บทที่ 3

ปริภูมิเวกเตอร์

ในบทนี้จะศึกษาปริภูมิเวกเตอร์ ปริภูมิย่อย การตรวจสอบการเป็นปริภูมิเวกเตอร์และปริภูมิย่อย การรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ การเป็นอิสระเชิงเส้นของเวกเตอร์ ทั้งยังศึกษาการแผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ ซึ่งจะนำไปสู่การหาฐานหลักและมิติของปริภูมิเวกเตอร์ในบทต่อไป โดยการนิยามปริภูมิเวกเตอร์จะเกี่ยวข้องกับฟีลด์ ซึ่งอาจจะเป็นฟีลด์ของจำนวนจริง ฟีลด์ของจำนวนเชิงซ้อน หรือฟีลด์อื่น ๆ ดังนั้น ก่อนที่จะให้นิยามปริภูมิเวกเตอร์ เราจะกล่าวถึงระบบหนึ่งที่เรียกว่า ฟีลด์ ซึ่งประกอบด้วยเซต 1 เซต และการดำเนินการบนเซต 2 ชนิด ดังรายละเอียดต่อไปนี้

โดย อาจารย์ วิชญาพร จันทะนัน

3.1 ฟีลด์ (Field)

นิยาม 3.1 กำหนดให้ F เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง ถ้ามีการดำเนินการ $\oplus$ และ $\odot$ ใน F ที่มีสมบัติต่อไปนี้ สำหรับสมาชิก a,b,c ใด ๆ ใน F

1. $a \oplus b \in F$
2. $a \oplus b = b \oplus a$
3. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
4. มีสมาชิก 0 ใน F เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a \oplus 0 = a = 0 \oplus a$ สำหรับแต่ละสมาชิก a ใน F
5. มีสมาชิกใน F เพียงตัวเดียวเท่านั้น เขียนแทนด้วย $-a$ โดยที่ $-a \oplus a = 0$ สำหรับทุกสมาชิก a ใน F

6. $a \odot b \in F$

7. $a \odot b = b \odot a$

8. $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$

9. มีสมาชิก 1 ใน F เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a \odot 1 = a = 1 \odot a$ สำหรับแต่ละสมาชิก a ใน F

10. มีสมาชิกใน a^{-1} ใน F เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a \odot a^{-1} = 1 = a^{-1} \odot a$ สำหรับทุกสมาชิก a ใน F โดยที่ $a \neq 0$

11. $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

แล้วเรียก $(F, \oplus, \odot)$ ว่าเป็น **ฟีลด์** (Field) ภายใต้การบวก $\oplus$ และการคูณ $\odot$ หรือเขียนสั้น ๆ ว่า " F เป็นฟีลด์" และสมาชิกของ F ถูกเรียกว่า **สเกลาร์** (Scalar)

นิยาม 3.2 K เรียกว่าเป็น **ฟีลด์ย่อย** (Subfield) ของ F ถ้า K เป็นเซตย่อยของ F และ K เป็นฟีลด์

ตัวอย่างเช่น สำหรับการดำเนินการบวกและคูณที่เป็นการบวกและการคูณจำนวนในระบบจำนวนจริงตามปรกติ จะได้ว่า

1) เซตของจำนวนเต็มบวก $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ ไม่เป็นฟีลด์ (เพราะไม่มีสมบัติข้อ 5)

2) เซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ ไม่เป็นฟีลด์ (เพราะไม่มีสมบัติข้อ 10)

3) เซตของจำนวนตรรกยะ $(\mathbb{Q})$ เป็นฟีลด์

4) เซตของจำนวนจริง $(\mathbb{R})$ เป็นฟีลด์

5) เซตของจำนวนเชิงซ้อน $(\mathbb{C})$ เป็นฟีลด์

นอกจากนี้ จะเห็นว่า $\mathbb{Q}$ เป็นฟีลด์ย่อยของ $\mathbb{R}$ และ $\mathbb{C}$

3.2 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector Space)

