บทที่ 7

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์และฟังก์ชันนับเป็นเนื้อหาที่สำคัญในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้พื้นฐานจากการเรียนเรื่อง เซต สมการ อสมการ และความสัมพันธ์ต่าง ๆ มีการนำความรู้เรื่องนี้ไปใช้อย่างกว้างขวาง ประยุกต์ใช้ในการทำงานหลากหลายสาขาวิชา ทั้งทางด้านพาณิชยศาสตร์ด้านวิศวกรรมด้านคอมพิวเตอร์ฯลฯ นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูงในเรื่องอื่น ๆ เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติฟังก์ชันเอ็กซ์โปแนนเชียล ฟังก์ชันลอกาลิทึม แคลคูลัส เป็นต้น จึงเป็นเรื่องปกติที่ความรู้เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันจะถูกนำมาเป็นเรื่องพื้นฐานในหลายวิชา และเป็นเนื้องเรื่องในหลักสูตรหลากหลายสาขาวิชา เมื่อเข้าใจเนื้อหาพื้นฐานในเรื่องนี้เป็นอย่างดีแล้ว จึงนำไปประยุกต์ให้ตรงกับสายวิชาชีพ เช่น การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลลัพธ์ที่ต้องการจำเป็นต้องใช้สมการที่อยู่ในรูปของฟังก์ชัน หรือวิศวกรที่ทำงานทางด้านคลื่นเสียง คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า พฤติกรรมของคลื่นชนิดต่าง ๆจะศึกษากราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นต้น สำหรับบทนี้จะแบ่งออกเป็น 7 เรื่อง คือ ความสัมพันธ์ ความสัมพันธ์ผกผัน ฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชัน ฟังก์ชันผกผัน ฟังก์ชันประกอบ พีชคณิตของฟังก์ชัน ดังนี้

ก่อนที่จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ และฟังก์ชันนั้น เราจะต้องศึกษาบทนิยามต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นข้อตกลงในการศึกษาเนื้อหาที่จะกล่าวถึงดังนี้ (ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล, 2553 : 84-88)

โดย อาจารย์ วิชญาพร จันทะนัน

บทนิยาม 7.1 สำหรับ a และ b ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ คู่อันดับ a,b เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ a,b เรียก a ว่า**ส่วนประกอบที่หนึ่ง**และเรียก b ว่า**ส่วนประกอบที่สอง**

ตัวอย่าง 7.1 คู่อันดับ $2,-3$

มี 2 เป็นส่วนประกอบที่หนึ่ง

และ -3 เป็นส่วนประกอบที่สอง

บทนิยาม 7.2 สำหรับจำนวนจริง a,b,c และ d ใด ๆ เรากล่าวว่าคู่อันดับ a,b และ c,d เท่ากันซึ่งแทนด้วย $a,b = c,d$ นิยามโดย $a,b = c,d$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$

และ $b=d$

ข้อสังเกต 7.1

สำหรับ $a,b \in R$ ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a,b \neq b,a$

ตัวอย่าง 7.2 คู่อันดับ $x+1,3 = 6,y-4$

จะได้ $x+1=6$ และ $y-4=3$

$x=5$ และ $y=7$

บทนิยาม 7.3 ถ้า A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง**ผลคูณคาร์ทีเซียน**ของ A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยคู่อันดับ x, y โดยที่ $x \in A$ และ $y \in B$ นั้นคือ

$A \times B = \quad x, y \ : x \in A$ และ $y \in B$

ตัวอย่าง 7.3 กำหนดให้ $A = \quad a, b$ และ $B = \quad 1, 2, 3$

จากบทนิยาม 1.22 จะได้

$$A \times B = \quad a,1 \ , \ a,2 \ , \ a,3 \ , \ b,1 \ , \ b,2 \ , \ b,3$$

$$B \times A = \quad 1,a \ , \ 1,b \ , \ 2,a \ , \ 2,b \ , \ 3,a \ , \ 3,b$$

สังเกตว่า $a,1 \ \in A \times B$ แต่ $a,1 \ \notin B \times A$

ข้อสังเกต 7.2

จากตัวอย่าง 4.3 จะได้ว่า $A \times B \neq B \times A$ ในกรณีทั่ว ๆ ไปถ้า $A \neq B$ แล้ว $A \times B \neq B \times A$

ทฤษฎีบท 7.1 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

$A \times B = \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $A = \varnothing$ หรือ $B = \varnothing$

ถ้า $A \times B = A \times C$ และ $A \neq \varnothing$ แล้ว $B = C$

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

7.1 ความสัมพันธ์

ประโยค ต่อไปนี้ “ $x = y$ ” “ น้อยเป็นพี่สาวของนาง” “ 3 มากกว่า 5.” เป็นตัวอย่างของความสัมพันธ์ ซึ่งจะเห็นว่าความสัมพันธ์นั้นเกี่ยวข้องกับของสองสิ่ง (ซึ่งอาจจะเหมือนกัน เท่ากัน หรือต่างกัน) สมการหรืออสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน x และ y ใด ๆ ก็เป็นตัวอย่างความสัมพันธ์เช่นเดียวกัน ดังบทนิยามต่อไปนี้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2546 : 122-125)

บทนิยาม 7.4 ถ้า r เป็นเซตย่อยของ $A \times B$ เราจะเรียก r ว่าเป็น**ความสัมพันธ์จาก** A **ไปยัง** B ถ้า $x, y \in r$ เรากล่าวว่า " x สัมพันธ์ r กับ y "

ตัวอย่าง 7.4 กำหนดให้ $A = 1,2,3$ และ $B = 1,2,3,4$

1. จงหาความสัมพันธ์ **น้อยกว่า** จาก A ไปยัง B

2. จงหาความสัมพันธ์ **เท่ากับ** จาก A ไปยัง B

ให้ r_1 เป็นความสัมพันธ์ **น้อยกว่า** จาก A ไปยัง B

ดังนั้น $r_1 = 1,2 \ , \ 1,3 \ , \ 1,4 \ , \ 2,3 \ , \ 2,4 \ , \ 3,4$

ให้ r_2 เป็นความสัมพันธ์ **เท่ากับ** จาก A ไปยัง B

ดังนั้น $r_2 = 1,1 \ , \ 2,2 \ , \ 3,3$

บทนิยาม 7.5 ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง A จะเรียก r เป็น**ความสัมพันธ์ใน** A

ตัวอย่าง 7.5 กำหนดให้ $A = \ 1,2,3,4$

และ $r = \ x,y \ : x,y \in A, x > y$

ดังนั้น $r = \ 2,1 \ , \ 3,1 \ , \ 3,2 \ , \ 4,1 \ , \ 4,2 \ , \ 4,3$ เป็นความสัมพันธ์ใน A

บทนิยาม 7.6 กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก จาก A ไปยัง B

โดเมนของความสัมพันธ์ r หมายถึงเซตของส่วนประกอบที่หนึ่งของคู่อันดับที่อยู่ใน r เขียนแทนด้วย D_r นั่นคือ $D_r = \ x : x \in A$ จะมี y บางตัวใน B ที่ทำให้ $x,y \ \in r$

เรนจ์ ของความสัมพันธ์ r หมายถึงเซตของส่วนประกอบทีสองของคู่อันดับทีอยู่ใน r เขียนแทนด้วย R_r นั่นคือ $R_r = \ y : y \in B$ จะมี x บางตัวใน A ที่ทำให้ $x,y \ \in r$ จะเห็นว่า $D_r \subseteq A$ และ $R_r \subseteq B$

