บทที่ 1

เมทริกซ์

โดยทั่วไป เราสามารถพบเห็นข้อมูลหลายชนิดที่เขียนอยู่ในรูปกลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาจัดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้มากมายในชีวิตประจำวัน ตัวอย่างเช่น ร้านค้าแห่งหนึ่งซื้อผลไม้มาขาย 5 ชนิด คือ ทุเรียน เงาะ มังคุด ส้ม และลองกอง โดยราคาต้นทุนคิดเป็นต่อกิโลกรัม แสดงเป็นตารางดังนี้

ชนิดผลไม้	ทุเรียน	เงาะ	มังคุด	ส้ม	ลองกอง
ราคา/กิโลกรัม	42	23	35	50	40

ซึ่งสามารถเขียนสั้น ๆ เป็น $\begin{bmatrix} 42 & 23 & 35 & 50 & 40 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 42 \\ 23 \\ 35 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$

1.1 เมทริกซ์ (Matrix)

นิยาม 1.1 เมทริกซ์ คือ กลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาจัดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและบรรจุภายในเครื่องหมาย [ ] เขียนในรูปทั่วไป ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ หรือ } \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

อาจใช้เครื่องหมาย ( ) แทน [ ] ก็ได้ เรียก a_{ij} ว่า **สมาชิก** (Element หรือ Entry) ในแถว (Row) ที่ i และหลัก (Column) ที่ j ของเมทริกซ์ โดยที่ $i = 1,2,3,\ldots,m$ และ $j = 1,2,3,\ldots,n$ สำหรับเมทริกซ์ที่มี m แถว และ n หลัก กล่าวว่าเมทริกซ์นั้นมี**มิติ** (Dimension) หรือ **อันดับ** (Order) $m\times n$

<u>ตัวอย่าง 1.1</u> จงบอกมิติและแจกแจงสมาชิกในแต่ละเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/5 \end{bmatrix}$$

$$2)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 0.9 & \sqrt{11} & \pi \end{bmatrix}$$

$$3)\ C = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & x^3 \end{bmatrix}$$

$$4)\ D = \begin{bmatrix} \sin^2\theta & \cos\theta & \tan\theta^2 \\ 2\sin\theta & \sec\theta & \cot(2\theta) \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> 1) A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×1

และมีสมาชิกดังนี้ $a_{11}=1,\ a_{21}=0,\ a_{31}=-\dfrac{3}{5}$

2) B เป็นเมทริกซ์มิติ 1×4

และมีสมาชิกดังนี้ $b_{11}=2, b_{12}=0.9, b_{13}=\sqrt{11}, b_{14}=\pi$

3) C เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2

และมีสมาชิกดังนี้ $c_{11}=1, c_{12}=x, c_{21}=x^2, c_{22}=x^3$

4) D เป็นเมทริกซ์มิติ 2×3

และมีสมาชิกดังนี้ $d_{11}=\sin^2\theta, d_{12}=\cos\theta, d_{13}=\tan\theta^2$

$$d_{21}=2\sin\theta, d_{22}=\sec\theta, d_{23}=\cot(2\theta)$$

เมทริกซ์บางเมทริกซ์มีลักษณะพิเศษ ซึ่งจะเป็นลักษณะที่พบเจอได้บ่อยครั้ง เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงต่อไป จะสรุปชนิดของเมทริกซ์ที่สำคัญ ๆ ได้ดังนี้

1.2 การดำเนินการบนเมทริกซ์ (Matrix Operations)

1.2.1 การเท่ากัน (Equality)

เมทริกซ์ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times q}$ เท่ากัน เขียนแทนด้วย $A=B$ ก็ต่อเมื่อ A และ B มีมิติเดียวกัน ($m=p$ และ $n=q$) และ $a_{ij}=b_{ij}$ สำหรับทุกค่าของ i และ j

