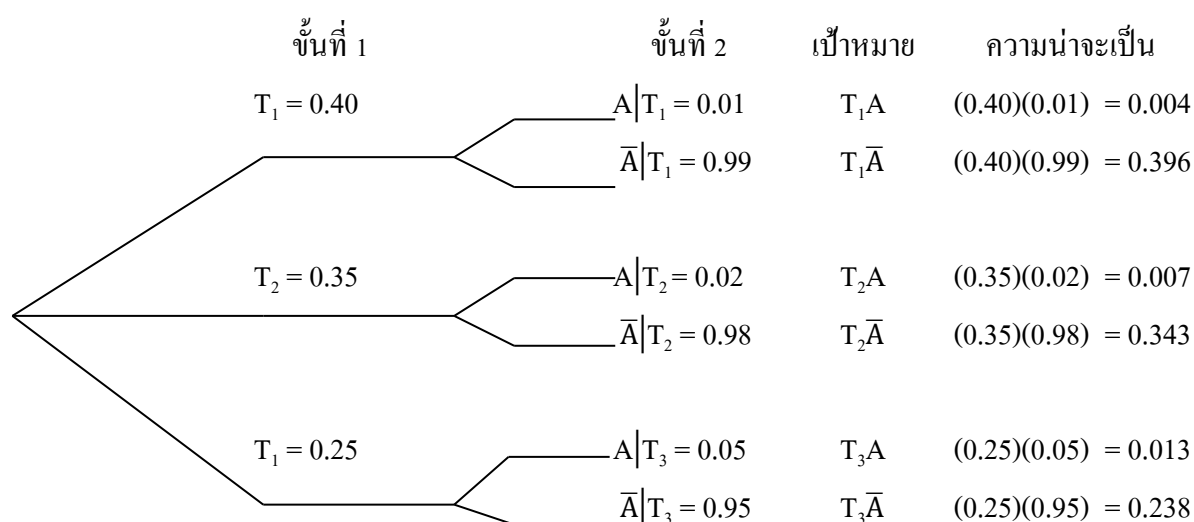
$P(A)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นเหตุการณ์ A

$P(T_c)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นเหตุการณ์ T_c

ตัวอย่างที่ 4.20 นักศึกษาสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ได้แบ่งกลุ่มออกเป็น 3 กลุ่มในการทำจิตอาสาพัฒนาชุมชน โดยกลุ่มที่ 1 (T_1) อาจารย์คาดหวังในการทำจิตอาสาพัฒนาชุมชนได้ 40 เปอร์เซ็นต์ กลุ่มที่ 2 (T_2) อาจารย์คาดหวังได้ 35 เปอร์เซ็นต์ และกลุ่มที่ 3 (T_3) อาจารย์คาดหวังได้ 25 เปอร์เซ็นต์ ผลปรากฏว่าการประเมิน โดยชาวบ้านเป็นไปดังที่คาดไว้ สมมติว่าถ้ามีการดึงตัวแทนจากการสุ่มมา 1 คน (A) กลับพบว่า นักศึกษาคนนั้นมีทัศนคติต่อการทำจิตอาสาพัฒนาชุมชนน้อยมาก ทำให้สามารถมาเขียนเป็นความน่าจะเป็น ดังนี้ $c; c = 1, 2, 3$ ($P(A|T_c)$) ตามแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์

แต่จากการสุ่มตัวแทนมา 1 คนไม่ทราบว่ามีมาจากกลุ่มที่เท่าไร ซึ่งฐานข้อมูลของอาจารย์ที่ผ่านมาพบว่า ก่อนหน้านี้เปอร์เซ็นต์ทัศนคติต่อการทำจิตอาสาน้อยมาก ในแต่ละกลุ่มมี ดังนี้ กลุ่มที่ 1 = 0.01, กลุ่มที่ 2 = 0.02 และกลุ่มที่ 3 = 0.05 ตามลำดับ ดังนั้น สามารถเขียนได้ว่า $P(A|T_1) = 0.01$, $P(A|T_2) = 0.02$ และ $P(A|T_3) = 0.05$ จงหาความน่าจะเป็นตัวแทนสุ่มมาที่มีทัศนคติไม่ดีต่อการทำจิตอาสาจากกลุ่มใด

