# บทที่ 3

# พหุนามและการแยกตัวประกอบ

ก่อนที่เราจะศึกษาพหนุนามนั้นในเอกสารฉบับบนี้ได้กล่าวถึงนิพจน์พีชคณิต ซึ่งเป็นวิชาที่ศึกษาการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการที่อาจสร้างขึ้นในรูปของนิพจน์ที่ประกอบด้วยสัญลักษณ์ในรูปตัวแปรซึ่งสามารถใช้แทนตัวเลข ทำให้วิธีการทางพีชคณิต ซึ่งสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้สามารถถูกแทนด้วยสัญลักษณ์ทางพีชคณิตซึ่งเป็นการแปลงประโยคภาษา เป็นประโยคสัญลักษณ์ ในรูปแบบต่าง ๆเช่นนิพจน์ที่อยู่ในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_0, a_1, \cdots, a_n$ เป็นจำนวนใด ๆ ซึ่งเรียกว่าพหุนามนั่นเอง ซึ่งเมื่อเรารู้จักรูปแบบของพหุนามแล้วเราสามารถนำหลักการและทฤษฎีบทต่าง ๆ ในการแยกตัวประกอบเพื่อนำไปสู่กาแก้สมการและอสมการในรูปแบบต่าง ๆ เพราะการหาผลเฉลยของสมการและอสมการกำลังสองขึ้นไปนั้นถ้าได้ศึกษาการแยกตัวประกอบได้เข้าใจแล้วเป็นอย่างดีแล้วก็ไม่เป็นเรื่องยากที่จะสามารถหาผลเฉลยของสมการและอสมการได้และในบทนี้จะแบ่งเนื้อหาเป็น 3 เรื่อง ได้แก่ นิพจน์พีชคณิต การแยกตัวประกอบพหุนาม สมการและอสมการ ดังนี้

## 3.1 นิพจน์พีชคณิต

นิพจน์พีชคณิต มาจากคำสองคำคือคำว่า นิพจน์ และ พีชคณิต ซึ่งพีชคณิตเป็นวิชาแขนงหนึ่งในคณิตศาสตร์เช่นเดียวกับเรขาคณิต หรือตรีโกณมิติ นิพจน์พีชคณิตสร้างขึ้นจากค่าคงตัว และตัวแปร และการดำเนินการทางพีชคณิตของการบวก การลบ การคูณ หรือ การหาร หรือรวมทั้งการใช้กรณฑ์ ตัวอย่างเช่น

$$\sqrt[3]{x^3 + 2x + 1}, \frac{x+4}{x^2 + 2x + 4}, (4x^{-5} + 2x^{-3})^{\frac{2}{3}}, 9x^2 + 18x + 9$$

ทั้งหมดเป็นนิพจน์พีชคณิต นิพจน์พีชคณิตที่เกี่ยวข้องเฉพาะ การดำเนินการขอการบวก การลบ และการคูณของตัวแปร และค่าคงตัวเช่น $9x^2 + 18x + 9$ เรียกว่า พหุนาม (รศ.ดร.นพพร แหยมแสง, (2559), คณิตศาสตร์ในหลักสูตรมัธยมศึกษา 2, สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง พิมพ์ครั้งที่ 2, 328-329). แต่พีชคณิตเป็นวิชาที่จะศึกษาการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการที่อาจสร้างขึ้นในรูปของนิพจน์ที่ประกอบด้วยสัญลักษณ์ในรูปตัวแปรซึ่งสามารถใช้แทนตัวเลขเซตของฟังก์ชัน หรืออะไรก็ได้ จึงทำให้วิธีการทาง

พีชคณิตสามารถใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาหรือสนับสนุนงานทางคณิตศาสตร์หลายสาขา เช่น ทางด้านเครื่องข่ายติดต่อสื่อสาร กฎทางฟิสิกส์ แบบจำลองประชากร ผลเชิงสถิติ ซึ่งสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้สามารถถูกแทนด้วยสัญลักษณ์ทางพีชคณิตซึ่งเป็นการแปลงประโยคภาษา เป็นประโยคสัญลักษณ์ ดังจะกล่าวในตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.1** ประโยคภาษาและประโยคสัญลักษณ์

| **ประโยคภาษา** | **ประโยคสัญลักษณ์** |
|---|---|
| ศูนย์น้อยกว่าสาม | $0 < 3$ |
| เจ็ดบวกสามได้สิบ | $7 + 3 = 10$ |
| สองเท่าของสามจุดหกมากกว่าเจ็ด | $2(3.6) > 7$ |
| สามบวกกับจำนวนหนึ่งได้สิบ | $3 + n = 0$ |
| สองเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งมีค่าน้อยกว่าสอบ | $2x < 10$ |

**หมายเหตุ**

ประโยคสัญลักษณ์จะมีตัวแปรหรือไม่ก็ได้

ในการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ นั้นต้องรู้จักการใช้สัญลักษณ์แทนส่วนที่กล่าวถึงจำนวน และส่วนที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนดังตัวอย่างต่อไปนี้ (จารุนี สูตะบุตร และคณะ, 2533 : 2)

**ประโยคภาษา** : สามเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งมีค่าเท่ากับยี่สิบเอ็ด

**ประโยคสัญลักษณ์** : $3x$ $=$ $21$

(จำนวน) (ความสัมพันธ์) (จำนวน)

ในบางครั้งจะมีข้อความที่ยังไม่ได้เป็นประโยคกล่าวถึงเพียงแค่จำนวน แต่ยังไม่ใช่ประโยค เรียกว่านิพจน์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.2** ตัวอย่างของนิพจน์

1. $5$ เท่าของ $x$
2. หนึ่งในสี่ของ $b$
3. จำนวนซึ่งน้อยกว่า $x$ อยู่ $7$
4. จำนวนที่มากกว่า $y$ อยู่ $21$
5. ผลต่างของ $y$ และ $12$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะแสดงถึงข้อความที่ยังไม่เป็นประโยคหรือนิพจน์ ประโยคภาษา และ ประโยคสัญลักษณ์ จะเห็นได้ว่าการที่จะเป็นประโยคได้นั้นต้องแสดงความสัมพันธ์ระหว่าจำนวนนั่นเองดังที่ได้แสดงในตัวอย่างซึ่งความสัมพันธ์ในพีชคณิตนั้นก็จะได้กล่าวในบทนิยาต่อไปนี้ (จารุนี สูตะบุตร และคณะ, 2533 : 3)

**บทนิยาม 2.1**

ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของจำนวนโดยมีสัญลักษณ์ $=$ (เท่ากับ) บอกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน เรียกว่า **สมการ**

นอกจากสัญลักษณ์ $=$ แล้วยังมีสัญลักษณ์ $>$ แทนความสัมพันธ์ มากกว่า

$<$ แทนความสัมพันธ์ น้อยกว่า

และ $\neq$ แทนความสัมพันธ์ ไม่เท่ากับ หรือ ไม่เท่ากัน

นอกจากสัญลักษณ์ดังกว่าวแล้ว เรายังใช้สัญลักษณ์ $\leq$ แทนความสัมพันธ์น้อยกว่าหรือเท่ากับ สัญลักษณ์ $\geq$ แทนความสัมพันธ์มากกว่าหรือเท่ากับ เช่น

$x \leq 2$ อ่านว่า $x$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ $2$ หมายถึง
$x < 2$ หรือ $x = 2$ อีกนัยหนึ่งคือ
$x$ มีค่าไม่เกิน $2$

$a \geq b$ อ่านว่า $a$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ $b$ หมายถึง
$a > b$ หรือ $a = b$ อีกนัยหนึ่งคือ
$a$ มีค่าไม่น้อยกว่า $b$

**บทนิยาม 2.2**

ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของจำนวนโดยมีสัญลักษณ์ $<, >, \leq, \geq$ หรือ $\neq$ บอกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน เรียกว่า **อสมการ**

## 3.2 การแยกตัวประกอบพหุนาม

ก่อนที่เราจะไปศึกษาการแยกตัวประกอบพหุนามนั้นผู้เรียนต้องรู้จักคำว่าพหุนามก่อน ซึ่งพหุนามคือนิพจน์ที่อยู่ในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_0, a_1, \cdots, a_n$ เป็นจำนวนใด ๆ เมื่อ $a_n \neq 0$ และพหุนามนี้มีระดับขั้น $n$ เรียกสมการที่อยู่ในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ เรียก $a_0, a_1, \cdots, a_n$ ว่า สัมประสิทธิ์ของพหุนาม เรียกพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์ทั้งหมดว่า พหุนามศูนย์ เรียกฟังก์ชันซึ่งค่าของฟังก์ชันเป็นพหุนามว่า ฟังก์ชันพหุนาม (แก้ว สงขาว และคณะ, 2553 : 202)