เมทริกซ์ B และ D มีมิติ 3×3 เท่ากัน แต่ $b_{33}\neq d_{33}$

ดังนั้น $B\neq D$

จากเมทริกซ์ A และ C ซึ่งมีมิติเท่ากับ 2×3 เท่ากัน ถ้ากำหนดให้ x ในเมทริกซ์ C มีค่าเท่ากับ 2 จะได้ว่า $A=C$

1.2.2 การบวก (ลบ) เมทริกซ์ (Addition, Subtraction)

การนำเอาสมาชิกของเมทริกซ์ซึ่งอยู่ในตำแหน่งเดียวกันของเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากันมา บวก (ลบ) กันทำให้ได้เมทริกซ์ใหม่ เช่น ถ้าให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ จะได้ $A\pm B=\left[a_{ij}\pm b_{ij}\right]_{m\times n}$ เมื่อ $i=1,2,3,\ldots,m$ และ $j=1,2,3,\ldots,n$

<u>ตัวอย่าง 1.2</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}$ จงหา $A+B$

<u>วิธีทำ</u>

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+(-1) & 2+0 & 3+3\\ 4+0 & 5+(-2) & 6+(-4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 2 & 6\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

สมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับการบวกของเมทริกซ์

ถ้า A, B และ C เป็น $m\times n$ เมทริกซ์ จะได้ว่า

1. $A+B$ เป็น $m\times n$ เมทริกซ์ (ปิดสำหรับการบวก)
2. $A+B=B+A$ (สลับที่สำหรับการบวก)
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (เปลี่ยนหมู่)
4. $A+\underline{0}=A=\underline{0}+A$ (เอกลักษณ์สำหรับการบวก)

5. $A+(-A)=\underline{0}=(-A)+A$ (ผกผันสำหรับการบวก)

6. $A+B=\underline{0}$ แล้ว $A=-B$

7. $A+B=A+C$ แล้ว $B=C$

8. $B+A=C+A$ แล้ว $B=C$

1.2.3 การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงหรือสเกลาร์ (Scalar Multiplication)

ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ c เป็นจำนวนจริงหรือสเกลาร์ แล้ว $cA=\left[ca_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $Ac=\left[a_{ij}c\right]_{m\times n}$

<u>ตัวอย่าง 1.3</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$ จงหา $2A$ และ $-A$

<u>วิธีทำ</u>

$$2A=\begin{bmatrix}2(2) & 2(3)\\2(4) & 2(0)\\2(1) & 2(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 6\\8 & 0\\2 & 2\end{bmatrix}$$

และ

$$-A=(-1)A$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & -3\\-4 & 0\\-1 & -1\end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 1.5</u> ร้านค้าแห่งหนึ่งซื้อผลไม้มาขายเพียง 5 ชนิด คือ ทุเรียน เงาะ มังคุด ส้ม และลองกอง โดยราคาต้นทุนคิดเป็นต่อกิโลกรัม แสดงเป็นตารางได้ดังนี้

ชนิดผลไม้	ทุเรียน	เงาะ	มังคุด	ส้ม	ลองกอง
ราคา/กิโลกรัม	42	23	35	50	40

ร้านค้าแห่งนี้ต้องการนำผลไม้เหล่านั้นไปขาย โดยมีความต้องการที่จะให้ได้กำไรกิโลกรัมละ 10% ของราคาผลไม้ทุกชนิด จงคำนวณหาราคาขายต่อกิโลกรัม

<u>วิธีทำ</u> นำข้อมูลในตาราง แปลงเป็นเมทริกซ์ จะได้ $\begin{bmatrix} 42 \\ 23 \\ 35 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$

เมื่อต้องการกำไรกิโลกรัมละ 10% ของราคาผลไม้ทุกชนิด จะได้ราคาขายเป็น

$$\frac{110}{100}\begin{bmatrix} 42 \\ 23 \\ 35 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46.2 \\ 25.3 \\ 38.5 \\ 55 \\ 44 \end{bmatrix}$$