วิธีทำ
$$P(T_c|A) = \frac{P(T_cA)}{P(A)}$$



ดังนั้น
$$\begin{aligned} P(A) &= P(T_1A) + P(T_2A) + P(T_3A) \\ &= P(T_1)P(A|T_1) + P(T_2)P(A|T_2) + P(T_3)P(A|T_3) \\ &= (0.40)(0.01) + (0.35)(0.02) + (0.25)(0.05) = 0.004 + 0.007 + 0.013 = 0.024 \end{aligned}$$

$$P(T_1|A) = 0.004/0.024 = 0.167$$

$$P(T_2|A) = 0.007/0.024 = 0.292$$

$$P(T_3|A) = 0.013/0.024 = 0.542$$

วิเคราะห์ จากคำนวณ พบว่า

กลุ่มที่ 1 จากเดิม $T_1 = 0.40$ และเมื่อปรับค่า $P(T_1|A) = P(\text{กลุ่มที่ 1} | \text{ทัศนคติไม่ดีต่อจิตอาสา}) = 0.167$

กลุ่มที่ 2 จากเดิม $T_2 = 0.35$ และเมื่อปรับค่า $P(T_2|A) = P(\text{กลุ่มที่ 2} | \text{ทัศนคติไม่ดีต่อจิตอาสา}) = 0.292$

กลุ่มที่ 3 จากเดิม $T_3 = 0.25$ และเมื่อปรับค่า $P(T_3|A) = P(\text{กลุ่มที่ 3} | \text{ทัศนคติไม่ดีต่อจิตอาสา}) = 0.542$

สรุปได้ว่า ความน่าจะเป็นจากการสุ่มตัวแทน 1 คนและมีทัศนคติไม่ดีต่อการจิตอาสาพัฒนาชุมชน คือ กลุ่มที่ 3 มีค่าเท่ากับ 54.20 เปอร์เซ็นต์

ตัวอย่างที่ 4.21 จากการสำรวจของนักศึกษามหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ พบว่ารายจ่ายในการศึกษาของนักศึกษามีอยู่ 2 กลุ่มในการชำระเงินค่าเทอม คือ กลุ่มที่ 1 กู้ยืมเงินจากกองทุนเงินให้กู้ยืมเพื่อการศึกษา (กยศ.) และกลุ่มที่ 2 ใช้เงินส่วนตัวหรือครอบครัว โดยคิดเป็นร้อยละ 55 เปอร์เซ็นต์ ส่วนใหญ่กู้ยืมเงินจากกองทุนเงินให้กู้ยืมเพื่อการศึกษา ถ้ามีการสุ่มของผู้กู้ยืมจากกองทุนเงินกู้ยืมเพื่อการศึกษาทราบว่าเป็นผู้กู้รายเก่าจากสถาบันเดิมถึงร้อยละ 45 เปอร์เซ็นต์ และอีกร้อยละ 35 เปอร์เซ็นต์เป็นรายใหม่ที่เพิ่งต้องการจะกู้ยืม สมมติว่า ถ้ามีการสุ่มนักศึกษามหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์มาหนึ่งคน ผลการพิจารณาพบว่า เป็นนักศึกษา กู้ยืมจากกองทุนเงินกู้ยืมเพื่อการศึกษา ดังนั้นเพื่อให้แน่ชัด จึงพิสูจน์ว่านักศึกษารายนี้เป็นนักศึกษา กู้ยืมจากกองทุนเงินกู้ยืมเพื่อการศึกษาแท้จริง

วิธีทำ กำหนดให้ $T_1 =$ กลุ่มที่ 1 กู้ยืมเงินจากกองทุนเงินให้กู้ยืมเพื่อการศึกษา (กยศ.)