**คำควรรู้**

$\Rightarrow$ นิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวเล็ก เช่น $x, y$ แทนจำนวน และเรียกอักษรเหล่านั้นว่า **ตัวแปร**

$\Rightarrow$ สำหรับตัวเลขที่แทนจำนวน เช่น $1,2,3$ เรียกว่า **ค่าคงตัว**

$\Rightarrow$ เรียกข้อความในรูปสัญลักษณ์ เช่น $3,\ 2x,\ 4+x,\ x+5$ ว่า **นิพจน์**

$\Rightarrow$ เรียกนิพจน์ที่เขียนในรูปการณ์คูณของค่าคงตัวกับตัวแปรตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไปที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เช่น $2, 4x, 2xy, x^2$ ว่า **เอกนาม**

$\Rightarrow$ เรียกนิพจน์ที่สามารถเขียนในรูปของเอกนามหรือการบวกเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป เช่น $x^2+2x+1, 3x+2y$ ว่า **พหุนาม**

$\Rightarrow$ สำหรับเอกนามใด ๆ เรียกผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปรในเอกนามว่า ดีกรีของเอกนาม

| | | |
|---|---|---|
| เช่น | $3x$ | เป็นเอกนามดีกรีหนึ่ง |
| | $3x^2$ และ $-2xy$ | เป็นเอกนามดีกรีสอง |
| | $5$ | เป็นเอกนามดีกรีศูนย์ เนื่องจาก $5x^0$ |

$\Rightarrow$ สำหรับพหุนามใด ๆ ดีกรีของพหุนามได้แก่ ดีกรีสูงสุดของเอกนามในพหุนามนั้น

| | | |
|---|---|---|
| เช่น | $3x^2+2xy+1$ | เป็นพหุนามดีกรีสาม |

$x^4 + x^3 - 2x$ เป็นพหุนามดีกรีสี่ (รศ.ดร. นพพร แหยมแสง, (2559), คณิตศาสตร์ในหลักสูตรมัธยมศึกษา 2 Mathematics in Secondary School Curriculum 2, สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง, พิมครั้งที่ 2, 329-333).

**ตัวอย่าง 3.3**

$2x^5 + x^3 + 8$ พหุนามระดับขั้น $5$

$5x^3 + 3x^2$ พหุนามระดับขั้น $3$

$x^2 + \sqrt{3}x - 1$ พหุนามระดับขั้น $2$

เมื่อเราทราบข้อมูลเบื้องต้นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับพหุนามแล้วต่อไปจะเป็นการศึกษาการแยกตัวประกอบพหุนามโดยจะเริ่มศึกษาจากการแยกตัวประกอบพหุนามจากง่ายไปหายากตามหัวข้อต่อไปนี้

### 3.2.1 การแยกตัวประกอบพหุนามระดับขั้นสอง

สำหรับการแยกตัวประกอบพหุนามระดับขั้นสองนี้พหุนามที่เราจะศึกษาในหัวข้อนี้เป็นพหุนามระดับขั้นสองที่มีตัวแปรเดียวเท่านั้น ดังจะกล่าวในบทนิยามต่อไปนี้ (กมล เอกไทยเจริญ, 2552 : 265)

**บทนิยาม 3.3**

พหุนามระดับขึ้นสองคือพหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $x$ เป็นตัวแปร และ $a, b, c$ เป็นค่าคงตัวโดยที่ $a \neq 0$ เรียกว่า **พหุนามดีกรีสองที่มีตัวแปรเดียว**

จากบทนิยาม 3.3

เรียก $a$ ว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรยกกำลังสอง

เรียก $b$ ว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรยกกำลังหนึ่ง

เรียก $c$ ว่าค่าคงตัว

การแยกตัวประกอบของพหุนาม คือ การเขียนพหุนามนั้นในรูปการณ์คูณกันของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่าพหุนามเดิมตั้งแต่สองพหุนามขึ้นไป

การแยกตัวประกอบโดยใช้สมบัติการแจกแจง ถ้า $a, b$ และ $c$ แทนจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$a(b+c) = ab + ac \text{ หรือ } (b+c)a = ba + ca$$

หรือเขียนเป็น $ab+ac=a(b+c)$ หรือ $ba+ca=(b+c)a$ ถ้า $a,b$ และ $c$ เป็นพหุนาม เรียก $a$ ว่าตัวประกอบร่วมของ $ab$ และ $ac$ หรือ ตัวประกอบร่วมของ $ba$ และ $ca$ เราจะใช้สมบัติการแจกแจงในการแยกตัวประกอบ

**ตัวอย่าง 3.4**

1). $x^2-25x \quad =(x)(x)-(25)(x)$

$= x(x-25)$

2). $7x^2+49x \quad =(7)(x)(x)+(7\times 7)(x)$

$=(7x)(x+7)$

3). $100x^4+10x^3 \quad =(10)(10)(x^3)(x)+(10)(x^3)$

$=(10x^3)(10x+1)$

4). $13x^4+x^2 \quad = (13)(x^2)(x^2)+(x^2)$

$=(x^2)(13x^2+1)$

5). $5x^3-15x^2 \quad =(5)(x^2)(x)-(5)(3)(x^2)$

$=(5x^2)(x-3)$

**ตัวอย่าง 3.5**

$(x-2)(x-3) \quad =(x-2)x-(x-2)3$ การแจกแจง

$=x^2-2x-3x+6$ การแจกแจง

$=x^2-(2+3)x+6$ การเปลี่ยนหมู่การบวก

$=x^2-5x+6$ การเท่ากัน

$=x^2-5x+6$ การเท่ากัน

ทำย้อนกลับ

$x^2 - 5x + 6 \quad = x^2 - (2+3)x + 6$ การเท่ากัน

$= x^2 - (2+3)x + 6$ การแจกแจง

$= (x^2 - 2x) - (3x - 6)$ การเปลี่ยนหมู่การบวก

$= x(x-2) - 3(x-2)$ การแจกแจง

$= (x-2)(x-3)$ การแจกแจง

ต่อไปจะเป็นการแยกตัวประกอบพหุนามวิธีต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

**1). การแยกตัวประกอบพหุนาม** $x^2 + bx + c$ **เมื่อ** $c = m \times n$ **และ** $b = m + n$

สำหรับกรณีนี้จึงเป็นการแยกพหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ และ $a = 1$ โดยที่สามารถหา $m$ และ $n$ ได้เท่านั้น และเมื่อหา $m$ และ $n$ ได้แล้วนั้นจึงทำให้การแยกตัวประกอบพหุนามมีรูปแบบดังนี้

$$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$$

**ตัวอย่าง 3.6** จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 5x + 6$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $6 = 3 \times 2$

และ $5 = 3 + 2$

**ดังนั้น** $x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$

**ตัวอย่าง 3.7** จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 5x + 6$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $6 = (-3) \times (-2)$

และ $-5 = (-3) + (-2)$

**ดังนั้น** $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

**ตัวอย่าง 3.8** จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 3x - 10$

**วิธีทำ**

**ตัวอย่าง 3.9** จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 3x - 10$

**วิธีทำ**

**2). การแยกตัวประกอบพหุนาม** $ax^2 + bx + c$ **เมื่อ** $a = p \times q, c = m \times n$ **และ** $b = (p \times n) + (q \times m)$ สำหรับกรณีนี้จึงเป็นการแยกพหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ และ $a \neq 0$ โดยที่สามารถหา $m, n, p$ และ $q$ ได้เท่านั้น โดยมีวิธีการหาดังต่อไปนี้

1. กำหนดพหุนามดีกรีสอง $ax^2 + bx + c$

2. ถ้ามี $m, n, p$ และ $q$ ที่ทำให้

$$
\begin{aligned}
a &= p \times q \\
c &= m \times n \\
b &= (p \times n) + (q \times m)
\end{aligned}
$$

3. พิจารณาผลคูณ $(px + m)(qx + n)$ จะพบว่า

$$
\begin{aligned}
(px + m)(qx + n) &= pqx^2 + pnx + qmx + mn \\
&= pqx^2 + (pn + qm)x + mn \\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}
$$

4. ดังนั้น สามารถแยกตัวประกอบของ $ax^2 + bx + c$ ได้ดังนี้

$$ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n)$$

**ตัวอย่าง 3.10** จงแยกตัวประกอบของ $8x^2 + 14x + 3$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $8 = 2 \times 4$