นิยาม 3.3 ให้ V เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง ซึ่งมีสมาชิกเรียก **เวกเตอร์** (Vector) พร้อมด้วยการดำเนินการ 2 ชนิด คือ การบวก $\boxed{+}$ ระหว่างสมาชิกของ V และการคูณ $\boxed{\cdot}$ ระหว่างสมาชิกของฟีลด์ F กับสมาชิกของ V เรียก V พร้อมด้วยการดำเนินการทั้งสองว่า **ปริภูมิเวกเตอร์** (Vector Space) หรือกล่าวว่า “ $\left(V,\boxed{+},\boxed{\cdot}\right)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F ” ถ้าการดำเนินการทั้งสองชนิดสอดคล้องกับสมบัติ 10 ข้อ ต่อไปนี้

สำหรับสมาชิก $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ ใด ๆ ใน V และสมาชิก a,b ใด ๆ ใน F

1. $\underline{x}\boxed{+}\underline{y}\in V$
2. $\underline{x}\boxed{+}\underline{y}=\underline{y}\boxed{+}\underline{x}$
3. $\underline{x}\boxed{+}\left(\underline{y}\boxed{+}\underline{z}\right)=\left(\underline{x}\boxed{+}\underline{y}\right)\boxed{+}\underline{z}$
4. มีสมาชิก $\underline{0}$ ใน V ซึ่ง $\underline{x}\boxed{+}\underline{0}=\underline{x}=\underline{0}\boxed{+}\underline{x}$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก $\underline{x}$ ใน V
5. สำหรับแต่ละสมาชิก $\underline{x}$ ใน V มีสมาชิกใน V เพียงตัวเดียวเท่านั้นเขียนแทนด้วย $-\underline{x}$ ที่ $\underline{x}\boxed{+}\left(-\underline{x}\right)=\underline{0}$
6. $a\boxed{\cdot}\underline{x}\in V$

7. $a\boxed{\cdot}(\underline{x}\boxed{+}\underline{y})=(a\boxed{\cdot}\underline{x})\boxed{+}(a\boxed{\cdot}\underline{y})$

8. $(a\boxed{+}b)\boxed{\cdot}\underline{x}=(a\boxed{\cdot}\underline{x})\boxed{+}(b\boxed{\cdot}\underline{x})$

9. $(a\boxed{\cdot}b)\boxed{\cdot}\underline{x}=a\boxed{\cdot}(b\boxed{\cdot}\underline{x})$

10. มีสมาชิก 1 ใน F ซึ่ง $1\boxed{\cdot}\underline{x}=\underline{x}$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก $\underline{x}$ ใน V

ข้อตกลง 1. ถ้า $(V,\boxed{+},\boxed{\cdot})$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F จะเขียนสั้น ๆ ว่า “ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F (Vector Space Over Field F)” โดยมีสมาชิกของ V เป็นเวกเตอร์ และสมาชิกในฟีลด์ F เป็นสเกลาร์ เรียก $\boxed{+}$ ว่า **การบวกเวกเตอร์** (Vector Addition) และเรียก $\boxed{\cdot}$ ว่า **การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์** (Scalar Multiplication)

2. ถ้าเขียนว่า “ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ” จะหมายถึง $(V,\boxed{+},\boxed{\cdot})$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ของจำนวนจริง (Real Vector Space)

3. ผลบวกของเวกเตอร์ $\underline{x}$ กับ $\underline{y}$ คือ $\underline{x}\boxed{+}\underline{y}$ จะเขียนแทนด้วย $\underline{x}+\underline{y}$

4. ผลคูณของเวกเตอร์ $\underline{x}$ กับสเกลาร์ a คือ $a\boxed{\cdot}\underline{x}$ จะเขียนแทนด้วย $a\underline{x}$

<u>ตัวอย่าง 3.1</u> กำหนดให้ นิยามการบวกเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ ดังนี้

สำหรับทุก ๆ $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ และ $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ใน $\mathbb{R}^3$

ให้ $\underline{x} + \underline{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

และนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ดังนี้

ให้ a เป็นสเกลาร์

$$a\underline{x} = a(x_1, x_2, x_3)$$

$$= (ax_1, ax_2, ax_3)$$

จงแสดงว่า $\mathbb{R}^3$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่าสมบัติทั้ง 10 ข้อ ในนิยาม 3.3 เป็นจริง ดังนี้