$T_2 =$ กลุ่มที่ 2 ใช้เงินส่วนตัวหรือครอบครัว

โจทย์กำหนดให้ $P(T_1) = 0.55$ และ $P(T_2) = 1 - 0.55 = 0.45$

โดยให้ A แทนการสุ่มนักศึกษามหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์มาหนึ่งคน เป็นนักศึกษา กู้ยืมจากกองทุนเงินกู้ยืมเพื่อการศึกษา

ให้ $P(A|T_1) = 0.45$ และค่า $P(\bar{A}|T_1) = 1 - 0.45 = 0.55$

ให้ $P(A|T_2) = 0.35$ และค่า $P(\bar{A}|T_2) = 1 - 0.35 = 0.65$

ต้องการทราบว่า $P(\text{กู้ยืม กยศ.} | \text{พิสูจน์ว่ากู้ยืม กยศ.จริง}) = P(T_1|A)$

$$\begin{aligned} P(T_1|A) &= \frac{P(T_1 A)}{P(A)} = \frac{P(T_1) P(A|T_1)}{P(T_1) P(A|T_1) + P(T_2) P(A|T_2)} \\ &= \frac{(0.55)(0.45)}{(0.55)(0.45) + (0.45)(0.35)} = \frac{0.2475}{0.405} = 0.611 \end{aligned}$$

อีกวิธีด้วยการใช้แบบตาราง

(1) สถานการณ์	(2) ความน่าจะเป็น เริ่มแรก $P(T_i)$	(3) ความน่าจะเป็น แบบมีเงื่อนไข $P(A T_i)$	(4) $P(T_i A) = (2) \times (3)$	(5) ความน่าจะเป็นสุดท้าย $P(T_i A) = (4)/P(A)$
T_1	0.55	0.45	0.2475	$0.2475/0.405 = 0.611$
T_2	0.45	0.35	0.1575	$0.1575/0.405 = 0.389$
			$P(A) = 0.2475 + 0.1575$ $= 0.405$	

ดังนั้น ความน่าจะเป็นสุดท้าย $P(T_1|A) = 0.611$, ความน่าจะเป็นเริ่มแรก $P(T_1) = 0.55$

ความน่าจะเป็นสุดท้าย $P(T_2|A) = 0.389$, ความน่าจะเป็นเริ่มแรก $P(T_2) = 0.45$

สรุป

1. ความน่าจะเป็นเป็นวิธีการหนึ่งของการคำนวณหลายๆ วิธีที่ต้องการพยากรณ์หรือคาดการณ์สถานการณ์ของเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใดของช่วงเวลาหนึ่งเวลาใด ภายใต้เหตุผลที่มีโอกาสจะเป็นไปได้ สัญลักษณ์ของความน่าจะเป็นที่กำหนดได้ว่า $0 \leq P(A_i) \leq 1, i =$ เหตุการณ์ครั้งที่พิจารณา ซึ่งสามารถอาศัยการทดลองเพื่อกำหนดสเปซตัวอย่าง, เหตุการณ์ จนถึงความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

2. การคำนวณความน่าจะเป็นมีความซับซ้อน ดังนั้น การที่จะใช้วิธีการนี้จะต้องมีพื้นฐานในประเด็นที่สำคัญ คือ

1. การคูณ มีสูตรพื้นฐานที่ใช้ คือ $n_1 n_2 \dots n_k$ วิธี

2. การจัดลำดับ มีสูตรพื้นฐานที่ใช้ คือ $n! = n(-1)(-2) \dots 2.1$, กรณีค่า n เป็น 0 คือ $0! = 1$

2.1 การจัดลำดับด้วยการจัดเรียงสลับทั้งหมดของ n สิ่งที่แตกต่างกันเป็นเส้นตรง

$$P_{n,n} = n! = n(-1)(-2) \dots 2.1$$

2.2 การจัดลำดับด้วยการจัดเรียงสลับทั้งหมดของ n สิ่งที่แตกต่างกันเป็นเส้นตรง

$${}_n P_r = P_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี}$$

2.3 การจัดลำดับด้วยการจัดเรียงของ n สิ่งที่มีบางส่วนที่มีลักษณะเหมือนกัน

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_r!} \text{ วิธี}$$

2.4 การจัดลำดับด้วยการจัดเรียงของ n สิ่งที่มีลักษณะแตกต่างกันอยู่ในรูปร่างกลม

$$(n-1)! \text{ วิธี}$$

3. การจัดหมู่ มีสูตรพื้นฐานที่ใช้ คือ $C_{n,r}$ ซึ่งค่า n และ r จะต้องไม่เกิน $1 \leq r \leq n$