นั่นคือพ่อค้าจะต้องขายทุเรียนกิโลกรัมละ 46.2 บาท เงาะกิโลกรัมละ 25.3 บาท มังคุดกิโลกรัมละ 38.5 บาท ส้มกิโลกรัมละ 55 บาท และลองกองกิโลกรัมละ 44 บาท ▲

สมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงหรือสเกลาร์

ถ้าให้ c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ A, B เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ จะได้

1. $(cd)A = c(dA)$
2. $c(A+B) = cA + cB$
3. $(c+d)A = cA + dA$
4. $(-1)A = -A$

1.2.4 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ (Matrix Multiplication)

ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ จะได้ผลคูณ $C=AB=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ โดย

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$ หรือกล่าวว่า c_{ij} คือสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์ C ซึ่งได้จากการนำสมาชิกแถวที่ i ของ A คูณกับสมาชิกในหลักที่ j ของ B เป็นคู่ไปตามลำดับ แล้วนำมาบวกกัน

ข้อสังเกต 1. ผลคูณของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B จะหาได้เมื่อจำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถว ของ B

2. เมทริกซ์ที่เป็นผลลัพธ์จะมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวของ A และจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของ B

<u>ตัวอย่าง 1.6</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ จงหา AB

<u>วิธีทำ</u> $AB=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$

โดนที่

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=(1)(1)+(-2)(1)=-1$$

$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=(1)(-1)+(-2)(2)=-5$$

$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=(0)(1)+(4)(1)=4$$

$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=(0)(-1)+(4)(2)=8$$

ดังนั้น $AB=\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 4 & 8\end{bmatrix}$

เพื่อความสะดวกในการทำความเข้าใจ ให้ดูแผนภาพต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ip}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \boxed{b_{2j}} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & & & \vdots\\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & \boxed{b_{pj}} & \cdots & b_{pn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix}$$

โดยที่ $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}$

สมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

1. AB เป็นเมทริกซ์ เมื่อ A และ B คูณกันได้ (ปิดสำหรับการคูณ)

2. $(AB)C = A(BC)$ (เปลี่ยนหมู่)

3. $A(B+C) = AB + AC$
   $(B+C)A = BA + CA$ (การแจกแจง)

4. $AI = A = IA$ (เอกลักษณ์สำหรับการคูณ)

5. AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA

ตัวอย่างเช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ และ $BA = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $AB \neq BA$

นั่นคือ AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA

สมบัติบางประการที่สำคัญในการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง และการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ ถ้า A, B, C เป็นเมทริกซ์ใด ๆ และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $\left(A^t\right)^t = A$

2. $\left(\cdots\left(\left(A^t\right)^t\right)\cdots\right)^t = \begin{cases} \square & \text{เมื่อ } \square \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \square^{\square} & \text{เมื่อ } \square \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$ (n ตัว)

3. $\left(A+B\right)^t = A^t + B^t = B^t + A^t$

4. $\left(A-B\right)^t = A^t - B^t$

5. $\left(cA\right)^t = cA^t$

6. $\left(AB\right)^t = B^t A^t$

7. ถ้า $AB = \underline{0}$ ไม่จำเป็นที่ $A = \underline{0}$ หรือ $B = \underline{0}$

8. ถ้า $AB = AC$ ไม่จำเป็นที่ $B = C$

9. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้วจะได้เมทริกซ์ยกกำลังเป็น

$$A^2 = AA, A^3 = A^2 A = AA^2, \ldots, A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ ตัว}}$$

ข้อสังเกต • ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว

1. AA^t จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร
2. $A+A^t$ จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร
3. $A-A^t$ จะเป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร

• ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์สมมาตร แล้ว

1. A^2 จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร
2. $A+B$ จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร

1.2.5 ตัวกำหนดของเมทริกซ์หรือดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

ถ้าให้ A เป็น $n\times n$ เมทริกซ์ ได้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ ดังนั้น