ให้ $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3), \underline{y} = (y_1, y_2, y_3), \underline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ อยู่ใน $\mathbb{R}^3$ และ a, b เป็นสเกลาร์

1. $\underline{x} + \underline{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$$

2. $$\begin{aligned}\underline{x}+\underline{y} &= (x_1, x_2, x_3)+(y_1, y_2, y_3)\\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)\\ &= (y_1+x_1, y_2+x_2, y_3+x_3)\\ &= (y_1, y_2, y_3)+(x_1, x_2, x_3)\\ &= \underline{y}+\underline{x}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\underline{x}+(\underline{y}+\underline{z}) &= (x_1, x_2, x_3)+((y_1, y_2, y_3)+(z_1, z_2, z_3))\\ &= (x_1, x_2, x_3)+(y_1+z_1, y_2+z_2, y_3+z_3)\\ &= (x_1+(y_1+z_1), x_2+(y_2+z_2), x_3+(y_3+z_3))\\ &= ((x_1+y_1)+z_1, (x_2+y_2)+z_2, (x_3+y_3)+z_3)\\ &= (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)+(x_3, y_3, z_3)\\ &= ((x_1, x_2, x_3)+(y_1, y_2, y_3))+(z_1, z_2, z_3)\\ &= (\underline{x}+\underline{y})+\underline{z}\end{aligned}$$

4. มี $\underline{0}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\underline{x}+\underline{0}&=(x_1,x_2,x_3)+(0,0,0)\\&=(x_1+0,x_2+0,x_3+0)\\&=(x_1,x_2,x_3)\\&=(0+x_1,0+x_2,0+x_3)\\&=(0,0,0)+(x_1,x_2,x_3)\\&=\underline{0}+\underline{x}\end{aligned}$$

5. จาก $a\underline{x}=(ax_1,ax_2,ax_3)$

ให้ $a=-1$ จะได้ $(-1)(\underline{x})=-\underline{x}=(-x_1,-x_2,-x_3)$

ดังนั้น $\forall\underline{x}\in\mathbb{R}^3$ จะมี $-\underline{x}\in\mathbb{R}^3$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\underline{x}+(-\underline{x})&=(x_1,x_2,x_3)+(-x_1,-x_2,-x_3)\\&=(x_1-x_1,x_2-x_2,x_3-x_3)\\&=(0,0,0)\\&=\underline{0}\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}a\underline{x}&=a(x_1,x_2,x_3)\\&=(ax_1,ax_2,ax_3)\in\mathbb{R}^3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
7.\ a\left(\underline{x}+\underline{y}\right) &= a\left(\left(x_1,x_2,x_3\right)+\left(y_1,y_2,y_3\right)\right) \\
&= a\left(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3\right) \\
&= \left(a\left(x_1+y_1\right),a\left(x_2+y_2\right),a\left(x_3+y_3\right)\right) \\
&= \left(ax_1+ay_1,ax_2+ay_2,ax_3+ay_3\right) \\
&= \left(ax_1,ax_2,ax_3\right)+\left(ay_1,ay_2,ay_3\right) \\
&= a\left(x_1,x_2,x_3\right)+a\left(y_1,y_2,y_3\right) \\
&= a\underline{x}+a\underline{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8.\ \left(a+b\right)\underline{x} &= \left(a+b\right)\left(x_1,x_2,x_3\right) \\
&= \left(\left(a+b\right)x_1,\left(a+b\right)x_2,\left(a+b\right)x_3\right) \\
&= \left(ax_1+bx_1,ax_2+bx_2,ax_3+bx_3\right) \\
&= \left(ax_1,ax_2,ax_3\right)+\left(ay_1,ay_2,ay_3\right) \\
&= a\left(x_1,x_2,x_3\right)+a\left(y_1,y_2,y_3\right) \\
&= a\underline{x}+a\underline{y}
\end{aligned}
$$