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ เมื่อ } 1 \leq r \leq n$$

3. การคำนวณความน่าจะเป็นแบ่งเป็น 2 วิธี คือ วิธีแบบดั้งเดิมหรือคลาสสิกและวิธีอิงฐานข้อมูลจากอดีต คือ

$$\text{วิธีแบบดั้งเดิม ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ } A = P(A) = \frac{\text{จำนวนเหตุการณ์ } A}{\text{จำนวนความน่าจะเป็นทั้งหมดของเหตุการณ์}}$$

$$\text{วิธีแบบอิงฐานข้อมูลจากของเหตุการณ์ } A = P(A) = \frac{\text{จำนวนเหตุการณ์ } A \text{ เกิดขึ้นจากอดีตที่ผ่านมา}}{\text{จำนวนความน่าจะเป็นทั้งหมดของเหตุการณ์}}$$

4. กฎความน่าจะเป็นที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญ 4 กฎ ดังนี้

กฎที่ 1 กฎการบวก เขียนเป็นสัญลักษณ์ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

กฎที่ 2 การไม่เกิดเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใดที่พิจารณา (The Complement Rule)

เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $\bar{A}$ บ่งบอกถึง โอกาสที่จะไม่เกิดเหตุการณ์ A

กฎที่ 3 เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B จะเกิดขึ้นทั้ง 2 เหตุการณ์พร้อมกันหรือเกิดแค่เพียงเหตุการณ์เดียว ภายใต้สเปซเดียวกัน มีสัญลักษณ์ได้ว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ หรือ 3 เหตุการณ์ สัญลักษณ์ได้ว่า $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

กฎที่ 4 เหตุการณ์ในสเปซเดียวกันของเหตุการณ์ A และ B โดยที่ เหตุการณ์ $B \subseteq A$ บ่งบอกว่า $P(B) \leq P(A)$

5. กฎของเบย์ใช้กับความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

$$\begin{aligned} P(T_c|A) &= \frac{P(A|T_c) P(T_c)}{\sum_{i=0}^n P(A|T_c) P(T_c)} \\ &= \frac{P(A|T_c) P(T_c)}{P(A)} \end{aligned}$$

$P(T_c|A)$ คือ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่เหตุการณ์ T_c เกิดขึ้น เมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว

$P(A|T_c)$ คือ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่เหตุการณ์ A เกิดขึ้น เมื่อเหตุการณ์ T_c เกิดขึ้นแล้ว

$P(A)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นเหตุการณ์ A

$P(T_c)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นเหตุการณ์ T_c

คำถามทบทวน

- ให้เขียนการทดลอง, สเปซตัวอย่างและเหตุการณ์ ด้วยข้อมูลต่อไปนี้
 - สุ่มการจับไฟหมายเลข 4 จากจำนวนไฟ 1 สำหรับ
 - สุ่มการเลือกอาศัยห้องพักในจำนวน 15 ห้องให้ได้เป็นเลขคี่
 - สุ่มนักศึกษาที่มีการทำงาน part-time มากกว่า 3 ชั่วโมงขึ้นไปต่อสัปดาห์
- สมมติว่ามีรถยนต์อยู่ 8 คัน และต้องการทำสีรถยนต์ใหม่ โดยมีสีให้เลือกที่ต้องการทำจำนวน 11 สี เมื่อทำสีรถยนต์เสร็จสิ้นแล้วจะให้มีการเติมน้ำมันที่แตกต่างกัน 4 สูตร คือ น้ำมันเบนซิน, น้ำมันอี 20, น้ำมันอี 95 และน้ำมันดีเซล และต้องการกำหนดการใช้รถยนต์แบ่งออกเป็น 3 ช่วงที่แตกต่างกัน คือ ช่วงเช้า ช่วงบ่าย และช่วงค่ำ
 - คำนวณเฉพาะรถยนต์กับการทำสีสามารถทำได้กี่วิธี
 - คำนวณเฉพาะการเติมน้ำมันกับการใช้รถยนต์ในแต่ละช่วงสามารถทำได้กี่วิธี
 - คำนวณทั้งหมดของเงื่อนไขว่าจะสามารถทำได้กี่วิธี
- จงคำนวณค่าต่อไปนี้