$3 = 3 \times 1$

และ $14 = (2 \times 1) + (4 \times 3)$

**ดังนั้น** $8x^2 + 14x + 3 = (2x+3)(4x+1)$

**ตัวอย่าง 3.11** จงแยกตัวประกอบของ $15x^2 + x - 2$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $15 = 3 \times 5$

$$-2 = (-1) \times 2$$

และ $1 = (2 \times 3) + ((-1) \times 5)$

**ดังนั้น** $15x^2 + x - 2 = (3x-1)(5x+2)$

**ข้อสังเกต 1.1**

1. กำหนดพหุนามดีกรีสอง $ax^2 + bx + c$ ถ้า $c > 0$ แล้ว $m$ และ $n$ จะเป็นจำนวนบวกทั้งคู่ หรือจำนวนลบทั้งคู่ โดยที่

    - $m$ และ $n$ เป็นจำนวนบวกทั้งคู่ เมื่อ $b > 0$
    - $m$ และ $n$ เป็นจำนวนลบทั้งคู่ เมื่อ $b < 0$

2. ถ้า $c < 0$ แล้ว $m$ และ $n$ จะเป็นจำนวนบวกหนึ่งจำนวน และจำนวนลบหนึ่งจำนวน จำนวนใดเป็นจำนวนบวกขึ้นอยู่กับจำนวน $b$

**ตัวอย่าง 3.12** จงแยกตัวประกอบของ $-12x^2 + x + 6$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $-12x^2 + x + 6 = -(12x^2 - x - 6)$

และ $12 = 4 \times 3$

$$-6 = (-3) \times 2$$

$$1 = (4 \times 2) + (3 \times (-3))$$

จะได้ว่า $-(12x^2 - x - 6) = -(4x-3)(3x+2)$

หรือ $= (-4x+3)(3x+2)$

หรือ $= (4x-3)(-3x-2)$

**ดังนั้น** $-12x^2 + x + 6 = -(4x-3)(3x+2)$ หรือ $(-4x+3)(3x+2)$ หรือ $(4x-3)(-3x-2)$

**3). การแยกตัวประกอบพหุนามระดับขั้นสองที่เป็นผลต่างกำลังสอง** การแยกตัวประกอบพหุนามระดับขั้นสองที่เป็นผลต่างกำลังสองเป็นการแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรของผลต่างกำลังสองมีรูปแบบดังนี้ (กมล เอกไทยเจริญ, 2552 : 269)

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

**ตัวอย่าง 3.13** ตัวอย่างการแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรผลต่างของกำลังสองเบื้องต้น

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$$
$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$$
$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$$
$$\frac{1}{9}x^2 - 25 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - 5^2 = (\frac{1}{3}x-5)(\frac{1}{3}x+5)$$

การแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรผลต่างของกำลังสอง ที่จะกล่าวต่อไปมีส่วนเกี่ยวข้อกับจำนวนในรูปแบบกรณฑ์ที่สอง ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในเนื้อหาบทที่ผ่านมา ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างการแยกตัวประกอบของพหุนามระดับขั้นสองซึ่งใช้สูตรของผลต่างกำลังสองและเกี่ยวข้องกับจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สอง

**ตัวอย่าง 3.14** จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 2$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $2 = (\sqrt{2})^2$

นั่นคือ $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2$

$= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

**ดังนั้น** $x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

**ตัวอย่าง 3.15** จงแยกตัวประกอบของ $5x^2 - 4$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $4 = 2^2$ และ $5 = (\sqrt{5})^2$

นั่นคือ $5x^2 - 4 = (\sqrt{5}x)^2 - 2^2$

$= (\sqrt{5}x-2)(\sqrt{5}x+2)$

**ดังนั้น** $5x^2 - 4 = (\sqrt{5}x-2)(\sqrt{5}x+2)$

**ตัวอย่าง 3.16** จงแยกตัวประกอบของ $3x^2 - 7$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $3 = (\sqrt{3})^2$ และ $7 = (\sqrt{7})^2$

นั่นคือ $3x^2 - 7 = (\sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{7})^2$

$$= (\sqrt{3}x - \sqrt{7})(\sqrt{3}x + \sqrt{7})$$

**ดังนั้น** $3x^2 - 7 = (\sqrt{3}x - \sqrt{7})(\sqrt{3}x + \sqrt{7})$

**ตัวอย่าง 3.17** จงแยกตัวประกอบของ $(x-2)^2 - 5$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $5 = (\sqrt{5})^2$

นั่นคือ $(x-2)^2 - 5 = (x-2)^2 - (\sqrt{5})^2$

$$= \left((x-2) - \sqrt{5}\right)\left((x-2) + \sqrt{5}\right)$$

$$= \left(x - 2 - \sqrt{5}\right)\left(x - 2 + \sqrt{5}\right)$$

**ดังนั้น** $(x-2)^2 - 5 = \left(x - 2 - \sqrt{5}\right)\left(x - 2 + \sqrt{5}\right)$

**ตัวอย่าง 3.18** จงแยกตัวประกอบของ $\frac{16}{25}(x-1)^2 - 32$

**วิธีทำ**

**ตัวอย่าง 3.19** จงแยกตัวประกอบของ $48-\frac{9}{8}(2x+1)^2$

**วิธีทำ**

**4). การแยกตัวประกอบพหุนามระดับขั้นสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์** การแยกตัวประกอบพหุนามระดับขั้นสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์เป็นการแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์ ดังต่อไปนี้ (กมล เอกไทยเจริญ, 2552 : 272-278)

$$A^2+2AB+B^2=\left(A+B\right)^2 \qquad \text{และ}$$

$$A^2-2AB+B^2=\left(A-B\right)^2$$

เมื่อ $A$ และ $B$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ สำหรับการใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อทำให้พนุหนามดีกรีสอง ให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

**ตัวอย่าง 3.20** การแยกตัวประกอบพหุนามระดับขั้นสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

1. $x^2+2(3)x+3^2=(x+3)^2$
2. $x^2-3(2)x+2^2=(x-2)^2$
3. $x^2+2(10)x+10^2=(x+10)^2$
4. $(2x)^2-2(5)(2x)+5^2=(2x-5)^2$

**ตัวอย่าง 3.21** จงแยกตัวประกอบของ $x^2+2\sqrt{5}x+5$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $5=(\sqrt{5})^2$

นั่นคือ $x^2+2\sqrt{5}x+5=x^2+2\sqrt{5}x+(\sqrt{5})^2$

$$=(x+\sqrt{5})^2$$

**ดังนั้น** $x^2+2\sqrt{5}x+5=(x+\sqrt{5})^2$

**ตัวอย่าง 3.22** จงแยกตัวประกอบของ $4x^2-8\sqrt{3}x+12$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $4=(\sqrt{4})^2=(\sqrt{2\times 2})^2=2^2$ และ

$12=(\sqrt{12})^2=(\sqrt{2\times 2\times 3})^2=2(\sqrt{3})^2$ และ

$8\sqrt{3}x=2(4\sqrt{3})=2\times 2\times 2\sqrt{3}$

นั่นคือ $4x^2-8\sqrt{3}x+12=(2x)^2-2\times 2\times 2\sqrt{3}x+2(\sqrt{3})^2$

$$\begin{aligned}
&=(2x)^2-2\times 2\sqrt{3}(2x)+2(\sqrt{3})^2\\
&=(2x)^2-2(2\sqrt{3})(2x)+2(\sqrt{3})^2\\
&=(2x-2\sqrt{3})^2\\
&=\left(2(x-\sqrt{3})\right)^2\\
&=2^2(x-\sqrt{3})^2\\
&=4(x-\sqrt{3})^2
\end{aligned}$$

**ดังนั้น** $4x^2-8\sqrt{3}x+12=4(x-\sqrt{3})^2$

จากการสังเกตพหุนามในตัวอย่าง 3.22 พบว่า แต่ละพจน์ของพหุนามมีตัวประกอบร่วมคือ 4 ดังนั้น เพื่อทำให้ง่ายขึ้นอาจแยกตัวประกอบได้อีกวิธีหนึ่ง ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
4x^2-8\sqrt{3}x+12&=4(x^2-2\sqrt{3}x+3)\\
&=4\left[x^2-2\sqrt{3}x+(\sqrt{3})^2\right]\\
&=4(x^2-\sqrt{3})^2
\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 3.23** จงแยกตัวประกอบของ $2x^2+6\sqrt{6}x+27$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $2=(\sqrt{2})^2$ และ