ตัวอย่าง 7.6 กำหนดให้ N เป็นเซตของจำนวนนับ

และ $r = \ x,y \ : x,y \in N, x + 3y = 15$

ดังนั้น $r = \ 12,1 \ , \ 9,2 \ , \ 6,3 \ , \ 3,4$

จะได้ $D_r = \ 12,9,6,3$

และ $R_r = \ 1,2,3,4$

การหาโดเมนและเรนจ์จากตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น เป็นการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่มีจำนวนสมาชิกจำกัดจึงทำให้สามารถหาได้ง่าย แต่ในกรณีที่เป็นความสัมพันธ์ ซึ่งมีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด เราจะไม่สามารถใช้วิธีหาโดเมนและเรนจ์ด้วยวิธีการดังที่กล่าวได้สะดวก แต่เราจะใช้วิธีการดังต่อไปนี้

วิธีหาโดเมน เขียน y ในเทอมของ x แล้วพิจารณาค่า x เป็นจำนวนจริงอะไรได้บ้างจึงจะทำให้คำนวณค่า y ได้เป็นจำนวนจริง เซตของค่าของ x ทั้งหมดคือโดเมน

วิธีหาเรนจ์ เขียน x ในเทอมของ y แล้วพิจารณาค่า y เป็นจำนวนจริงอะไรได้บ้างจึงจะทำให้คำนวณค่า x ได้เป็นจำนวนจริง เซตของค่าของ y ทั้งหมดคือเรนจ์

ตัวอย่าง 7.7 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \left\{ x, y \ : x, y \in R, y = \dfrac{1}{x-3} \right\}$

วิธีทำ พิจารณาสมการ $y = \dfrac{1}{x-3}$

จะเห็นว่า ถ้า $x = 3$ แล้วจะทำให้ $y = \dfrac{1}{0}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น จำนวนจริง 3 จึงไม่อยู่ในโดเมนของ r ส่วนจำนวนจริงอื่น ๆ จะอยู่ในโดเมนของ r

$$D_r = \ x : x \in R, x \neq 3 \ = \ -\infty, 3 \ \cup \ 3, \infty$$

และจาก $y = \dfrac{1}{x-3}$

เขียน x ในเทอมของ y ได้ดังนี้

$$y \ x - 3 \ = 1$$

$$yx - 3y = 1$$

$$xy = 1 + 3y$$

$$x = \frac{1+3y}{y}$$

จะเห็นว่าถ้า $y = 0$ แล้วจะไม่สามารถหาค่าของ x ได้ ดังนั้น

$$R_r = \ y : y \in R, y \neq 0 \ = \ -\infty, 0 \ \cup \ 0, \infty$$

บทนิยาม 7.7 ถ้า $r \subset R \times R$ กราฟของความสัมพันธ์ r คือ เซตของจุดในระนาบซึ่งแต่ละจุดแทนสมาชิกของความสัมพันธ์

บทนิยาม 7.8 จุด A และ B บนกราฟของความสัมพันธ์ใน R จะสมมาตรเมื่อเทียบกับเส้นตรง L ก็ต่อเมื่อเส้นตรง L แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง AB

พิจารณาในกรณีที่กำหนดเงื่อนไขเป็นสมการของความสัมพันธ์

ถ้าแทน x ด้วย $-x$ ในสมการของความสัมพันธ์แล้วยังคงได้สมการเหมือนเดิม จะได้ว่ากราฟของความสัมพันธ์นั้นจะ**สมมาตรเมื่อเทียบกับแกน** Y ในกรณีเช่นนี้อาจเขียนกราฟของ r โดยเขียนเพียงข้างใดข้างหนึ่งของแกน Y ก่อนแล้วอาศัยการสะท้อนเมื่อมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อนได้อีกข้างหนึ่ง

ถ้าแทน y ด้วย $-y$ ในสมการของความสัมพันธ์แล้วยังคงได้สมการเหมือนเดิม จะได้ว่ากราฟของความสัมพันธ์นั้นจะ**สมมาตรเมื่อเทียบกับแกน** X ในกรณีเช่นนี้อาจเขียนกราฟของ r โดยเขียนกราฟเพียงข้างใดข้างหนึ่งของแกน X ก่อนแล้วอาศัยการสะท้อน โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อนได้อีกข้างหนึ่ง

บทนิยาม 7.9 ให้ A และ B เป็นจุดบนกราฟของความสัมพันธ์ใน R จุด A และ B สมมาตรกันเมื่อเทียบกับจุด

C ก็ต่อเมื่อ C เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A และ B

ถ้าแทน x ด้วย $-x$ และแทน y ด้วย $-y$ ในสมการของความสัมพันธ์แล้วยังคงได้สมมาตรเหมือนเดิม จะได้ว่ากราฟของความสัมพันธ์นั้น จะสมมาตรเมื่อเทียบกับจุด $(0,0)$

ในกรณีเช่นนี้เราจะเขียนกราฟของ r เมื่อ $x \geq 0$ สะท้อนกราฟโดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อนแล้วสะท้อนโดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน การสะท้อนสองครั้งจะได้กรณี $x \leq 0$

7.2 ความสัมพันธ์ผกผัน (Inverse relation)

กำหนดให้ $A = \ 1,2,3$ และ $B = \ 1,2,3,4$ และให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B โดยกำหนดความสัมพันธ์ r ดังนี้

$$r = \ x,y \ : x \in A, y \in B, x < y$$

ซึ่งจะได้ $r = \ 1,2 \ , \ 1,3 \ , \ 1,4 \ , \ 2,3 \ , \ 2,4 \ , \ 3,4$

และ $D_r = \ 1,2,3$ และ $R_r = \ 2,3,4$

ถ้าเราสลับที่กันระหว่างส่วนประกอบที่หนึ่งและส่วนประกอบที่สองของแต่ละคู่อันดับที่อยู่ใน r จะได้ความสัมพันธ์อันใหม่ สมมติให้เป็น s นั้นคือ

$s = \ 2,1 \ , \ 3,1 \ , \ 4,1 \ , \ 3,2 \ , \ 4,2 \ , \ 4,3$ ซึ่งจะได้ว่า s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ s ได้ดังนี้

$$s = \ y,x \ : x \in A, y \in B, x > y$$

หรือ $s = \ x,y \ : x \in B, y \in A, y < x$

จะพบว่า $D_s = \ 2,3,4$ และ $R_s = \ 1,2,3$

เรียกความสัมพันธ์ s ที่เกิดขึ้นนี้ว่า ความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ r

ถ้ากำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\}$ เราจะเรียก $s = \{(1,1),(4,2),(9,3),(16,4)\}$ ซึ่งสมาชิกของ s แต่ละตัวได้จากสมาชิกของ r โดยการสลับที่กันระหว่างสมาชิกตัวที่หนึ่งและสมาชิกตัวที่สอง เราเรียกความสัมพันธ์ s ว่าความสัมพันธ์ผกผันของ r

บทนิยาม 7.9 ความสัมพันธ์ผกผันของ r คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสมาชิกแต่ละตัวได้จากการสลับที่ของสมาชิกตัวที่หนึ่งและสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับทุกคู่อันดับ ซึ่งเป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1} เขียน r^{-1} ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้ $r^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in r\}$: http://blog.bru.ac.th

ตัวอย่าง 7.7 กำหนด $r = \quad x,y \ : x,y \in R$ และ $y = 5x - 2$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ จากบทนิยาม 1.26 จะได้ $r^{-1} = \quad y,x \ : x,y \in R$ และ $y = 5x - 2$