ก. $7!$	ข. $8!6!$	ค. $2!4!5!$	ง. $4!3!8!$	จ. $\frac{9!}{4!}$
---------	-----------	-------------	-------------	--------------------
- นักศึกษามีเส้นทางในการเดินทางมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ทั้งสิ้น 5 เส้นทาง โดยแต่ละเส้นทางมีความสะดวกในการเดินทางแตกต่างกัน และจะต้องเลือกเส้นทางที่คิดว่าง่ายและสะดวกที่สุดจำนวน 3 เส้นทาง จงหาวิธีการจัดเรียงสลับเส้นทางในการเดินทางมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ได้กี่วิธี
- มีเก้าอี้ทั้งหมด 11 ตัวที่แตกต่างกัน ให้นำมาสลับเป็นวงกลมจะได้กี่วิธี
- จากข้อที่ 5 มีเก้าอี้ทั้งหมด 11 ตัวที่แตกต่างกันที่แบ่งเป็นกลุ่มได้ 2 กลุ่ม คือ เก้าอี้แบบมีพนักพิง 6 ตัวและเก้าอี้แบบไม่มีพนักพิง 5 ตัว จงหาวิธีจัดเรียงโดยจัดเป็นวงกลมและให้เก้าอี้แบบมีพนักพิงติดกัน 2 ตัว
- นักศึกษาสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์ลงพื้นที่เก็บข้อมูลวิจัย พบว่า กลุ่มเป้าหมายประกอบด้วย ชาวนา 10 คน แม่บ้าน 16 คน ชาวบ้านทอผ้า 5 คน ชาวบ้านทำไร่ 8 คนและชาวบ้านรับจ้างทั่วไป 9 คน โดยทุกคนมานั่งรวมกันที่ศาลาประชาคมในหมู่บ้าน จงหาวิธีการเก็บข้อมูลวิจัย
 - ชาวนา 7 คน
 - แม่บ้าน 8 คนกับชาวบ้านทอผ้า 4 คน
 - ชาวบ้านทำไร่ 3 คนกับชาวบ้านรับจ้างทั่วไป 6 คน
 - ชาวนา 2 คน, แม่บ้าน 4 คน, ชาวบ้านทำไร่ 3 คนและชาวบ้านรับจ้างทั่วไป 4 คน
- การออกฝึกประสบการณ์วิชาชีพทางสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์มีให้เลือกทั้งสิ้น 6 สถานที่ ประกอบด้วย ธนาคารเพื่อการเกษตรและสหกรณ์การเกษตร, ธนาคารออมสิน, สหกรณ์จังหวัด, ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

ประเทศไทย, โรงแรมเบสเวสต์เทร้นและบริษัทเอไอเอส โดยให้นักศึกษาสุ่มการเลือกอย่างน้อย 4 ครั้งที่จะสามารถสุ่มเลือกได้ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยอย่างน้อย 1 ครั้งว่าจะมีความน่าจะเป็นเท่าไร

9. วิเคราะห์พฤติกรรมของนักศึกษามหาวิทยาลัยในการเพิ่มประสิทธิภาพทุนมนุษย์ด้วยการใช้เทคโนโลยีเคลื่อนที่ต่อการเรียนรู้ของนักศึกษามหาวิทยาลัยมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ พ.ศ. 2561 จำนวน 1215 คน พบว่า นักศึกษาจำนวน 875 คนใช้สมาร์ทโฟน (โทรศัพท์) ในการเรียนรู้ ขณะที่นักศึกษาจำนวน 215 คนใช้โน้ตบุ๊กในการเรียนรู้และนักศึกษาที่ใช้สมาร์ทโฟนและโน้ตบุ๊กในการเรียนรู้จำนวน 125 คน ให้วิเคราะห์ถึงพฤติกรรมของนักศึกษามหาวิทยาลัยในปี พ.ศ. 2562 มีความน่าจะเป็นต่อพฤติกรรมการเรียนรู้ผ่านอุปกรณ์ต่างๆ

10. บริเวณรอบข้างมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์มีอพาร์ทเมนต์ที่จดทะเบียนกับเทศบาลเมืองบุรีรัมย์ให้นักศึกษาพักทั้งสิ้น 154 แห่ง โดยเป็นอพาร์ทเมนต์ให้นักศึกษาพักเป็นรายเดือน 118 แห่ง, อพาร์ทเมนต์ให้นักศึกษาพักเป็นรายวัน 20 แห่งและเป็นอพาร์ทเมนต์ให้นักศึกษาพักเป็นรายเดือนและรายวัน 12 แห่ง