▷ ถ้า A เป็น 1×1 เมทริกซ์ เมื่อ $A=[a_{11}]$ จะได้ $|A|=a_{11}$

▷ ถ้า A เป็น 2×2 เมทริกซ์ เมื่อ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

จะได้ $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

<u>ตัวอย่าง 1.10</u> จงหา $\det A$ เมื่อกำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ 3 & 10 \end{matrix}$

$$= (2)(4)(1) + (-3)(2)(3) + (-4)(-1)(10)$$
$$-(3)(4)(-4) - (10)(2)(2) - (1)(-1)(-3)$$

$$= 8 - 18 + 40 + 48 - 40 - 3$$

$$= 35$$

วิธีนี้เป็นวิธีลัดในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่งถ้าไม่ทำเช่นนี้ เราต้องหา $\det A$ โดยใช้วิธีตรง (วิธีทั่วไป) ซึ่งเป็นการหาดีเทอร์มิแนนต์โดยอาศัยไมเนอร์ (Minor) และโคแฟกเตอร์ (Cofactor)

▷ การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์มิติ 4×4 ขึ้นไป ไม่มีวิธีลัด ถ้าจะหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ ต้องใช้วิธีตรงเท่านั้น นั่นคือ จำเป็นต้องทราบความหมายของคำว่าไมเนอร์และโคแฟกเตอร์ให้เข้าใจก่อน เพื่อเป็นพื้นฐานในการหาดีเทอร์มิแนนต์ ซึ่งการหาไมเนอร์และโคแฟกเตอร์จะถูกกล่าวถึงต่อไปนี้

ไมเนอร์ ของสมาชิด a_{ij} เขียนแทนด้วย M_{ij} ของเมทริกซ์จัตุรัส $n\times n$ เมื่อ $n\geq2$ คือดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ย่อยของ A ที่ตัดแถวที่ i และหลักที่ j ออกไปเช่น จาก

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ จะได้ } M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}$$

<u>ตัวอย่าง 1.12</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -6\\ 1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$ จงหา $C_{11},C_{12},C_{13},C_{23}$

<u>วิธีทำ</u>

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=(1)(-13)=-13$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix}=(-1)(5)=-5$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=(1)(2)=2$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=(-1)(4)=-4$$

▲

ดังนั้น ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส $n\times n$ เมื่อ $n\geq 2$ หมายถึง ผลรวมของการนำเอาสมาชิกแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งคูณกับโคแฟกเตอร์ในแถวนั้นหรือหลักนั้น ๆ นั่นคือ ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เมื่อ $n\geq 2$ จะได้

$$\det A=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}\,;\, i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$$

หรือ $$\det A=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}=\sum^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}\,;\, j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$$

<u>ตัวอย่าง 1.13</u> ให้ $A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 5 & -1\end{bmatrix}$ จงหา $\det A$

<u>วิธีทำ</u> เลือกใช้แถวที่ 1 จะได้ว่า

$$\det A=(-1)^{1+1}(4)\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(0)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}$$

$$=(1)(4)(-8)+(-1)(-1)(-3)+0=-35$$

หรือเลือกใช้หลักที่ 3 จะได้ว่า

$$\det A=(-1)^{1+3}(0)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}(1)\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}(-1)\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=0+(-1)(1)(21)+(1)(-1)(14)=-35$$ ▲

ข้อสังเกต เพื่อความสะดวกและรวดเร็วในการคำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ ให้เลือกแถวหรือหลักที่มีสมาชิกที่เป็นศูนย์จำนวนมาก ๆ

สมบัติบางประการที่สำคัญของดีเทอร์มิแนนต์

เมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$

1. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\det A = -2$ และ $\det B = -5$

และ $\det A \det B = (-2)(-5) = 10$

เพราะว่า $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\det(AB) = 10$

ดังนั้น $\det(AB) = \det A \det B$

2. $\det(A^t) = \det A$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

แล้ว $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

และ $\det\left(A^t\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

นั่นคือ $\det\left(A^t\right) = \det A$

3. $\det I = 1$

เช่น ให้ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det I_2 = 1$ และ $\det I_3 = 1$

$$4.\ \det\left(A^n\right) = \left(\det A\right)^n$$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -31$