หรือ $r^{-1} = \quad x, y \ : x, y \in R$ และ $x = 5y - 2$

$= \quad x, y \ : x, y \in R$ และ $y = \dfrac{x+2}{5}$

ข้อสังเกต 7.3 จาก $r = \{(x, y) \mid y = 3x + 1\}$ การหา r^{-1} อาจทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 $r^{-1} = \{(y, x) \mid y = 3x + 1\}$

จงสังเกตว่า เงื่อนไขของสมาชิกยังคงเหมือนเดิมของ r

วิธีที่ 2 $r^{-1} = \{(x, y) \mid x = 3x + 1\}$

วิธีนี้เขียนสมาชิกของ r^{-1} ในรูป (x, y) เหมือนกับของ r แต่แทน x ด้วย y และ y ด้วย x ในเงื่อนไขของสมาชิก

จาก $r^{-1} = \{(x, y) \mid x = 3x + 1\}$

จะได้ $r^{-1} = \left\{(x, y) \mid y = \dfrac{x-1}{3}\right\}$

ดังนั้นจะสรุปได้ว่า $D_{r^{-1}} = R_r$ และ $R_{r^{-1}} = D_r$

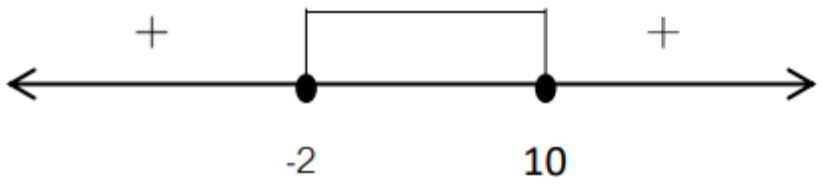
ตัวอย่างที่ 7.8 กำหนดให้ เป็นเซตคำตอบของอสมการ $x^2 \leq 8x + 20$

ถ้า $A = \{x \in S \mid x$ เป็นจำนวนเฉพาะบวก$\}$ และ $B = \{x \in S \mid x$ เป็นจำนวนเต็มคี่$\}$

แล้ว $(A \times B) - (B \times A)$ มีจำนวนสมาชิกเท่าใด : (Ent. คณิตศาสตร์ 1 1/2543)

วิธีทำ ให้ S เป็นเซตคำตอบของอสมการ

$$x^2 \leq 8x + 20$$
$$x^2 - 8x - 20 \leq 0$$
$$(x - 10)(x + 2) \leq 0$$



ดังนั้น $S = [-2, 10]$

ถ้า $A = \{x \in S \mid x$ เป็นจำนวนเฉพาะบวก$\}$

ดังนั้น $A = \{2, 3, 5, 7\}$

และ $B = \{x \in S \mid x$ เป็นจำนวนเต็มคี่$\}$

ดังนั้น $B = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

$$A \cap B = \{3, 5, 7\}$$

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 4 \times 6 = 24$$

$$\begin{aligned} n[(A \times B) \cap (B \times A)] &= n[(A \cap B) \times (A \cap B)] \\ &= n(A \cap B) \times n(A \cap B) = 3 \times 3 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n[(A \times B) - (B \times A)] &= n(A \times B) - n[(A \times B) \cap (B \times A)] \\ &= 24 - 9 \\ &= 15 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.9 ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ที่กำหนดโดย $r = \{(x,y) \in R \times R \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $x^2 + xy + y^2 = 75\}$ แล้วโดเมนของ r คือเท่าใด : (Ent. คณิตศาสตร์ ก./2537)

วิธีทำ ให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $x^2 + xy + y^2 = 75\}$

จาก $$x^2 + xy + y^2 = 75$$

$$y^2 + xy + (x^2 - 75) = 0$$

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4(x^2 - 75)}}{2}$$

$$= \frac{-x \pm \sqrt{300 - 3x^2}}{2}$$

$$300 - 3x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 100 \leq 0$$

$$(x - 100)(x + 100) \leq 0$$

$-10 \leq x \leq 10$ และ x เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $D_r = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

ตัวอย่างที่ 7.10 กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in B \times B \mid |x-y| \text{ หารด้วย } 3 \text{ ลงตัว } \}$ โดยที่ $B = \{2,3,4,5,6\}$ จำนวนสมาชิกของเซต r เป็นเท่าใด : (Ent. คณิศาสตร์ 2 1/2542)

วิธีทำ ให้ $r = \{(x,y) \in B \times B \mid |x-y| \text{ หารด้วย } 3 \text{ ลงตัว}\}$

และ $B = \{2,3,4,5,6\}$

คู่อันดับใน r แสดงได้ด้วยแผนกราฟ ดังนี้

ดังนั้น $r = \{(2,2),(2,5),(3,3),(3,6),(4,4),(5,2),(5,5),(6,3),(6,6)\}$

ตัวอย่างที่ 7.11 กำหนดให้ $P = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$

$$Q = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$$

และความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in P \times Q \mid 2x - y = 0\}$

วิธีทำ ให้ $P = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$

$$Q = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$$

ความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in P \times Q \mid 2x - y = 0\}$

จาก $2x - y = 0$

$$y = 2x$$

ดังนั้น

x	y
-1	-2
1	2
2	4
3	6
4	8

ใช้ไม่ได้เพราะ 8 ไม่ใช่สมาชิกในของ Q

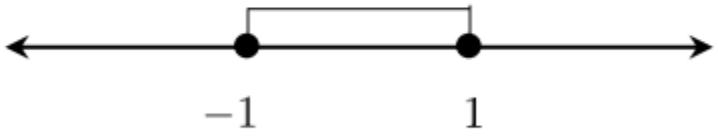
ดังนั้น $r = \{(-1, -2,), (1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$

$$D_r = \{-1, 1, 2, 3\}$$
$$R_r = \{-2, 2, 4, 6\}$$

ตัวอย่างที่ 7.12 กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง โดยที่ $r = \left\{(x,y) \mid y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}\right\}$

วิธีทำ ให้ $r = \left\{(x,y) \mid y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}\right\}$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0$$
$$1-x^2 \geq 0$$
$$x^2-1 \leq 0$$
$$(x-1)(x+1) \leq 0$$



ดังนั้น $D_r = \{-1,1\}$

$$0 \leq \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 1$$

ดังนั้น $R_r = [0,1] = D_{r^{-1}}$: รศ.ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่มและคณะ, (2537), คณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6, บริษัทภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด, (45-47).