$6\sqrt{6} = 2\times 3\sqrt{2\times 3}$ และ

$$27 = (\sqrt{27})^2 = (\sqrt{3\times 3\times 3})^2 = (3\sqrt{3})^2$$

นั่นคือ $2x^2 + 6\sqrt{6}x + 27 = (\sqrt{2}x)^2 + 2\times 3\sqrt{2\times 3} + (3\sqrt{3})^2$

$$= (\sqrt{2}x)^2 + 2(3\sqrt{2\times 3})x + 3\sqrt{3}$$

$$= (\sqrt{2}x)^2 + 2(3)(\sqrt{2})(\sqrt{3})x + 3\sqrt{3}$$

$$= (\sqrt{2}x)^2 + 2(3\sqrt{3})(\sqrt{2}x) + 3\sqrt{3}$$

$$= (\sqrt{2}x + 3\sqrt{3})^2$$

**ดังนั้น** $2x^2 + 6\sqrt{6}x + 27 = (\sqrt{2}x + 3\sqrt{3})^2$

**ตัวอย่าง 3.24** จงแยกตัวประกอบของ $\dfrac{1}{4}x^2 + 2\sqrt{5}x + 20$

**วิธีทำ**

พหุนามระดับขั้นสองบางพหุนามไม่สามารถแยกตัวประกอบเป็นกำลังสองสมบูรณ์ แต่สามารถใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ และใช้สูตรผลต่างของกำลังสองช่วยในการแยกตัวประกอบได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.25** จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 4x - 5$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $x^2 + 4x - 5 = (x^2 + 4x) - 5$

จัด $(x^2 + 4x)$ ให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ดังต่อไปนี้

$$= \left((x^2 + 2(2)(x) + 2^2\right) - 5 - 2^2$$
$$= (x+2)^2 - 5 - 2^2$$
$$= (x+2)^2 - 5 - 4$$
$$= (x+2)^2 - 9$$
$$= (x+2)^2 - 3^2$$
$$= \left[(x+2) - 3\right]\left[(x+2) + 3\right]$$
$$= (x-1)(x+5)$$

**ดังนั้น** $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$

**ข้อสังเกต 1.2**

ผลการแยกตัวประกอบในตัวอย่างที่ 2.21

$$x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$$

จะเหมือนกับการแยกตัวประกอบพหุนามระดับขั้นสองด้วยวิธีที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อแรกกล่าวคือ

เนื่องจาก $4 = -1 + 5$

และ $-5 = -1 \times 5$

ดังนั้น $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$

**ตัวอย่าง 3.26** จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 8x + 10$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $x^2 + 8x + 10 = (x^2 + 8x) + 10$

จัด $x^2 + 8x$ ให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ดังต่อไปนี้

$$= \left((x^2 + 2(4)x + 4^2\right) + 10 - 4^2$$
$$= (x+4)^2 + 10 - 4^2$$
$$= (x+4)^2 + 10 - 16$$
$$= (x+4)^2 - 6$$
$$= (x+4)^2 - (\sqrt{6})^2$$
$$= \left[(x+4) - \sqrt{6}\right]\left[(x+4) + \sqrt{6}\right]$$
$$= (x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 + \sqrt{6})$$

**ดังนั้น** $x^2 + 8x + 10 = (x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 + \sqrt{6})$

**ตัวอย่าง 3.27** จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 7x + 10$

**วิธีทำ** $x^2 - 7x + 10 = (x^2 - 7x) + 10$

$$= \left( (x^2 + 2\left(\frac{7}{2}\right)x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \right) + 10 - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \left( (x^2 + 2\left(\frac{7}{2}\right)x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \right) + 10 - \frac{49}{4}$$

$$= \left( (x - \frac{7}{2} \right)^2 + \left( \frac{40}{4} - \frac{49}{4} \right)$$

$$= \left( (x - \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$= \left( (x - \frac{7}{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \left[ \left( (x - \frac{7}{2} \right) - \left(\frac{3}{2}\right) \right] \left[ \left( (x - \frac{7}{2} \right) + \left(\frac{3}{2}\right) \right]$$

$$= \left( x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \right) \left( x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \right)$$

$$= \left( x - \frac{10}{2} \right) \left( x - \frac{13}{2} \right)$$

$$= (x - 5)\left( x - \frac{13}{2} \right)$$

**ดังนั้น** $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)\left( x - \frac{13}{2} \right)$

การแยกตัวประกอบพหุนามโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ของพหุนามระดับขั้นสองในตัวอย่างที่ผ่านมา จะพบว่า สัมประสิทธิ์ของ $x^2$ เท่ากับ $1$ ในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของ $x^2$ ไม่เท่ากับ $1$ หากต้องการแยกตัวประกอบโดยวิธีกำลังสองสัมบูรณ์ สามารถทำได้โดยใช้สมบัติการแจกแจงเพื่อทำให้สัมประสิทธิ์ของ $x^2$ ให้เท่ากับ 1 ก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.28** จงแยกตัวประกอบของ $3x^2 + 24x + 30$

**วิธีทำ** $3x^2 + 24x + 30 = 3(x^2 + 8x + 10)$

$$
\begin{aligned}
&= 3\left[\left(x^2 + 2(4)x + (4)^2\right) + 10 - (4)^2\right] \\
&= 3\left[(x+4)^2 + 10 - (4)^2\right] \\
&= 3\left[(x+4)^2 + 10 - 16\right] \\
&= 3\left[(x+4)^2 - 6\right] \\
&= 3\left[(x+4)^2 - 6\right] \\
&= 3\left[(x+4)^2 - (\sqrt{6})^2\right] \\
&= 3\left[\left((x+4) - \sqrt{6}\right)\left((x+4) - \sqrt{6}\right)\right] \\
&= 3\left[\left(x + 4 - \sqrt{6}\right)\left(x + 4 - \sqrt{6}\right)\right] \\
&= 3(x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 - \sqrt{6})
\end{aligned}
$$

**ดังนั้น** $3x^2 + 24x + 30 = 3(x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 - \sqrt{6})$

**ตัวอย่าง 3.29** จงแยกตัวประกอบของ $-x^2 + 15x - 40$

**วิธีทำ** $-x^2 + 15x - 40 = -(x^2 - 15x + 40)$

$$= -\left[\left((x^2 + 2\left(\frac{15}{2}\right)x + \left(\frac{15}{2}\right)^2\right) + 40 - \left(\frac{15}{2}\right)^2\right]$$

$$= -\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + 40 - \left(\frac{15}{2}\right)^2\right]$$

$$= -\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + 40 - \frac{225}{4}\right]$$

$$= -\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{160}{4} - \frac{225}{4}\right]$$

$$= -\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{65}{4}\right]$$

$$= -\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{65}}{2}\right)^2\right]$$

$$= -\left[\left(x + \frac{15}{2} - \frac{\sqrt{65}}{2}\right)\left(x + \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}\right)\right]$$

$$= -\left[\left(x + \frac{15 - \sqrt{65}}{2}\right)\left(x + \frac{15 + \sqrt{65}}{2}\right)\right]$$

$$= -\left(x + \frac{15 - \sqrt{65}}{2}\right)\left(x + \frac{15 + \sqrt{65}}{2}\right)$$

**ดังนั้น** $-x^2 + 15x - 40 = -\left(x + \frac{15 - \sqrt{65}}{2}\right)\left(x + \frac{15 + \sqrt{65}}{2}\right)$

**ตัวอย่าง 3.30** จงแยกตัวประกอบของ $-3x^2 + 2x + 5$

**วิธีทำ** $-3x^2 + 2x + 5 = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right)$

$$= -3\left[\left((x^2 - \frac{2}{3}x\right) - \frac{5}{3}\right]$$

$$= -3\left[\left((x^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - \frac{5}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$$

$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{5}{3} - \frac{1}{9}\right]$$

$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{15}{9} - \frac{1}{9}\right]$$

$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right]$$

$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right]$$

$$= -3\left[\left(\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3}\right)\left(\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3}\right)\right]$$

$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right)\right]$$

$$= -3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(x + 1\right)\right]$$

$$= -3\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(x + 1\right)$$

$$= \left(5 - \frac{x}{3}\right)\left(x + 1\right)$$

**ดังนั้น** $-3x^2 + 2x + 5 = \left(5 - \frac{x}{3}\right)\left(x + 1\right)$

### 3.2.2 การแยกตัวประกอบพหุนามระดับขั้นสาม

**1). การแยกตัวประกอบผลบวกกำลังสามและการแยกตัวประกอบผลต่างกำลังสาม** พหุนามระดับขั้นสามบางพหุนามที่มีรูปแบบเฉพาะสามารถแยกตัวประกอบได้ โดยใช้สูตรการแยกตัวประกอบผลบวกกำลังสามและสูตรการแยกตัวประกอบผลต่างกำลังสาม ดังต่อไปนี้ (สุชิน ทำมาหากิน, 2540 : 128)