เพราะว่า $A^3 = \begin{bmatrix} 13 & -7 & 23 \\ -9 & 37 & 14 \\ 13 & 90 & 42 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det\left(A^3\right) = \begin{vmatrix} 13 & -7 & 23 \\ -9 & 37 & 14 \\ 13 & 90 & 42 \end{vmatrix} = -29791$

นั่นคือ $\left(\det A\right)^3 = \left(-31\right)^3 = -29791 = \det\left(A^3\right)$

5. $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

เช่น ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$

จะได้ $\det A=-4$

และ $A^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{bmatrix}$

จะได้ $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{-4}$

นั่นคือ $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$

6. $\det(kA) = k^n \det A$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

เช่น ถ้าให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = -2$

เพราะว่า $4A = 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det(4A) = -32$

นั่นคือ $\det(4A) = -32 = 4^2(-2) = k^n \det A$

หรือถ้าให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = 29$

เพราะว่า $3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 12 & 6 & 15 \\ -9 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det(3A) = 783$

นั่นคือ $\det(3A) = 783 = 3^3(29) = k^n \det A$

7. $\det(-A) = \begin{cases} \det\square & \text{เมื่อ } \square \text{ มีมิติเป็นเลขคู่เช่น } 2\times 2 \\ -\det\square & \text{เมื่อ } \square \text{ มีมิติเป็นเลขคี่เช่น } 3\times 3 \end{cases}$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

จะได้ $\det A = (1)(4)-(2)(3) = -2$

เพราะว่า $-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

จะได้ $\det A = (-1)(-4)-(-2)(-3) = -2$

นั่นคือ $\det(-A) = \det A$

หรือถ้าให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

จะได้ $\det A = 35$

เพราะว่า $-A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -3 & -10 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

จะได้ $\det(-A) = -35$

นั่นคือ $\det(-A) = -\det A$

8. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่แถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) เป็น 0 ทั้งแถว (หรือทั้งหลัก) จะได้

$\det A = 0$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = 0$ และ $\det B = 0$

9. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีสองแถวหรือสองหลักใด ๆ ที่มีสมาชิกเท่ากัน จะได้ $\det A = 0$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จะพบว่า แถวที่ 2 และ 3 เหมือนกัน

จะได้ $\det(A) = (-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(0)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-1)(6) + 0 + (-1)(2)(3)$

$= 0$

10. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการคูณแต่ละสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง k แล้ว $\det B = k \det A$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

และ $\det B = ka_{11}a_{22} - a_{21}ka_{12} = k\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)$

นั่นคือ $|B| = k|A|$

11. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกอยู่เหนือหรือใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 ทั้งหมด $\det A$ เท่ากับผลคูณของสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = (3)(5)(7) = 105$

และ $\det B = (1)(7)(5) = 35$

12. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากเมทริกซ์ A โดยการสลับแถว (หลัก) คู่ใดคู่หนึ่ง

จะได้ $\det B = -\det A$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$$\det B = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

$$\det C = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

นั่นคือ $\det A = -\det B = -\det C$

หรือ $\det B = \det C = -\det A$

13. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากเมทริกซ์ A โดยการนำค่าคงที่ไปคูณแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) และนำไปบวกหรือลบกับอีกแถว (หลัก) หนึ่งซึ่งไม่ใช่แถว (หลัก) เดิม แล้ว $\det B = \det A$

เช่น ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ 5 & -2 & -1\end{bmatrix}$

จะได้ $\det A=(-1)^{2+1}(4)\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix}+0+(-1)^{2+3}(1)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix}$

$$=(-1)(4)(4)+(-1)(1)(-12)$$

$$=4$$

ถ้าให้ B ได้จากการคูณแถวที่ 1 ของ A ด้วย 2 แล้วบวกกับแถวที่ 3 ของ A

จะได้ $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ 7 & 2 & 5\end{bmatrix}$