ก. หาความน่าจะเป็นอพาร์ทเมนต์ที่ให้นักศึกษาพักเป็นรายเดือนหรือรายวันอย่างหนึ่งอย่างใด

ข. หาความน่าจะเป็นอพาร์ทเมนต์ที่ให้นักศึกษาพักเป็นรายเดือนและรายวันพร้อมกัน

ค. หาความน่าจะเป็นที่ไม่ใช่อพาร์ทเมนต์ให้นักศึกษาพักเป็นรายวัน

11. การออกกำลังกายเพื่อสุขภาพของคนในเมืองบุรีรัมย์ โดยส่วนใหญ่ออกกำลังกายในพื้นที่สาธารณะคิดเป็นร้อยละ 75 โดยผู้ที่ออกกำลังกายในพื้นที่สาธารณะจะไม่เข้าร้านฟิตเนตของเอกชนทั้งสิ้น จงหาเหตุการณ์ดังกล่าวจะไม่เกิดเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใด (The Complement Rule) ของการเข้าร้านฟิตเนตของเอกชน

12. สมมติให้นักศึกษาเลือกปากกาที่มีสีทั้งสิ้น 3 สีประกอบด้วย สีแดงมีจำนวน 10 แท่ง, สีน้ำเงินมีจำนวน 15 แท่งและสีดำมีจำนวน 20 แท่ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิด

ก. เป็นปากกาสีแดงหรือปากกาสีน้ำเงินหรือปากกาสีดำ

ข. ได้ปากกาสีแดงมากกว่าหรือเท่ากับ 6 แท่งขึ้นไป

13. การสอบมิดเทอมของนักศึกษาสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์ชั้นปีที่ 4 ของมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ จากการสำรวจพบว่า นักศึกษาอ่านหนังสือสอบมิดเทอมก่อนที่จะสอบหนึ่งสัปดาห์คิดเป็น 10 เปอร์เซ็นต์พร้อมทั้งมีการจัดสรุปใจความสำคัญของการอ่านหนังสือ ซึ่งจากจำนวน 100 เปอร์เซ็นต์เป็นนักศึกษาหญิง 85 เปอร์เซ็นต์และอีก 15 เปอร์เซ็นต์เป็นนักศึกษาชาย

ก. หาความน่าจะเป็นของนักศึกษาชายอ่านหนังสือสอบ

ข. ความน่าจะเป็นของนักศึกษาชายอ่านหนังสือสอบและมีการจัดสรุปใจความสำคัญของการอ่าน

เอกสารอ้างอิง

- กัลยา วานิชย์บัญชา. (2557). **หลักสถิติ**. พิมพ์ครั้งที่ 14. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์สามลดา.
- สรชัย พิศาลบุตร. (2559). **หลักสถิติ**. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: บริษัทพิมพ์ดีการพิมพ์จำกัด.
- วิบูลย์ พงษ์พรทรัพย์. (2015). แผนผังต้นไม้และแผนผังเมทริกซ์: เครื่องมือในการค้นหามาตรการตอบโต้ [ข้อมูลอิเล็กทรอนิกส์]. **For Quality Tools**, 22(209), 16-18.
- Barrow, M. (2006). **Statistics for economics, accounting, and business studies**. 4th ed. England: Pearson Education Limited.
- Bowerman., O’Connell., Murphree., Orris. (2012). **Essential of Business Statistics**. 4th ed. New York: McGraw-Hill Education.
- DeGroot, Morris H., and Mark J. Schervish. (2002). **Probability and Statistics**. New York: Addison-Wesley.
- Devore, L. J. (2012). **Probability and Statistics for Engineering and the Sciences**. 8th ed., Boston: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Douglas A., William G., and Samuel A. (2005). **Statistical techniques in business & economics**. 12th ed., Boston: McGraw-Hill/Irwin.
- Gorini, C. A. (2012). **Master Math: Probability**. Boston, Mass: Course PTR.
- Pagano, Robert R. (2013). **Understanding Statistics in the Behavioral Sciences**. 10th ed. International ed., Belmont (CA): Wadsworth, Cengage Learning.
- Williams, Sweeney and Anderson. (2009). **Essentials of Contemporary Business Statistics With Microsoft and Office Excel**. 4th ed., Australia: South-Western/Cengage Learning.