7.3 ฟังก์ชัน

โดยทั่วไปเราสนใจความสัมพันธ์ที่มีลักษณะพิเศษชนิดหนึ่ง ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชัน เราอาจทำความเข้าใจอย่างง่าย ๆ ว่า จำนวน y เป็นฟังก์ชันของจำนวน x ถ้าสำหรับแต่ละ x มีวิธีการ เพื่อหาค่าของ y ได้เพียงหนึ่งค่าเท่านั้นที่สมนัยกับค่าของ x เช่นสมการ $y = x - 1$ เป็นฟังก์ชัน เพราะว่าแต่ละค่าของ x จะหา y ได้เพียงหนึ่งค่าเท่านั้น ดังบทนิยามต่อไปนี้ : (ปราณี เหรียญกิติวัฒน์ และลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา, 2530 : 21-23)

บทนิยาม 7.10 ฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ซึ่งสองคู่อันดับใด ๆ ที่มีส่วนประกอบที่หนึ่ง เหมือนกันแล้วส่วนประกอบที่สองต้องเหมือนกันด้วย นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นความสัมพันธ์ที่สำหรับคู่อันดับใด ๆ x_1, y_1 และ $x_2, y_2 \in f$ ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

ตัวอย่าง 7.12 กำหนด $A = \ 1,2,3$ และ $B = \ x,y,z$

และ $r_1 = \ 1,x \ , \ 2,y \ , \ 2,x \ , \ 3,y$

$r_2 = \ 1,z \ , \ 2,y \ , \ 3,x$

$r_3 = \ 1,y \ , \ 2,y \ , \ 3,y$

จะได้ว่า r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน ส่วน r_2 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 7.13 กำหนด $f = \ x,y \ : x,y \in R$ และ $y = x^2 + 1$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพราะ f เป็นความสัมพันธ์ที่สำหรับแต่ละ $x_1,y_1 \ , \ x_2,y_2 \ \in f$ จะได้

ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

เราสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

ให้ $x_1 = x_2$

จะได้ $x_1^{\ 2} = x_2^{\ 2}$

ดังนั้น $x_1^{\ 2} + 1 = x_2^{\ 2} + 1$

จาก $x_1,y_1 \ , \ x_2,y_2 \ \in f$ จะได้ว่า

$$y_1 = y_2$$

นั่นคือคู่อันดับ x_1, y_1 และ x_2, y_2 ใดๆ ที่เป็นสมาชิกของ f ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

ตัวอย่าง 7.14 $g = \quad x, y \ : x, y \in R$ และ $y^2 = x + 3$

ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ $1, 2 \ \in g$ และ $1, -2 \ \in g$ เนื่องจาก $1 = 1$ แต่ $2 \neq -2$

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้น โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันคือโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์นั่นเองและวิธีการหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเช่นเดียวกับการหาโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์ถ้า f เป็นฟังก์ชันจะเขียน D_f และ R_f แทนโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f ตามลำดับ

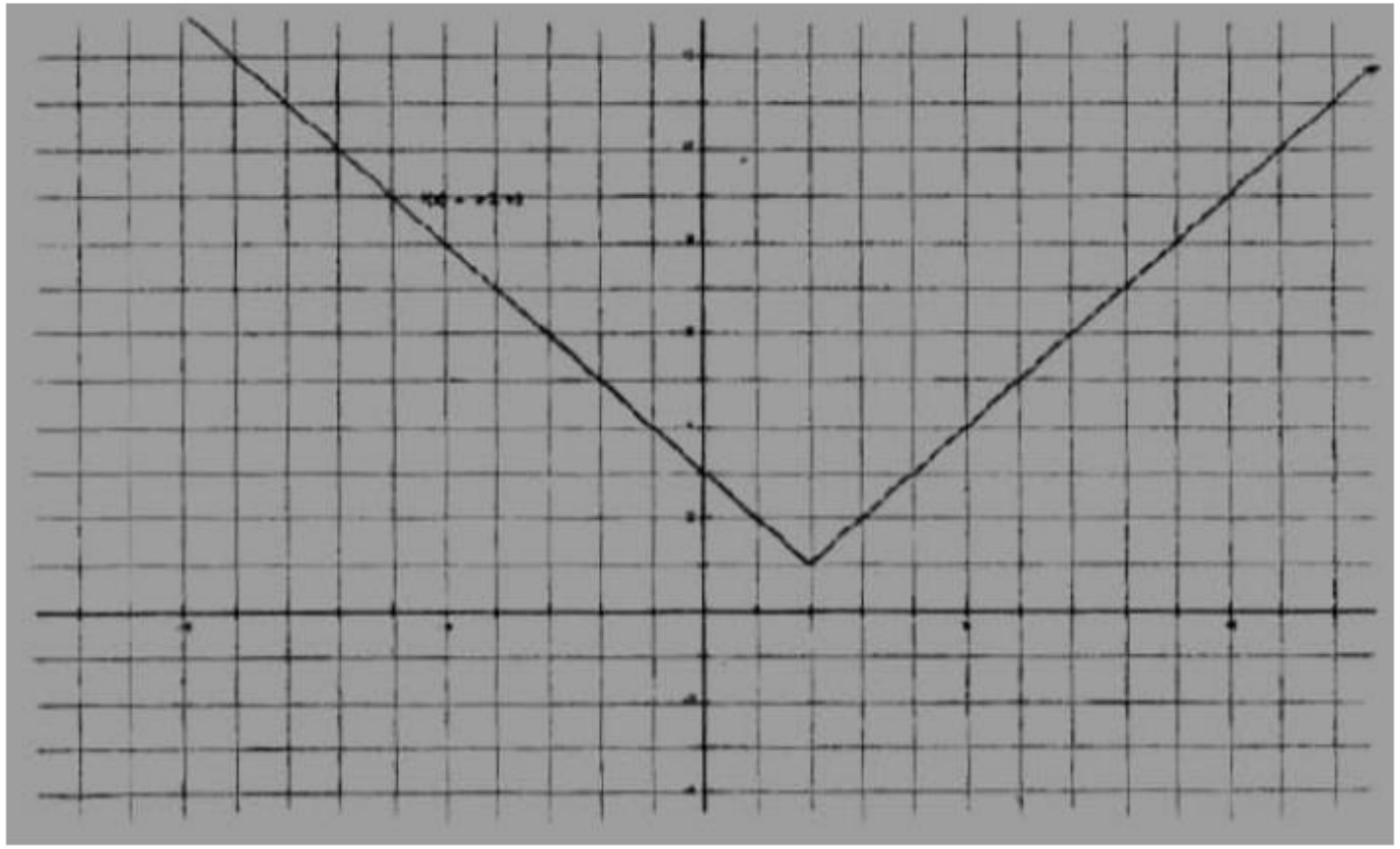
ยกตัวอย่างเช่น

$\{(2,5),(4,10),(6,10),(6,12)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากมีสองคู่อันดับคือ $(6,10)$ และ $(6,12)$ เป็นสองคู่อันดับซึ่งสมาชิกตัวที่หนึ่งเหมือนกันแต่ สมาชิกตัวที่สองแตกต่างกัน $\{(2,5),(4,10),(6,10),(8,10)\}$ เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากไม่มีสองคู่อันดับใด ๆ ที่สมาชิกตัวที่หนึ่งเหมือนกันแต่สมาชิกตัวที่สองแตกต่างกัน

ตัวอย่างที่ 7.15 ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ด้วยสสมการ $y = |x-2|+1$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจากเมื่อแทนค่าตัวแปรอิสระ (ค่า x) ด้วยจำนวนจริงแต่ละจำนวนในโดเมน จะได้ค่าจำนวนจริง (ค่า y) ในเรนจ์เพียงหนึ่งค่าเท่านั้น

ดังนั้นความสัมพันธ์ที่กำหนดด้วยสมการ $y = |x-2|+1$ เป็นฟังก์ชัน เขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี



7.3.1 สัญกรณ์ของฟังก์ชัน

ในการเขียนฟังก์ชัน มักใช้อักษร f, g หรือ h แทนฟังก์ชัน และเราอาจเขียนแทนฟังก์ชันดังตัวอย่าง

$$f : y = 2x - 5 \qquad f = \{(x, y) \mid y = 2x - 5\}$$
$$g : y = x^2 + 2x - 3 \qquad g = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2x - 3\}$$

ในกรณีที่ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน เราสามารถเขียน $y = f(x)$ แทน $(x, y) \in f$ ได้โดยที่ อ่านว่า f ของ x หรือ ค่า f ที่ x