และ $\det B=(-1)^{2+1}(4)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}+0+(-1)^{2+3}(1)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 2\end{vmatrix}$

$$=(-1)(4)(4)+(-1)(1)(-12)$$

$$=4$$

นั่นคือ $\det B=\det A=4$

หรือถ้าให้ C ได้จากการคูณหลักที่ 2 ของ A ด้วย -1 และบวกกับหลักที่ 1 ของ A

จะได้ $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

และ $\det C = (-1)^{2+1}(4)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{2+3}(1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$

$$= (-1)(4)(4) + (-1)(1)(-12)$$

$$= 4$$

นั่นคือ $\det C = \det A = 4$

1.2.6 เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ (Inverse of a Matrix)

เมทริกซ์ที่จะหาตัวผกผันสำหรับการคูณได้ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์นั้นต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัสและต้องมีค่าดีเทอร์มิแนนต์ไม่เท่ากันศูนย์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันสำหรับการคูณได้ แล้วจะใช้ A^{-1} เป็นสัญลักษณ์แทน เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณของ A

การหาตัวผกผันสำหรับการคูณของเมทริกซ์

- ถ้า A เป็น 1×1 เมทริกซ์ เมื่อ $A=[a_{11}]$ โดยที่ $a_{11}\neq 0$

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}}$$

- ถ้า A เป็น 2×2 เมทริกซ์ เมื่อ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $\det A\neq 0$ จะได้

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 1.14</u> ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

<u>วิธีทำ</u> จะได้ $\det A=(1)(4)-(2)(3)=-2$

นั่นคือ $A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

▲

- ถ้า A เป็น $n\times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n\geq 2$ แล้วจะหาตัวผกผันสำหรับการคูณของเมทริกซ์โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ ดังนั้น จำเป็นต้องทราบความหมายของคำว่า เมทริกซ์โคแฟกเตอร์ (Cofactor Matrix) และเมทริกซ์ผูกพัน (Adjoint Matrix) ตามลำดับ เพื่อเป็นพื้นฐานในการหาตัวผกผันสำหรับการคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

เมทริกซ์โคแฟกเตอร์

กำหนด $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ โดยที่ $n\geq 2$ และ C_{ij} แทนโคแฟกเตอร์ของ a_{ij} จะได้เมทริกซ์โคแฟกเตอร์ของ A คือ $n\times n$ เมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j คือ C_{ij} เราเรียกเมทริกซ์โคแฟกเตอร์ของ A ด้วย $cof\ A$ ดังนั้น

$$cof\ A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ผูกพัน (Adjoint Matrix)

เมทริกซ์ผูกพันของ $n \times n$ เมทริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ โดยที่ $n \geq 2$ คือ เมทริกซ์สับเปลี่ยนของ $cof\ A$ เราเขียนเมทริกซ์ผูกพันของ A ด้วย $adj\ A$ นั่นคือ

$$adj\ A = \left[cof\ A\right]^t = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 1.15 ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $adj\ A$

วิธีทำ เพราะว่า $C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-17$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=-11$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=18$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=19$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=14$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=-15$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-10$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=15$$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-14$$

ดังนั้น $adj\ A = [cof\ A]^t = \begin{bmatrix} -17 & -11 & 18 \\ 19 & 14 & -15 \\ -10 & 15 & -14 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -17 & 19 & -10 \\ -11 & 14 & 15 \\ 18 & -15 & -14 \end{bmatrix}$

สมมติให้ $A(adj\ A) = D = [d_{ij}]_{n\times n}$

โดย $d_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$

และถ้า $i = j$ แล้ว $d_{ij} = d_{ii} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \det A$

นั่นคือ สมาชิกแต่ละตัวในแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ $D = \det A$