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$
$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

เมื่อ $A$ และ $B$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ สำหรับการใช้สูตรการแยกตัวประกอบผลบวกกำลังสามและสูตรการแยกตัวประกอบผลต่างกำลังสาม แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.31** จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 64$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $64 = 4^3$

จะได้ $x^3 + 64 = x^3 + 4^3$

$$= (x+4)(x^2 - 4x + 4^2)$$
$$= (x+4)(x^2 - 4x + 16)$$

**ดังนั้น** $x^3 + 64 = (x+4)(x^2 - 4x + 16)$

**ตัวอย่าง 3.32** จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 64$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $64 = 4^3$

จะได้ $x^3 - 64 = x^3 - 4^3$

$$= (x-4)(x^2 + 4x + 4^2)$$
$$= (x-4)(x^2 + 4x + 16)$$

**ดังนั้น** $x^3 - 64 = (x-4)(x^2 + 4x + 16)$

**ตัวอย่าง 3.33** จงแยกตัวประกอบของ $8x^3 + 125$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $125 = 5^3$ และ $8x^3 = (2x)^3$

จะได้ $8x^3 + 125 = (2x)^3 + 5^3$

$$= (2x+5)\left[(2x)^2 - (2x)(5) + 5^2\right]$$
$$= (2x+5)(4x^2 - 10x + 25)$$

**ดังนั้น** $8x^3 + 125 = (2x+5)(4x^2 + 10x + 25)$

**ตัวอย่าง 3.34** จงแยกตัวประกอบของ $8x^3 - 125$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $125 = 5^3$ และ $8x^3 = (2x)^3$

จะได้ $8x^3 - 125 = (2x)^3 - 5^3$

$$= (2x-5)\left[(2x)^2 + (2x)(5) + 5^2\right]$$
$$= (2x-5)(4x^2 + 10x + 25)$$

**ดังนั้น** $8x^3 - 125 = (2x-5)(4x^2 + 10x + 25)$

**ตัวอย่าง 3.35** จงแยกตัวประกอบของ $(x-5)^3 + (x+7)^3$

**วิธีทำ** $(x-5)^3 + (x+7)^3 = \left[(x-5) + (x+7)\right]\left[(x-5)^2 - (x-5)(3x+7) + (x+7)^2\right]$

$$= \left[(x-5+x+7)\right]\left[(x-5)^2 - (x-5)(x+7) + (x+7)^2\right]$$

$$= (2x+2)\left[(x^2 - 10x + 5^2) - (x^2 + 2x - 35) + (x^2 + 14x + 7^2)\right]$$

$$= (2x+2)\left[(x^2 - 10x + 25) - (x^2 + 2x - 35) + (x^2 + 14x + 49)\right]$$

$$= (2x+2)\left[x^2 - 10x + 25 - x^2 - 2x + 35 + x^2 + 14x + 49\right]$$

$$= (2x+2)\left[x^2 - x^2 + x^2 - 10x - 2x + 14x + 25 + 35 + 49\right]$$

$$= (2x+2)(x^2 + 2x + 109)$$

$$= 2(x+1)(x^2 + 2x + 109)$$

**ดังนั้น** $(x-5)^3 + (x+7)^3 = 2(x+1)(x^2 + 2x + 109)$

**ตัวอย่าง 3.36** จงแยกตัวประกอบของ $8x^3 + 125$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $125 = 5^3$ และ $8x^3 = (2x)^3$

จะได้ $8x^3 + 125 = (2x)^3 + 5^3$

$$= (2x+5)\left[(2x)^2 - (2x)(5) + 5^2\right]$$
$$= (2x+5)(4x^2 - 10x + 25)$$

**ดังนั้น** $8x^3 + 125 = (2x+5)(4x^2 - 10x + 25)$

**ตัวอย่าง 3.37** จงแยกตัวประกอบของ $10\sqrt{10}x^3 - 216$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $216 = 6^3$ และ $10\sqrt{10}x^3 = (\sqrt{10}x)^3$

จะได้ $10\sqrt{10}x^3 - 216 = (\sqrt{10}x)^3 - 6^3$

$$= (\sqrt{10}x - 6)\left[(\sqrt{10}x)^2 + (\sqrt{10}x)(6) + 6^2\right]$$
$$= (\sqrt{10}x - 6)\left[(10x)^2 + 6\sqrt{10}x + 36\right]$$

**ดังนั้น** $10\sqrt{10}x^3 - 216 = (\sqrt{10}x - 6)\left[(10x)^2 + 6\sqrt{10}x + 36\right]$

**ตัวอย่าง 3.38** จงแยกตัวประกอบของ $10\sqrt{10}x^3 + 216$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $216 = 6^3$ และ $10\sqrt{10}x^3 = (\sqrt{10}x)^3$

จะได้ $10\sqrt{10}x^3 + 216 = (\sqrt{10}x)^3 + 6^3$

$$= (\sqrt{10}x + 6)\left[(\sqrt{10}x)^2 - (\sqrt{10}x)(6) + 6^2\right]$$
$$= (\sqrt{10}x + 6)\left[(10x)^2 - 6\sqrt{10}x + 36\right]$$

**ดังนั้น** $10\sqrt{10}x^3 + 216 = (\sqrt{10}x + 6)\left[(10x)^2 - 6\sqrt{10}x + 36\right]$

**2). การแยกตัวประกอบกำลังสามของผลบวก และกำลังสามของผลต่าง** สำหรับการแยกตัวประกอบพหุนามที่อยู่ในรูปแบบกำลังสามของผลบวก และกำลังสามของผลต่าง ก็เป็นการแยกตัวประกอบที่มีรูปแบบเฉพาะเช่นกัน และสามารถแยกตัวประกอบได้ โดยใช้สูตรการแยกตัวประกอบกำลังสามของผลบวก และกำลังสามของผลต่าง โดยอาศัยจากการแยกตัวประกอบดังต่อไปนี้ (กมล เอกไทยเจริญ, 2552 : 284)

$$
\begin{aligned}
(A+B)^3 &= (A+B)(A+B)^2 \\
&= (A+B)(A^2+2AB+B^2) \\
&= A(A^2+2AB+B^2)+B(A^2+2AB+B^2) \\
&= A^3+2A^2B+AB^2+A^2B+2AB^2+B^3 \\
&= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3
\end{aligned}
$$

ดังนั้น พหุนามระดับขั้นสามที่อยู่ในรูปแบบ $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ สามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 = (A+B)^3 = (A+B)(A+B)(A+B)$$

เรียก $(A+B)^3$ ว่า กำลังสามของผลบวก

และในทำนองเดียวกันกำลังสามของผลต่างจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(A-B)^3 &= (A-B)(A-B)^2 \\
&= (A-B)(A^2-2AB+B^2) \\
&= A(A^2-2AB+B^2)-B(A^2-2AB+B^2) \\
&= A^3-2A^2B+AB^2-A^2B+2AB^2-B^3 \\
&= A^3-3A^2B+3AB^2-B^3
\end{aligned}
$$

ดังนั้น พหุนามระดับขั้นสามที่อยู่ในรูปแบบ $A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$ สามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$A^3-3A^2B+3AB^2-B^3 = (A-B)^3 = (A-B)(A-B)(A-B)$$

เรียก $(A-B)^3$ ว่า กำลังสามของผลต่าง

**ตัวอย่าง 2.43** จงแยกตัวประกอบของ $x^3+3\sqrt{2}x^2+6x+2\sqrt{2}$

**วิธีทำ** เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
x^3+3\sqrt{2}x^2+6x+2\sqrt{2} &= x^3+3\sqrt{2}x^2+3(2)x+(\sqrt{2})^3 \\
&= x^3+3\sqrt{2}x^2+3x(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3 \\
&= (x+\sqrt{2})^3 \\
&= (x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

**ดังนั้น** $x^3+12x^2+48x+64 = (x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

**ตัวอย่าง 3.39** จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

**วิธีทำ** เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= x^3 - 3(2)x^2 + 3(4)x - 2^3 \\
&= x^3 - 3(2)x^2 + 3x(2^2) - 2^3 \\
&= (x-2)^3 \\
&= (x-2)(x-2)(x-2)
\end{aligned}
$$