เราอาจเขียนฟังก์ชันโดยแสดงในรูปค่าของฟังก์ชันได้ เช่น ฟังก์ชัน $f : y = 3x - 1$ เขียนแทนได้เป็น

$f(x) = 3x - 1$

ถ้าเราเขียน $f(x)$ เราจะหมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f เมื่อ $x = 2$ ซึ่ง $f(2)$ เป็นสมาชิกในเรนจ์ของฟังก์ชัน f ในการหาค่า $f(2)$ ทำได้ดังนี้

เนื่องจาก $f(x) = 3x - 1$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(2) &= 3(2) - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.16 ให้ $f(x) = |x| - 3$, $g(x) = 5 - x^2$, $h(x) = -x + 3$ และ $s(x) = 4$ จงหา $f(-3)$, $g(-3)$, $h(-3)$ และ $s(-3)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = |x| - 3$

ดังนั้น $f(-3) = |-3| - 3$

$$\begin{aligned} &= 3 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $g(x) = 5 - x^2$

ดังนั้น $g(-3) = 5 - (-3)^2$

$$= 5 - 9$$
$$= -4$$

เนื่องจาก $h(x) = -x + 3$

ดังนั้น $h(-3) = -(-3) + 3$

$$= 3 + 3$$
$$= 6$$

เนื่องจาก $s(x) = 4$

ดังนั้น $s(-3) = 4$

ข้อสังเกต 7.3 s เป็นฟังก์ชันคงตัวที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงและเรนจ์ คือ $\{4\}$

ตัวอย่างที่ 7.17 จงหาโดเมนของฟังก์ชัน g เมื่อกำหนด $g(x) = \dfrac{9x}{x^2 - 4}$

วิธีทำ เนื่องจากโดเมนคือเซตของจำนวนจริง x ที่ทำให้ $\dfrac{9x}{x^2 - 4}$ เป็นจริง

นั่นคือ $x^2 - 4 \neq 0$

ถ้า $x^2 - 4 = 0$

จะได้ $(x-2)(x+2) = 0$

$x = 2$ หรือ $x = -2$

ดังนั้น คำตอบของอสมการ $x^2 - 4 \neq 0$ คือ จำนวนจริงทุกจำนวนยกเว้น 2 และ -2

นั่นคือ โดเมนของฟังก์ชัน g คือ $\{x \in R \mid x \neq 2$ และ $x \neq -2\}$

ตัวอย่างที่ 7.18 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีเส้นรอบรูปยาว 240 เซนติเมตร ถ้าด้านกว้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากยาว x เซนติเมตร และรูปสี่เหลี่ยมมีพื้นที่ $A(x)$ ตารางเซนติเมตร จงหาความยาวของด้านยาว ในรูปที่มี x ปรากฏอยู่ หาฟังก์ชัน $A(x)$ และหาโดเมนของฟังก์ชัน

วิธีทำ ให้ด้านยาวเป็น a เซนติเมตร

ดังนั้น $2(a+x)=240$

$$a+x=120$$
$$a=120-x$$

ดังนั้นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากคือ $A(x)=x(120-x)$

เนื่องจากความยาวของด้านกว้างและความยาวของด้านยาวต้องมีค่ามากกว่าศูนย์

ดังนั้น $x>0$ และ $120-x>0$

นั่นคือ $0<x$ และ $x<120$

โดเมนของฟังก์ชัน คือ ช่วงเปิด $(0,120)$

7.3.2 การตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่ด้วยกราฟ

จากบทนิยามของฟังก์ชัน จึงสามารถตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่ด้วยกราฟ โดยตรวจสอบว่ามีกราฟเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ที่ตัดกราฟของความสัมพันธ์มากกว่าหนึ่งจุดหรือไม่ ถ้ามีแสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้าไม่มีแสดงว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

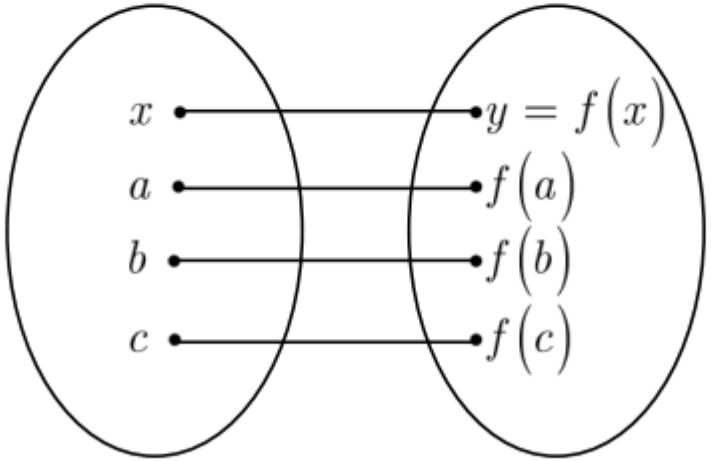
ถ้าไม่มีเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ตัดกราฟของความสัมพันธ์มากกว่าหนึ่งจุดแล้วความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

ถ้ามีกราฟเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ตัดกราฟของความสัมพันธ์มากกว่าหนึ่งจุดแล้วความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

7.4 ชนิดของฟังก์ชัน

บทนิยาม 7.11 ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ที่เป็นฟังก์ชันและ $D_f = A$ เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$

ถ้า $x, y \in f$ เรียก y ว่าภาพของ x ภายใต้ f หรือ y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วย $y = f\ x$ ดังภาพ



ภาพประกอบ 7.1 แสดงภาพฟังก์ชัน $y = f\ x$: ดวงใจ ลิ้มอำไพ. 2544 : 121

จากบทนิยามเซต A และเซต B อาจเป็นเซตเดียวกัน นั่นคือ $A = B$ และในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีที่เซต A และเซต B เป็นเซตย่อยของ R(เซตของจำนวนจริง)

บทนิยาม 7.12 ถ้า f เป็นฟังก์ชันจากเซตย่อยของ R ไปยัง R จะเรียกว่า f เป็นฟังก์ชันค่าจริง

และถ้า $f = \quad x,y \ : x,y \in R$ และ $y = f \ x$ นิยมเขียนโดยย่อว่า $y = f \ x$

ตัวอย่าง 7.20 กำหนดให้ $f \ x \ = 3x - 4$ และ $g \ x \ = 5x + 3$ ดังนั้น

1. $f \ 1 \ = 3 \ 1 \ - 4 = -1$
2. $f \ -3 \ = 3 \ -3 \ + 4 = -5$
3. $f \ t \ = 3 \ t \ + 4 = 3t + 4$
4. $g \ -2 \ = 5 \ -2 \ + 3 = -7$
5. $g \ 3 \ = 5 \ 3 \ + 3 = 18$
6. $g \ f \ 2 \ = 5 \ f \ 2 \ + 3 = 5 \ 3 \ 2 \ - 4 \ + 3 = 5 \ 2 \ + 3 = 13$

บทนิยาม 7.13 ให้ $f : A \to B$ และถ้า $R_f = B$ จะเรียก f เป็นฟังก์ชันจาก A **ไปทั่วถึง** B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{onto} B$

บทนิยาม 7.14 ให้ $f : A \to B$ จะเรียก f เป็นฟังก์ชัน**หนึ่งต่อหนึ่ง**ก็ต่อเมื่อถ้า $f\ x_1 = f\ x_2$ แล้ว $x_1 = x_2$ เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