แต่ ถ้า $i \neq j$ แล้ว $d_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = 0$

นั่นคือ สมาชิกแต่ละตัวนอกแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ $D = 0$

ดังนั้น $A(adj\ A) = D = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = (\det A)I_n$

ในทำนองเดียวกัน จะพิสูจน์ได้ว่า

$$(adj\ A)A = D = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = (\det A) I_n$$

ฉะนั้น $A(adj\ A) = (adj\ A)A = (\det A) I_n$

จะได้ว่า $\frac{1}{\det A}\left[A(adj\ A)\right] = \frac{1}{\det A}\left[(adj\ A)A\right] = I_n$

$$A\left[\frac{1}{\det A}(adj\ A)\right] = \left[\frac{1}{\det A}(adj\ A)\right]A = I_n$$

สรุปได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj\ A)$

ดังนั้น ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ และ $\det A \neq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\ A$$

สมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับตัวผกผันสำหรับการคูณ

1. $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

4. $A^{-1} = \dfrac{I}{A}$

5. $AB = AC = I$ แล้ว $B = C = A^{-1}$

6. $\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$

7. $\left(A^{m}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m}$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

นอกจากนี้ การหาตัวผกผันของเมทริกซ์จัตุรัส A ยังสามารถหาได้โดยการใช้สมบัติ $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้ ซึ่งจริง ๆ แล้ว การหาตัวผกผันของเมทริกซ์ด้วยวิธีนี้ไม่เหมาะสำหรับเมทริกซ์ที่มีมิติใหญ่

<u>ตัวอย่าง 1.17</u> ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ จาหา A^{-1}

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ เป็นผกผันของ A

ดังนั้น $AB=BA=I_2$

หรือ $AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+5c & 3b+5d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

จะได้ $a+2c=1$ (1.1)

$3a+5c=0$ (1.2)

$b+2d=0$ (1.3)

$3b+5d=1$ (1.4)

แก้ระบบสมการหาค่าของ a,b,c,d จะได้

$(1.1)\times 3$: $3a+6c=3$ (1.5)

$(1.5)-(1.2): \quad c=3$

แทน $C=3$ ใน (1.1) จะได้ $a=1-2(3)=-5$

$(1.3)\times 3: \quad 3b+6d=0$

$(1.6)-(1.4): \quad d=-1$

แทน $d=-1$ ใน (1.3) จะได้ $b=-2(-1)=2$

ฉะนั้น $A^{-1}=B=\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

1.3 การใช้ดีเทอร์มิแนนต์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

จาก**หลักเกณฑ์คราเมอร์** (Cramer's Rule) กล่าวว่าให้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้นมี n สมการ และ n ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$AX = B$$

โดยที่ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$ เป็น**เมทริกซ์สัมประสิทธิ์** (Coefficient Matrix)

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ เป็นเมทริกซ์ตัวแปร

และ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ เป็น**เมทริกซ์ค่าคงตัว**

ถ้า $\det A \neq 0$ แล้ว $AX = B$ จะมีผลเฉลยเพียงชุดเดียว

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A};\ i = 1, 2, \ldots, n$$

โดยที่ A_i คือ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของเมทริกซ์ A ด้วยสมาชิกของ B

ตัวอย่าง 1.18 จงใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ในการแก้สมการ

$$x_1 + 2x_3 = 6$$
$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$$

วิธีทำ เพราะว่า $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72$$

และ $$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152$$

และ $$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152$$

จะได้ $$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$

และ $$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

หมายเหตุ จะใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ได้ในกรณีที่ระบบสมการมี n สมการ n ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานเท่านั้น ถ้าในกรณีที่ $n \geq 4$ จะมีความยุ่งยากในการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ ดังนั้นจะใช้การกำจัดแบบเกาส์เซียน (Gaussian Elimination) และการกำจัดแบบเกาส์จอแดน (Gauss-Jordan Elimination) แทนการใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ซึ่งจะกล่าวถึงในบทถัดไป