**ดังนั้น** $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)(x-2)(x-2)$

**ตัวอย่าง 3.40** จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

**วิธีทำ** เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
x^3 - 12x^2 + 48x - 64 &= x^3 - 3(4)x^2 + 3(16)x - 4^3 \\
&= x^3 - 3(4)x^2 + 3x(4^2) - 4^3 \\
&= (x-4)^3 \\
&= (x-4)(x-4)(x-4)
\end{aligned}
$$

**ดังนั้น** $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = (x-4)(x-4)(x-4)$

**ตัวอย่าง 3.41** จงแยกตัวประกอบของ $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

**วิธีทำ** เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 &= (3x)^3 - 3(18)x^2 + 3(12)x - 2^3 \\
&= (3x)^3 - 3(2)(9)x^2 + 3(3)(4)x - 2^3 \\
&= (3x)^3 - 3(2)(3^2)x^2 + 3(4)(3x) - 2^3 \\
&= (3x)^3 - 3(2)(3x)^2 + 3(3x)2^3 - 2^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (3x-2)^3 \\
&= (3x-2)(3x-2)(3x-2)
\end{aligned}
$$

**ดังนั้น** $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = (3x-2)(3x-2)(3x-2)$

**ตัวอย่าง 3.42** จงแยกตัวประกอบของ $x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2}$

**วิธีทำ** เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2} &= x^3-3\sqrt{2}x^2+3(2)x-(\sqrt{2})^3\\ &= x^3-3\sqrt{2}x^2+3x(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^3\\ &= (x-\sqrt{2})^3\\ &= (x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\end{aligned}$$

**ดังนั้น** $x^3-12x^2+48x-64=(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

### 3.2.3 การแยกตัวประกอบของพหุนามระดับขั้นสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามระดับขั้นสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม โดยได้ตัวประกอบที่เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มเช่นกัน การแยกตัวประกอบดังกล่าว บางครั้งจำเป็นต้องใช้สูตรการแยกตัวประกอบต่าง ๆ ที่ได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา เช่น ผลต่างกำลังสอง การทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ผลบวกของกำลังสาม ผลต่างของกำลังสาม กำลังสามของผลบวก หรือกำลังสามของผลต่าง ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (กมล เอกไทยเจริญ, 2552 : 289-293)

**ตัวอย่าง 3.43** จงแยกตัวประกอบของ $8x^3+36x^2+54x+91$

**วิธีทำ** เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}8x^3+36x^2+54x+91 &= (2x)^3+3(12)x^2+3(18)x+91\\ &= (2x)^3+3(3)(4)x^2+3(9)(2)x+91\\ &= (2x)^3+3(3)(2x)^2+3(2x)(3^2)+3^3+91-3^3\\ &= \left[(2x)^3+3(3)(2x)^2+3(2x)(3^2)+3^3\right]+91-27\\ &= (2x+3)^3+91-27\\ &= (2x+3)^3+64\\ &= (2x+3)^3+4^3\\ &= \left[(2x+3)+4\right]\left[(2x+3)^2-4(2x+3)+16\right]\\ &= (2x+7)\left[(4x^2+12x+9)-(8x+12)+16\right]\\ &= (2x+7)(4x^2+12x+9-8x-12+16)\\ &= (2x+7)(4x^2+4x+13)\end{aligned}$$

**ดังนั้น** $8x^3+36x^2+54x+91=(2x+7)(4x^2+4x+13)$

**ตัวอย่าง 3.44** จงแยกตัวประกอบของ $81x^4-625$

**วิธีทำ** เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}81x^4-625&=(9x^2)^2-25^2\\&=(9x^2-25)(9x^2+25)\\&=(9x^2-5^2)(9x^2+25)\\&=\left[(3x)^2-5^2\right](9x^2+25)\\&=\left[(3x-5)(3x+5)\right](9x^2+25)\\&=(3x-5)(3x+5)(9x^2+25)\end{aligned}$$

**ดังนั้น** $81x^4-625=(3x-5)(3x+5)(9x^2+25)$

**ตัวอย่าง 3.45** จงแยกตัวประกอบของ $x^4+324$

**วิธีทำ** เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}x^4+324&=(x^2)^2+18^2\\&=\left[(x^2)^2+2(18)x^2+18^2\right]-2(18)x^2\\&=(x^2+18)^2-2(18)x^2\\&=(x^2+18)^2-36x^2\\&=(x^2+18)^2-(6x)^2\\&=\left[(x^2+18)-6x\right]\left[(x^2+18)+6x\right]\\&=(x^2-6x+18)(x^2+6x+18)\end{aligned}$$

**ดังนั้น** $x^4+324=(x^2-6x+18)(x^2+6x+18)$

**ตัวอย่าง 3.46** จงแยกตัวประกอบของ $x^6-729$

**วิธีทำ** เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
x^6 - 729 &= (x^3)^2 - (3^3)^2 \\
&= (x^3 - 3^3)(x^3 + 3^3) \\
&= \Big[(x-3)(x^2+6x+9)\Big]\Big[(x+3)(x^2-6x+9)\Big] \\
&= (x-3)(x+3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)
\end{aligned}
$$

**ดังนั้น** $x^6 - 729 = (x-3)(x+3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

การแยกตัวประกอบพหุนามระดับขั้นสองกว่าสองบางพหุนามสามารถทำได้โดยการใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการสลับที่ และสมบัติการแจกแจง รวมถึงการใช้สูตรการแยกตัวประกอบที่กล่าวไปแล้ว เช่น ผลต่างของกำลังสอง ผลบวกของกำลังสาม และผลต่างของกำลังสาม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.47** จงแยกตัวประกอบของ $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$

**วิธีทำ** เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x &= (x^4 - 3x^3) - (4x^2 - 12x) \\
&= x^3(x-3) - 4x(x-3) \\
&= (x^3 - 4x)(x-3) \\
&= x(x^2 - 2^2)(x-3) \\
&= x(x-2)(x+2)(x-3)
\end{aligned}
$$

**ดังนั้น** $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = x(x-2)(x+2)(x-3)$

### 3.2.4 การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

สำหรับการแยกตัวประกอบพหุนามที่โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือนั้นเนื้อหาที่จะกล่าวในเอกสารฉบับนี้นั้นคือพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์เป็นจำนวนเต็ม และตัวประกอบที่ได้จะเป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์เป็นจำนวนเต็มด้วยเช่นกัน ดังนั้นก่อนที่เราจะไปศึกษาการแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือนั้นจะขอกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้ (รณชัย มาเจริญทรัพย์, 2551 : 135)

**ทฤษฎีบท 3.1** (ทฤษฎีบทเศษเหลือ)

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนามที่ $n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_0, a_1, \cdots, a_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a_n \neq 0$ ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x-c$ เมื่อ $c$ เป็นจำนวนจริง จะเหลือเศษเท่ากับ $P(c)$

**ทฤษฎีบท 3.2** (ทฤษฎีบทตัวประกอบ)

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนามที่ $n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_0, a_1, \cdots, a_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a_n \neq 0$ พหุนาม $P(x)$ จะมี $x-c$ เป็นตัวประกอบก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างจากทฤษฎีบท 3.1 ทฤษฎีบทเศษเหลือและทฤษฎีบท 3.2 ทฤษฎีบทตัวประกอบเพื่อให้ผู้ศึกษาได้เข้าใจมากยิ่งขึ้นดังต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.48** กำหนดพหุนาม $P(x) = x^2 + 3x - 1$ พิจารณาเศษเหลือที่ได้จากการหารด้วย $x-2$ ดังต่อไปนี้

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 5 \\
\cline{2-2}
x-2 & x^2 + 3x - 1 \\
 & x^2 - 2x \\
 & \quad\;\; 5x - 1 \\
 & \quad\;\; 5x - 10 \\
 & \qquad\quad\;\; 9
\end{array}
$$

จากการตั้งหารพหุนามจะเห็นว่า $9$ เป็นเศษจากการหาร $x^2 + 3x - 1$ ด้วย $x-2$ แต่ถ้าใช้ทฤษฎีบท 3.1 สามารถทำได้ดังนี้

จาก $\quad P(x) = x^2 + 3x - 1$

$$
\begin{aligned}
P(2) &= 2^2 + 3(2) - 1 \\
&= 4 + 6 - 1 \\
&= 9
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $P(2) = 9$