บทนิยาม 7.15 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชัน **สมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง** และเรียกเซต A กับเซต B ว่ามีการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$

7.5 ฟังก์ชันผกผัน

ในหัวข้อที่ผ่านมานั้น เมื่อให้ความสัมพันธ์ใด ๆ มา เราจะสามารถหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์นั้นได้เสมอ และเนื่องจากว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว f จะต้องเป็นความสัมพันธ์ด้วย ดังนั้น จึงสามารถหาความสัมพันธ์ผกผันของ f ได้เสมอเช่นกัน ซึ่งความสัมพันธ์ผกผันของฟังก์ชัน f อาจจะเป็นหรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้ : (รณชัย มาเจริญทรัพย์, 2547 : 45-46)

ตัวอย่าง 7.20 กำหนด $f = \ 1,2\ ,\ 2,4\ ,\ 3,6\ ,\ 4,8$

ดังนั้น $f^{-1} = \ 2,1\ ,\ 4,2\ ,\ 6,3\ ,\ 8,4$

ตัวอย่าง 7.21 กำหนด $f = \ x,y\ : x,y \in R$ และ $y = x-2$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ จากบทนิยามจะได้ $f^{-1} = \ y,x\ : x,y \in R$ และ $y = x-2$

$= \ y,x\ : x,y \in R$ และ $x = y+2$

$= \ y,x\ : x,y \in R$ และ $y = x+2$

ข้อสังเกต 7.3 จะพบว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันและถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงแล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงด้วย กล่าวคือ ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปทั่วถึง A นั่นคือ $f : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$ แล้วจะได้ $f^{-1} : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$

บทนิยาม 7.16 ให้ f เป็นฟังก์ชัน ฟังก์ชันผกผันของ f คือความสัมพันธ์ผกผันของ f ที่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 7.22 กำหนด $f = \quad x,y \ : x,y \in R$ และ $y = 2x - 6$

วิธีทำ จากที่กำหนดให้ $y = f \ x \ = 2x - 6$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ดังนั้น จึงสามารถหาฟังก์ชันผกผันของ f ได้

ดังนั้น $f^{-1} = \quad y,x \ : x,y \in R$ และ $y = 2x - 6$

$= \quad x,y \ : x,y \in R$ และ $x = 2y - 6$

$= \quad x,y \ : x,y \in R$ และ $y = \dfrac{x-6}{2}\Big\}$

7.6 ฟังก์ชันประกอบ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสร้างฟังก์ชันใหม่ด้วยการประกอบกันของฟังก์ชันดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 7.17 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ ฟังก์ชันประกอบ (composite function) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f : A \to C$ นิยามโดย $g \circ f(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก ๆ x ใน A

หมายเหตุ

1. $g \circ f = \{(x, z) \in A \times C \mid$ มี $y \in B, (x, y) \in f$ และ $(y, z) \in g\}$

2. ฟังก์ชัน $g \circ f$ จะหาได้ก็ต่อเมื่อ $Range(f) \cap Dom(g) \neq \varnothing$

3. ให้ $f : A \to B, g : B \to C,$ และ $h : C \to D$ การประกอบกันของฟังก์ชันสามฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชัน $h \circ g \circ f$ จากเซต A ไปยังเซต D ซึ่งจะสามารถหาได้ก็ต่อเมื่อ $Range(f) \cap Dom(g) \neq \varnothing$ และ $Range(g) \cap Dom(h) \neq \varnothing$

ตัวอย่าง 7.23 กำหนดให้ ฟังก์ชัน $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = x - 1$

พิจารณา $Range(f) \cap Dom(g) = [1, \infty) \neq \varnothing$ และ $Range(g) \cap Dom(f) = \mathbb{R}$

จะได้ว่า $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2$

และ $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x$

ทฤษฎีบท 7.2 กำหนดให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ และ $h : C \to D$ การประกอบกันของฟังก์ชันมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

พิสูจน์ ให้ผู้เรียนพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 7.3 กำหนดให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$

1) ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและ $Range(f) \cap Dom(g) \neq \varnothing$ แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและ $Range(f) \cap Dom(g) \neq \varnothing$ แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

พิสูจน์ 1. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและ $Range(f) \cap Dom(g) \neq \varnothing$ และ $x, y \in A$ ซึ่ง $g \circ f(x) = g \circ f(y)$

จะได้ว่า $g(f(x)) = g(f(y))$

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า $f(x) = f(y)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า $x = y$

ดังนั้น $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและ $Range(f) \cap Dom(g) \neq \varnothing$ และสมาชิก $c \in C$

จะแสดงว่า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่ามี $b \in B$ ซึ่ง $g(b) = c$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่ามี $a \in A$ ซึ่ง $f(a) = b$

ดังนั้น $c = g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a)$

นั่นคือ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

บทแทรก กำหนดให้ ฟังก์ชัน $f : A \to B, g : B \to C$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งแล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

พิสูจน์ ให้ผู้เรียนพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

บทนิยาม 7.18 กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไป B **ความสัมพันธ์ผกผันของ** r (inverse relation of r) คือ ความสัมพันธ์จากเซต B ไป A นิยามโดย

ตัวอย่าง 7.23 กำหนดให้ $A = \{a,b,c\}$ และ $B = \{1,2,3\}$ และให้ความสัมพันธ์ g นิยาม $g = \{(a,1),(b,3),$

$(c,2)\}$ ดังนั้น $g^{-1} = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ จะเห็นว่าความสัมพันธ์ผกผัน g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A ในทำนองเดียวกันถ้าให้ความสัมพันธ์ $f = \{(a,1),(b,3),(c,2)\}$ จะได้ว่า $f^{-1} = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ ทั้งนี้ความสัมพันธ์ผกผันของ f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A

บทนิยาม 7.24 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f : A \to B, g : B \to A$ จะถูกเรียกว่า **ฟังก์ชันผกผันซึ่งกันและกัน** (inverse of one another function) ก็ต่อเมื่อ $g \circ f = |_A$ และ $f \circ g = |_B$

หมายเหตุ เราอาจแทนฟังก์ชัน g ในบทนิยาม 3 ด้วย f^{-1} หรือเรียก f^{-1} ว่าฟังก์ชันผกผันของ f

ตัวอย่าง 7.25 กำหนดให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x)=2x-1$ และ $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ เป็นฟังก์ชันผกผันซึ่งกันและกัน

พิจารณา สำหรับ x ใด ๆ ใน $\mathbb{R}$

เนื่องจาก $Range(f)\cap Dom(g)=\mathbb{R}$ และ $Range(g)\cap Dom(f)=\mathbb{R}$

ดังนั้น $g\circ f(x)=g(f(x))=g(2x-1)=\frac{2x-1}{2}+\frac{1}{2}=x=|(x)$ และ

$$f(g(x))=f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})=2(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})-1=x=|(x)$$

ทฤษฎีบท 7.4 กำหนดให้ $f : A \to B$ จะได้ว่า

1) ถ้า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว ความสัมพันธ์ f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A และ f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันซึ่งกันและกัน

2) ถ้า มีฟังก์ชัน $g : B \to A$ ซึ่ง f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันซึ่งกันและกัน แล้ว f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง และ $g = f^{-1}$

พิสูจน์ 1) กำหนด f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

จะแสดงว่าความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A

ให้ b_1, b_2 เป็นสมาชิกใด ๆ ใน B ซึ่ง $b_1 = b_2$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจะมี a_1, a_2 ใน A ซึ่ง $b_1 = f(a_1)$ และ $b_2 = f(a_2)$