**ดังนั้น** $9$ เป็นเศษจากการหาร $x^2 + 3x - 1$ ด้วย $x-2$

**ตัวอย่าง 3.49** กำหนดพหุนาม $P(x) = x^2 + 2x - 15$ พิจารณาเศษเหลือที่ได้จากการหารด้วย $x-3$ ดังต่อไปนี้

$$
\begin{array}{r}
x+5 \\
x-3\overline{)x^2+2x-15} \\
x^2-3x \phantom{-15} \\
5x-15 \\
5x-15 \\
0
\end{array}
$$

จากการตั้งหารพหุนามจะเห็นว่า $0$ เป็นเศษจากการหาร $x^2+2x-15$ ด้วย $x-3$ แต่ถ้าใช้ทฤษฎีบท 3.1 สามารถทำได้ดังนี้

จาก $P(x)=x^2+2x-15$

$$
\begin{aligned}
P(3) &= 3^2+2(3)-15 \\
&= 9+6-15 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $P(3)=0$

จากทฤษฎีบท 3.2 ทำให้ได้ว่า $x-3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $x^2+2x-15$

**ตัวอย่าง 3.50** จงแสดงว่าพหุนาม $x+2$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)=x^3+3x^2-10x-24$ หรือไม่

**วิธีทำ** เนื่องจาก $x+2=x-(-2)$

และ $P(x)=x^3+3x^2-10x-24$

พิจารณา $P(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-10(-2)-24$

$=-8+12+20-24$

$=0$

นั่นคือ $P(-2)=0$

**ดังนั้น** $x+2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของพหุนาม $P(x)=x^3+3x^2-10x-24$

**ตัวอย่าง 3.51** จงแสดงว่าพหุนาม $x+3$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)=x^3+3x^2-10x-24$ หรือไม่

**วิธีทำ** ตรวจสอบ $x+3$

จาก $P(x)=x^3+3x^2-10x-24$

พิจารณา $P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-10(-3)-24$

$$P(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 10(-3) - 24$$
$$= -27 + 27 + 30 - 24$$
$$= 6$$

นั่นคือ $P(-3) \neq 0$

**ดังนั้น** $x+3$ ไม่เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

เมื่อเข้าใจทฤษฎีบทเศษเหลือและทฤษฎีบทแยกตัวประกอบแล้วเราสามารถนำทั้งสองทฤษฎีบทมาช่วยในการแยกตัวประกอบได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.52** จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ แยกตัวประกอบของ $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

**วิธีทำ** ให้ $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

จะได้
$$P(-2) = (-2)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24$$
$$= -8 - 5(4) + 4 + 24$$
$$= -8 - 20 + 4 + 24$$
$$= 0$$

เนื่องจาก $P(-2) = 0$ นั่นคือ $x - (-2) = x + 2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$ นำ $x+2$ ไปหาร $P(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 7x + 12 \\ \hline
x+2 & x^3 - 5x^2 - 2x + 24 \\
 & x^3 + 2x^2 \\
 & \quad -7x^2 - 2x \\
 & \quad -7x^2 - 14x \\
 & \qquad\qquad 12x + 24 \\
 & \qquad\qquad 12x + 24 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{0}
\end{array}$$

จากการตั้งหารจะได้ว่า

$$P(x) = (x+2)(x^2 - 7x + 12)$$
$$= (x+2)(x-3)(x-4)$$

**ดังนั้น** $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x+2)(x-3)(x-4)$

**ตัวอย่าง 3.53** จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ แยกตัวประกอบของ $x^3 - 19x - 30$

**วิธีทำ** ให้ $P(x) = x^3 - 19x - 30$

จะได้
$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^3 - 19(-2) - 30 \\ &= -8 + 38 - 30 \\ &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $P(-2) = 0$ นั่นคือ $x - (-2) = x + 2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$ นำ $x+2$ ไปหาร $P(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$$\begin{array}{r@{}l} & \phantom{x^3 - 0}x^2 - 2x - 15 \\ x+2 \big) & \overline{x^3 - 0x^2 - 19x - 30} \\ & x^3 + 2x^2 \\ & \quad -2x^2 - 19x \\ & \quad -2x^2 - \phantom{1}4x \\ & \qquad\quad -15x - 30 \\ & \qquad\quad -15x - 30 \\ & \qquad\qquad\qquad \underline{0} \end{array}$$

จากการตั้งหารจะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+2)(x^2 - 2x - 15) \\ &= (x+2)(x+3)(x-5) \end{aligned}$$

**ดังนั้น** $x^3 - 19x - 30 = (x+2)(x+3)(x-5)$

จากตัวอย่างการแยกตัวประกอบพหุนามโดยทฤษฎีบทเศษเหลือนั้นการจะหาค่า $a$ ที่ทำให้ $P(a) = 0$ นั้นไม่ง่าย โดยเราต้องใช้การสุ่มหาค่าไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้แต่บางครั้งเราไม่สามารถรู้ได้เลยว่าจะมีค่า $a$ ที่ทำให้ $P(a)$ เป็นศูนย์หรือไม่ดังนั้นจึงต้องอาศัยทฤษฎีบทดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.3**

กำหนด $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนามที่

$n$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $a_0, a_1, \cdots, a_n$ เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $r$ เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $P(r) = 0$ แล้ว $r$ จะหาร $a_0$ ลงตัว

จากทฤษฎีบท 3.3 ทำให้เราสามารถตีกรอบขอบเขตของจำนวนเต็ม $a$ ซึ่งอาจทำให้ $P(a) = 0$ ได้แคบลง กล่าวคือ ให้พิจารณาเฉพาะจำนวนเต็มที่หารพจน์ค่าคงตัวของ $P(x)$ ลงตัวเท่านั้น ตัวอย่างเช่น

กำหนด $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$

จำนวนเต็มที่หารค่าคงตัว $6$ ได้แก่ $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$

ดังนั้นจำนวนเต็ม $a$ ที่อาจจะทำให้ $P(a) = 0$ ให้พิจารณาจากจำนวนเต็มแปดจำนวนดังกล่าวซึ่งตรวจสอบได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{array}{ll}
P(1) = 0 & P(-1) = 200 \\
P(2) = 8 & P(-2) = 36 \\
P(3) = 36 & P(-3) = 48 \\
P(6) = 300 & P(-6) = 0
\end{array}
$$

จะได้ว่า จำนวน $a$ ที่ทำให้ $P(a) = 0$ มีสองจำนวนคือ $1$ และ $-6$

และประโยชน์อีกอย่างหนึ่งของทฤษฎีบทเศษเหลือ คือ การแสดงว่าพหุนามบางพหุนามไม่สามารถแยกตัวประกอบออกเป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มได้ ตัวอย่างเช่น

$$P(x) = x^2 - 2x - 1$$

จำนวนที่หาร $1$ ลงตัวได้แก่ $1$ และ $-1$

จากการนำจำนวนเต็มเหล่านี้ไปแทน $x$ ใน $P(x)$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(1) &= 1^2 - 2(1) - 1 = -2 \neq 0 \\
P(-1) &= (-1)^2 - 2(-1) - 1 = 2 \neq 0
\end{aligned}
$$

แสดงว่า $x^2 - 2x - 1$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบเป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มได้

**ตัวอย่าง 3.54** จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือแยกตัวประกอบของ $x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 129x - 180$

**วิธีทำ** ให้ $P(x) = x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 129x - 180$

จะได้ $P(3) = (3)^4 - 5(3)^3 - 17(3)^2 + 129(3) - 180 = 0$

เนื่องจาก $P(3) = 0$ นั่นคือ $x - 3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

นำ $x - 3$ ไปหาร $P(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$P(x) = (x-3)(x^3 - 2x^2 - 23x + 60)$

ให้ $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 23x + 60$

จะได้ $Q(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 23(3) + 60 = 0$

เนื่องจาก $Q(3) = 0$ นั่นคือ $x-3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(x)$

นำ $x-3$ ไปหาร $Q(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$Q(x) = (x-3)(x^2 - x - 20)$

จะได้ว่า $P(x) = (x-3)(x-3)(x^2 - x - 20) = (x-3)(x-3)(x-5)(x+4)$

**ดังนั้น** $x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 129x - 180 = (x-3)(x-3)(x-5)(x+4$

**ตัวอย่าง 3.55** จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือแยกตัวประกอบของ $x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 24$

**วิธีทำ** ให้ $P(x) = x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 24$

จะได้ $P(1) = 1^5 + 3(1)^4 - 11(1)^3 - 27(1)^2 + 10(1) + 24 = 0$

เนื่องจาก $P(1) = 0$ นั่นคือ $x-1$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

นำ $x-1$ ไปหาร $P(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$P(x) = (x-1)(x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 34x - 24)$

ให้ $Q(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 34x - 24$

จะได้ $Q(-1) = (-1)^4 + 4(-1)^3 - 7(-1)^2 - 34(-1) - 24 = 0$

เนื่องจาก $Q(-1) = 0$ นั่นคือ $x-(-1) = x+1$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(x)$

นำ $x+1$ ไปหาร $Q(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$Q(x) = (x+1)(x^3 + 3x^2 - 10x - 24)$

ให้ $R(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

จะได้ $R(3) = 3^3 + 3(3)^2 - 10(3) - 24 = 0$

เนื่องจาก $R(3) = 0$ นั่นคือ $x-3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $R(x)$

นำ $x-3$ ไปหาร $R(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$R(x) = (x-3)(x^2 + 6x + 8)$

จาก $P(x) = (x-1)Q(x)$

และ $Q(x) = (x+1)R(x)$

$R(x) = (x-3)(x^2+6x+8)$

จะได้ว่า $P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x^2+6x+8)$

$= (x-1)(x+1)(x-3)(x+4)(x+2)$

**ดังนั้น** $x^5+3x^4-11x^3-27x^2+10x+24 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+4)(x+2)$

# แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1.1. $4a^3b-8a^2b^2+4ab$

1.2. $4a^2+12a+10a+30$

1.3. $27a^3-8$

1.4. $4a^2-25b^2$

1.5. $3a^3b^3-48ab$

1.6. $x^2+2x+1$

1.7. $64a^3+1$

1.8. $x^4+x^2+25$

1.9. $a^2+2ab+b^2-a-b$

1.10. $12x^4-16x^3-4x^2$

1.11. $8a^3b-6a^2b^2+4ab^3$

1.12. $6a^2+10a-3a-5$

1.13. $10x^2-80x-2x+16$

1.14. $3a^3-6a^2+15a$

1.15. $a^3-b^3$

1.16. $a^3+27$

1.17. $2ab-ac=2db-3dc$

1.18. $x^2-2xy+y^2-x+y$

2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้โดยใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

2.1. $x^2+4x+1$

2.2 $x^2+3x+1$

2.3. $x^2+2x-7$

2.4. $w^2+w-3$

2.5. $x^2-16x+24$

2.6. $x^2-5x+5$

2.7. $p^2-8p-5$

2.8. $x^2-9x+9$

2.9. $x^2+40x+391$

2.10. $x^2+15x-874$

3. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

3.1. $x^4 - 1$

3.2. $x^4 - 81$

3.3. $625x^4 - 1$

3.4. $256y^4 - 16$

3.5. $x^4 + x^2 + 1$

3.6. $x^4 + x^2 + 1$

3.7. $x^4 - 4x^2 + 36$

3.8. $y^4 - 11y^2 + 49$

3.9. $x^4 + 324$

3.10. $y^4 + 1024$

3.11. $64x^4 + 1$

3.12. $4z^4 + 625$

3.13. $x^6 - 1$

3.14. $x^6 + 64$

3.15. $y^6 + 1$

3.16. $512x^6 - 27y^6$

4. จงแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้

4.1 $x^2 - 3x + 10$

4.2 $2x^2 - x + 6$

4.3 $x^2 - 2x$

4.4 $x^2 - 3$

4.5 $x^2 + 4$

4.6 $x^2 - 5x + 6$

4.7 $(x+7)^2 - 8$

4.8 $3 - (x+1)^2$

4.9 $(x+1)^2 - (x-3)^2$

4.10 $(x+1)^3 - (x-3)^3$

4.11 $(x-2)^3 + (x+1)^3$

4.12 $(x+1)^4 - (x-2)^4$

4.13 $x^4 - x^2 + 2x - 1$

4.14 $x^6 - x^3$

4.15 $x^3 - 125$

4.16 $x^3 + 2x^2 - 2x - 4$

4.17 $x^4 - 49$

4.18 $x^4 - 34x^2 + 225$

5. จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

5.1. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $8x^2 - 50$

ก. $(2x + 2\sqrt{5})(2x - 2\sqrt{5})$

ข. $(2x+5\sqrt{2})(2x-5\sqrt{2})$

ค. $(2\sqrt{2x}+2\sqrt{5})(2\sqrt{2x}-2\sqrt{5})$

ง. $(2\sqrt{2x}+5\sqrt{2})(2\sqrt{2x}-5\sqrt{2})$

5.2. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $5x^4+4x-2$

ก. $(5x+2+\sqrt{6})(x+2-\sqrt{6})$

ข. $(5x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$

ค. $5(x+\dfrac{2+\sqrt{14}}{5})5(x+\dfrac{2-\sqrt{14}}{5})$

ง. $5(x-\dfrac{2+\sqrt{14}}{5})5(x-\dfrac{2-\sqrt{14}}{5})$

5.3. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $27x^3-8$

ก. $(3x+2)(3x^2-6x-4)$

ข. $(3x-2)(3x^2+6x+4)$

ค. $(3x+2)(21x^2+6x+4)$

ง. $2(3x-1)(31x^2-14x+4)$

5.4. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $125x^3+(x-2)^3$

ก. $2(3x+1)(21x^2+6x+4)$

ข. $2(2x+1)(31x^2-14x+4)$

ค. $2(3x+1)(21x^2+6x+4)$

ง. $2(3x-1)(31x^2-14x+4)$

5.5. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $(2x+1)^3+(y-7)^3$

ก. $(2x-y+8)(4x^2+y^2+2xy-10x-13y+43)$

ข. $(2x-y+8)(4x^2+y^2-2xy+18x-15y+57)$

ค. $(2x+y-6)(4x^2+y^2+2xy-10x-13y+43)$

ง. $(2x+y-6)(4x^2+y^2-2xy+18x-15y+57)$

5.6. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $4x^4+11x^2+25$

ก. $(2x^2-2x+5)(2x^2+2x+5)$

ข. $(2x^2-3x+5)(2x^2+3x+5)$

ค. $(2x^2-2x-5)(2x^2+2x-5)$

ง. $(2x^2-3x+5)(2x^2+3x-5)$

5.7. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $2500x^4+1$

ก. $(50x^2+5x+1)(50x^2-5x+1)$

ข. $(50x^2+5x-1)(50x^2-5x-1)$

ค. $(50x^2+10x+1)(50x^2-10x+1)$

ง. $(50x^2+10x-1)(50x^2-10x-1)$

5.8. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $(x-3)^6-(x+1)^6$

ก. $8(x+1)(3x^2-6x+7)(x^2-2x+13)$

ข. $8(x-1)(3x^2-6x+7)(x^2-2x+13)$

ค. $-8(x+1)(3x^2-6x+7)(x^2-2x+13)$

ง. $-8(x-1)(3x^2-6x+7)(x^2-2x+13)$

5.9. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $8x^3-10x^2-15x+27$

ก. $(2x+9)(4x^2-x+3)$

ข. $(2x+9)(4x^2+x+3)$

ค. $(2x+3)(4x^2-x+9)$

ง. $(2x+3)(4x^2+x+9)$

5.10. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $9x^2-4y^2+20y-25$

ก. $(3x-2y-5)(3x+2y+5)$

ข. $(3x-2y+5)(3x+2y-5)$

ค. $(3x-4y-5)(3x+4y+5)$

ง. $(3x-4y+5)(3x+4y-5)$

(เฉลิมพงศ์ วรวรรโณทัย, วรกฤษณ์ ศุภพร, (2560), หนังสือรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 1, บริษัทเลิร์น เอ็ดดูเคชั่น จำกัด, พิมพ์ครั้งที่ 1, 5-30).

# เอกสารอ้างอิง


กมล เอกไทเจริญ. (2552). **คณิตศาสตร์ ม.3 เล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด.

แก้ว สงขาว และคณะ. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** กรุงเทพมหานคร : นานมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์.

จารุนี สูตะบุตร และคณะ. (2533). **หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ 4.** กรุงเทพมหานคร : คุรุสภาลาดพร้าว.

เฉลิมพงศ์ วรวรรโณทัย, วรกฤษณ์ ศุภพร, (2560), หนังสือรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 1, บริษัทเลิร์น เอ็ดดูเคชั่น จำกัด, พิมพ์ครั้งที่ 1, (5-30).

รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2551). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.

รศ.ดร. นพพร แหยมแสง, (2559), คณิตศาสตร์ในหลักสูตรมัธยมศึกษา 2 Mathematics in Secondary School Curriculum 2, สำนักพิมพ์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, พิมครั้งที่ 2, (328-333).

สุชิน ทำมาหากิน. (2540). **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.3.** กรุงเทพมหานคร : มิตรสัมพันธ์ กราฟฟิคอาร์ต.