ดังนั้น $f(a_1) = b_1 = b_2 = f(a_2)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จะได้ว่า $a_1 = a_2$

เนื่องจาก $b_1 = f(a_1)$ และ $b_2 = f(a_2)$

จะได้ว่า $f^{-1}(b_1) = a_1$ และ $f^{-1}(b_2) = a_2$

ดังนั้น $f^{-1}(b_1) = a_1 = a_2 = f^{-1}(b_2)$

นั่นคือ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

จะแสดงว่า f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันซึ่งกันและกัน

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

สำหรับ a ใด ๆ ใน A จะได้ว่ามี B เพียงตัวเดียวใน B ซึ่ง $f(a) = b$

ดังนั้น $f^{-1}(b) = a$

จะได้ $f^{-1} \circ f(a) = f^{-1}(b) = a$

และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

สำหรับ b ใด ๆ ใน B จะได้ว่ามี a เพียงตัวเดียวใน A ซึ่ง $f(a) = b$

ดังนั้น $f^{-1}(b) = a$

จะได้ $f^{-1} \circ f(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$

นั่นคือ f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันซึ่งกันและกัน

2) กำหนดให้ มีฟังก์ชัน $g : B \to A$ ซึ่ง f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันซึ่งกันและกัน

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ a_1, a_2 เป็นสมาชิกใด ๆ ใน A และ $f(a_1) = f(a_2)$

เนื่องจาก $g : B \to A$ และ $f(a_1)\acute{A}f(a_2) = B$

จะได้ว่า $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$

นั่นคือ $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$

เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันซึ่งกันและกัน

จะได้ว่า $|_A(a_1) = |_A(a_2)$ นั่นคือ $a_1 = a_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ b เป็นสมาชิกใด ๆ ใน B

เนื่องจาก $g : B \to A$

จะมี a ใน A ซึ่ง $g(b) = a$

และ $f : A \to B$

ดังนั้น $f(a) = f(g(b)) = f \circ g(b) = |_B(b) = b$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

จะแสดงว่า $g = f^{-1}$

จะแสดงว่า สำหรับสมาชิก b ใด ๆ ใน B และ a ใน A $g(b) = a$ ก็ต่อเมื่อ $f(a) = b$ (พิจารณาจาก บทนิยาม 2 $r^{-1} = \{(x,x) \mid (x,y) \in r\}$ นั่นคือ $r^{-1}(y) = x$ ก็ต่อเมื่อ $r(x) = y$)

กำหนดให้ $g(b) = a$

จะได้ว่า $f(a) = f(g(b)) =|_B (b) = b$

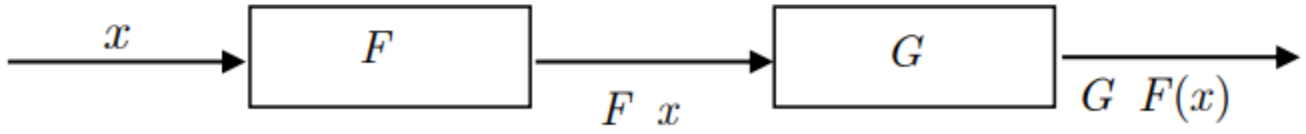
กำหนดให้ $f(a) = b$

จะได้ว่า $g(b) = g(f(a)) =|_A (a) = a$

ดังนั้น $g = f^{-1}$: http://elearning.psru.ac.th

พิจารณาฟังก์ชัน $f\ x\ =\ x^2+3x-1^{\ 100}$ จะเห็นว่าในการดำเนินการหรือคำนวณเกี่ยวกับฟังก์ชันนี้โดยตรงอาจจะไม่สะดวกแต่ถ้าเราให้ $F\ x\ = x^2+3x-1$ และ $G\ x\ = x^{100}$ ดังนั้นจะได้

$f\ x\ =\ x^2+3x-1^{\ 100} = G\ F(x)$ ซึ่งเราเรียกว่า $G\ F(x)$ *"เป็นฟังก์ชันประกอบระหว่างฟังก์ชัน G กับฟังก์ชัน F"* ซึ่งทำให้การคำนวณหรือการดำเนินการในบางครั้งกระทำได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น กระบวนการอาจเขียนเป็นแผนผังได้ดังภาพ (ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร, 2547 : 116-118)



ภาพประกอบ 4.2 แสดงแผนผังการประกอบของฟังก์ชัน : ดวงใจ ลิ้มอำไพ. 2544 : 125

7.7 พีชคณิตของฟังก์ชัน

พีชคณิตของฟังก์ชัน จะเป็นการกล่าวถึงการสร้างฟังก์ชันขึ้นใหม่จากฟังก์ชันค่าจริงที่ให้มาตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปโดยการนำฟังก์ชันเหล่านั้นมาดำเนินการ บวก ลบ คูณ หรือหารกัน ดังบทนิยามต่อไปนี้ : (จินดา อยู่เป็นสุข, 2551 : 343).

บทนิยาม 7.19 f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดนเมนและเรนท์เป็นสับเซตของจำนวนจริง ผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และ ผลหารของฟังก์ชัน นิยามโดย

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0$

ข้อสังเกต 7.4

1. $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$
2. $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

ตัวอย่าง 7.26 ให้ $f = \{(a,0),(b,2),(c,4),(d,6),(e,8)\}$

$g = \{(a,1),(b,4),(c,9),(f,16)\}$

จงหา 1. $f+g$ 2. $(f+g)(b)$ 3. $f-g$ 4. $(g-f)(a)$

5. $f\cdot g$ 6. $(f\cdot g)(c)$ 7. $\frac{g}{f}$ 8. $\frac{f}{g}(c)$

วิธีทำ จาก $f = \{(a,0),(b,2),(c,4),(d,6),(e,8)\}$ และ

$g = \{(a,1),(b,4),(c,9),(f,16)\}$

จะได้ $D_f = \{a,b,c,d,e\}$

และ $D_f = \{a,b,c,f\}$

ดังนั้น $D_f \cap D_g = \{a,b,c\}$

เนื่องจาก $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g = \{a,b,c\}$

1. $f+g = \{(a,0+1),(b,2+4),(c,4+9)\} = \{(a,1),(b,6),(c,13)\}$
2. $(f+g)(b) = f(b)+g(b) = 2+4 = 6$
3. $f-g = \{(a,0-1),(b,2-4),(c,4-9)\} = \{(a,-1),(b,-2),(c,-5)\}$
4. $(g-f)(a) = g(a)-f(a) = 1-0 = 1$
5. $f\cdot g = \{(a,0\times 1),(b,2\times 4),(c,4\times 9)\} = \{(a,0),(b,8),(c,36)\}$
6. $(f\cdot g)(c) = f(c)\cdot g(c) = 9\times 4 = 36$

เนื่องจาก $D_f \cap D_g = \{a,b,c\}$ และ $f(a) = 0$

ดังนั้น $D_{\frac{g}{f}} = \{a,b,c\} - \{a\} = \{b,c\}$

7. $\frac{g}{f} = \left\{\left(b, \frac{4}{2}\right), \left(c, \frac{9}{4}\right)\right\}$

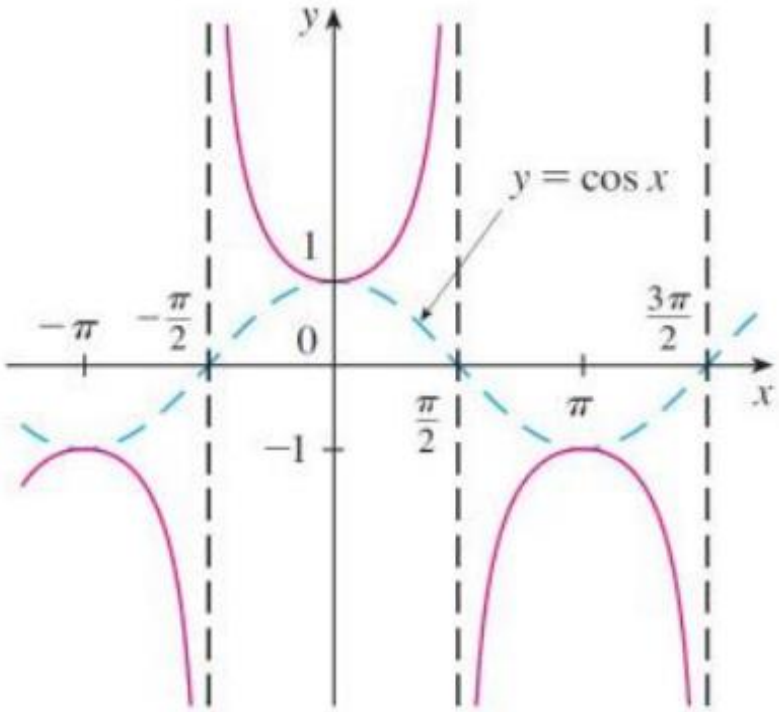
8. $\frac{f}{g}(c) = \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{4}{9}$

บทนิยาม 7.20 ฟังก์ชัน $\sec x, \cos ec\, x, \tan x$ และ $\cot x$ ได้แก่ฟังก์ชันต่อไปนี้

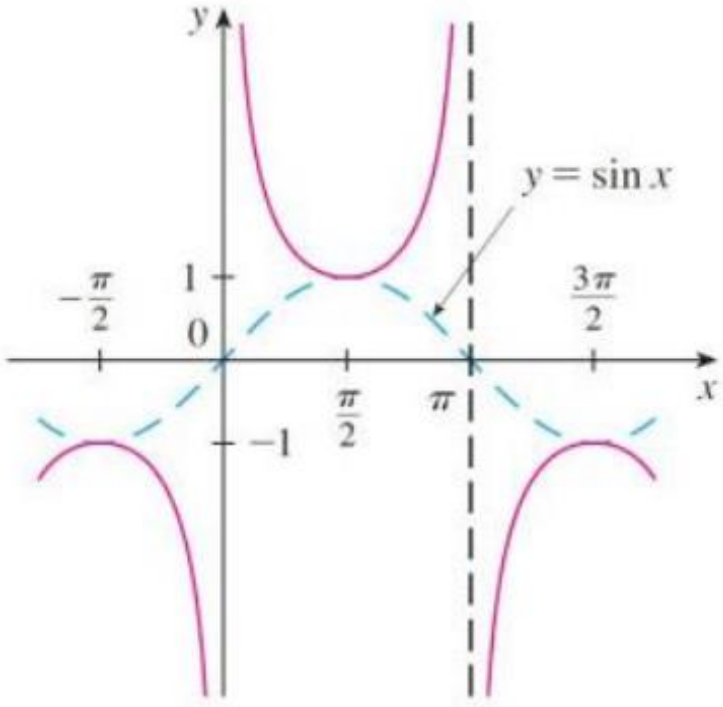
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cos ec\, x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

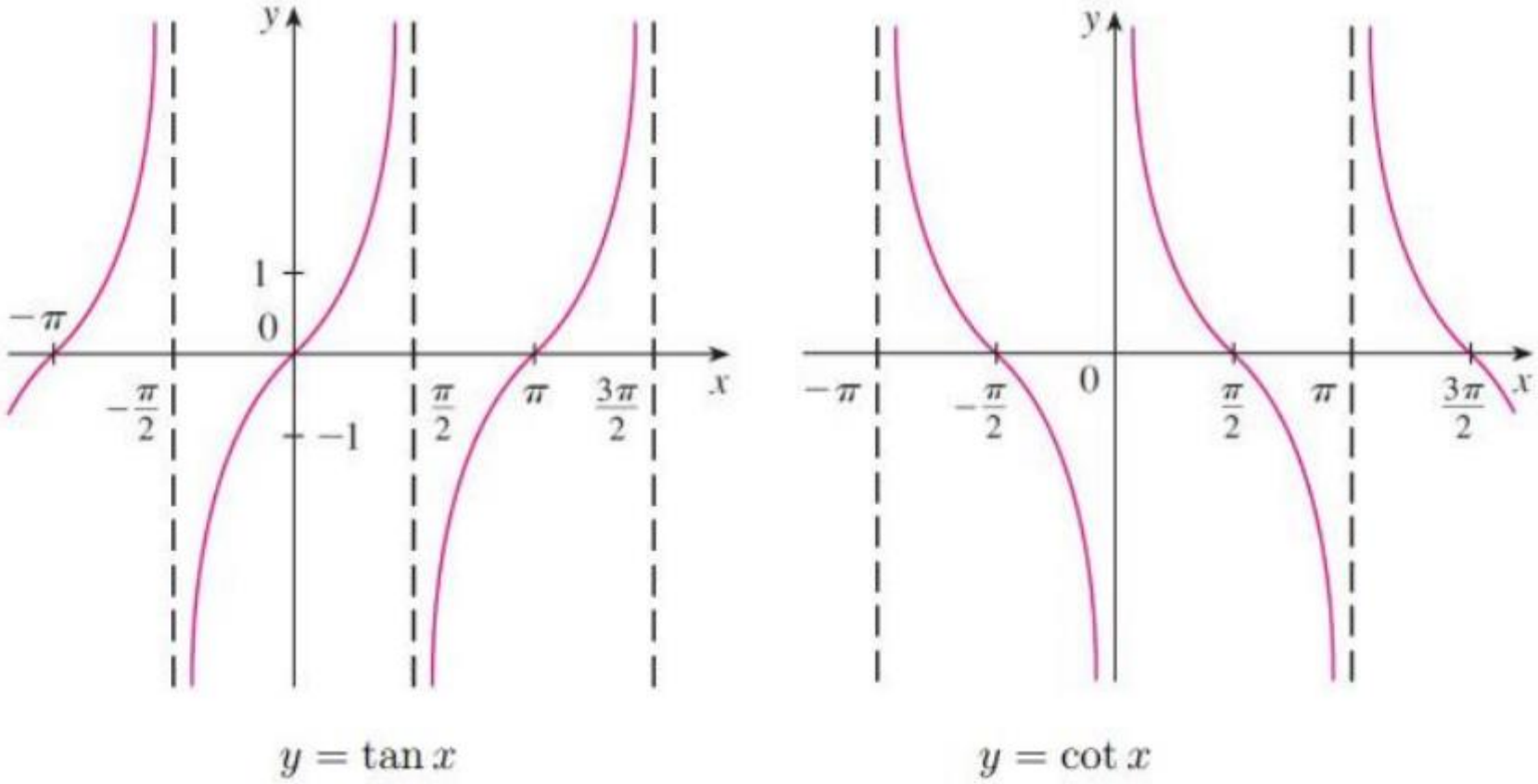
กราฟของฟังก์ชันทั้ง 4 เป็นดังนี้



$y = \sec x$



$y = \operatorname{cosec} x$



ภาพประกอบ 7.2 กราฟของ $\sec x, \cos ec\, x, \tan x$ **และ** $\cot x$