9. $(ab)\underline{x} = (ab)(x_1, x_2, x_3)$

$$= ((ab)x_1, (ab)x_2, (ab)x_3)$$

$$= (a(bx_1), a(bx_2), a(bx_3))$$

$$= a(bx_1, bx_2, bx_3)$$

$$= a(b(x_1, x_2, x_3))$$

$$= a(b\underline{x})$$

10. มี $1 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$1\underline{x} = 1(x_1, x_2, x_3)$$

$$= (1x_1, 1x_2, 1x_3)$$

$$= (x_1, x_2, x_3)$$

$$= \underline{x}$$

ดังนั้น $\mathbb{R}^3$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$

<u>ตัวอย่าง 3.2</u> ให้ $V=\{f \mid f:S\to\mathbb{R}\}$ โดย S เป็นเซตใดๆ

เมื่อนิยาม $(f+g)(x)=f(x)+g(x);\ \ \forall x\in S$

$(cf)(x)=cf(x);\qquad \forall c\in\mathbb{R}$ และ $x\in S$

และ o เป็นฟังก์ชันศูนย์ซึ่ง $o(x)=0;\ \ \forall x\in S$

จงแสดงว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่าสมบัติทั้ง 10 ข้อ ในนิยาม 3.3 เป็นจริง ดังนี้

ให้ f,g,h อยู่ใน

x อยู่ใน S

และ c,c_1,c_2 เป็นสเกลาร์

1. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$\therefore f+g\in V$

2. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$=g(x)+f(x)$

$=(g+f)(x)$

$\therefore f+g=g+f$

3. $(f+(g+h))(x)=f(x)+(g+h)(x)$

$$=f(x)+(g(x)+h(x))$$
$$=(f(x)+g(x))+h(x)$$
$$=(f+g)(x)+h(x)$$
$$=((f+g)+h)(x)$$

$\therefore f+(g+h)=(f+g)+h$

4. มี $o\in V$ ซึ่ง

$$(o+f)(x)=o(x)+f(x)$$
$$=0+f(x)$$
$$=f(x)$$
$$=f(x)+0$$
$$=f(x)+o(x)$$
$$=(f+o)(x)$$

$\therefore o+f=f=f+o$

5. จาก $(cf)(x)=cf(x)$

ให้ $c=-1$ จะได้ $(-f)(x)=-f(x)$

ดังนั้น $\forall f\in V$ จะมี $-f\in V$ ซึ่ง

$$(f+(-f))(x)=f(x)+(-f)(x)$$
$$=f(x)-f(x)$$
$$=0$$
$$=o(x)$$

$\therefore f+(-f)=o$

6. $(cf)(x)=cf(x)\in V$

7. $(c(f+g))(x)=c(f+g)(x)$

$$=c(f(x)+g(x))$$
$$=(cf)(x)+(cg)(x)$$
$$=(cf+cg)(x)$$

$\therefore c(f+g)=cf+cg$

8. $((c_1+c_2)f)(x)=(c_1+c_2)f(x)$

$$=c_1f(x)+c_2f(x)$$

$$=(c_1f)(x)+(c_2f)(x)$$

$$=(c_1f+c_2f)(x)$$

$$\therefore (c_1+c_2)f=c_1f+c_2f$$

9. $((c_1c_2)f)(x)=(c_1c_2)f(x)$

$$=c_1(c_2f(x))$$

$$=c_1(c_2f)(x)$$

$$\therefore (c_1c_2)f=c_1(c_2f)$$

10. มี $1\in\mathbb{R}$ ซึ่ง

$$(1\cdot f)(x)=1\cdot f(x)$$

$$=f(x)$$

$$\therefore 1\cdot f=f$$

ดังนั้น V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$

<u>ตัวอย่าง 3.4</u> ให้ $V \subset \mathbb{R}^2$ โดยที่ $V = \{(x,y) | x+y=2\}$ และกำหนดให้

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$
$$k(x,y)=(kx,ky)$$

จงพิจารณาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$ หรือไม่ ถ้าเป็น จงพิสูจน์ แต่ถ้าไม่เป็น จงบอกว่ามีสมบัติข้อใดบ้างที่ไม่จริง

<u>วิธีทำ</u> V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$ เพราะมีสมบัติบางข้อไม่จริง ดังนี้

ข้อ 1. เช่น $(1,1)+(2,0)=(3,1) \notin V$

ข้อ 4. เพราะ $(0,0)+(x,y)=(x,y)$ แต่ $(0,0) \notin V$

ข้อ 5. เพราะ $(2,0) \in V$ แต่ $(-2,0) \notin V$

ข้อ 6. เช่น $3(2,0)=(6,0) \notin V$

ดังนั้น จะเห็นว่าสมบัติข้อ 1, 4, 5, 6 ไม่จริง

<u>ตัวอย่าง 3.5</u> ให้ $V=\{(x,y)|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$

มีนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$
$$a(x_1,y_1)=(ax_1,y_2);\ a\in\mathbb{R}$$

จงหาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะทุก ๆ $(x,y)\in V$ จะไม่มี $(-x,-y)\in V$

เนื่องจาก $-1(x,y)=(-x,y)$

นั่นคือ ไม่มีสมบัติข้อ 5

<u>ตัวอย่าง 3.6</u> ให้ $V = \mathbb{R}^2$

มีนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$a(x_1, y_1) = (ax_1, 0);\ a \in \mathbb{R}$$

จงหาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะทุก ๆ $(x, y) \in V$

จะได้ว่า $1(x, y) = (1x, 0)$

$$= (x, 0)$$
$$\neq (x, y)$$

นั่นคือ ขาดสมบัติข้อ 10

<u>ตัวอย่าง 3.7</u> ให้ $V=\{(x,y)|x\in\mathbb{R}, y=ax+b\}$; $a,b\in\mathbb{R}$ และ $b\neq 0$

กำหนดการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ของสมาชิกใน V ตามแบบมาตรฐาน

จงแสดงว่า V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์

<u>วิธีทำ</u> V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะขาดสมบัติข้อ 1 ดังนี้

ให้ $(x_1,y_1)\in V$ จะได้ $x_1\in\mathbb{R}$ และ $y_1=ax_1+b$

และ $(x_2,y_2)\in V$ จะได้ $x_2\in\mathbb{R}$ และ $y_2=ax_2+b$

ดังนั้น $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

โดยที่ $x_1+x_2\in\mathbb{R}$

แต่ $a(x_1+x_2)+b=ax_1+ax_2+b$

$$\neq y_1+y_2$$

เพราะว่า $y_1+y_2=(ax_1+b)+(ax_2+b)$

$$=ax_1+ax_2+2b$$

ดังนั้น $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\notin V$

<u>ตัวอย่าง 3.8</u> ให้ $V = \{A | A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 2 ที่หาผกผันได้$\}$

กำหนดการบวกเวกเตอร์ $A + B = AB; \quad A \in V, B \in V$

และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ตามแบบมาตรฐานของเมทริกซ์

จงหาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะขาดสมบัติข้อ 2 ดังนี้

เนื่องจาก $A + B = AB$

และ $B + A = BA$

ซึ่ง AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA

นั่นคือ $AB \neq BA$

หรือกล่าวว่า $A + B \neq B + A$

<u>ตัวอย่าง 3.9</u> กำหนดให้ $\mathbb{Z}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม โดยมีนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณด้วยจำนวนจริงตามปรกติ จงหาว่า $\mathbb{Z}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> $\mathbb{Z}$ ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะว่า $6 \in \mathbb{Z}$ และ $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ แต่ $6\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$

นั่นคือ ขาดสมบัติข้อ 6

หมายเหตุ

1. ให้ $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) | x_1, x_2, x_3 \ldots x_n \in \mathbb{R}\}$

มีนิยามการบวกเวกเตอร์ดังนี้

สำหรับทุก ๆ และ $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ใน $\mathbb{R}^n$

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

และนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

สำหรับสเกลาร์ a

$$a\underline{x} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

จะได้ว่า $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

2. ให้ $\mathbb{R}_{m\times n}$ เป็นเซตของเมทริกซ์มิติ $m\times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง โดยนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$c\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ca_{ij}\right]_{m\times n}$$

จะได้ว่า $\mathbb{R}_{m\times n}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

3. ให้ $P_n=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n\right\}$ เป็นเซตของพหุนาม (Polynomial) ที่มีระดับขั้น (Degree) น้อยกว่าหรือเท่ากับ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_0,a_1,\ldots,a_n$ เป็นสเกลาร์ ถูกกำหนดการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

ให้ $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$

และ $q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n$ เป็นสมาชิกของ p_n

$$p(x)+q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+(a_n+b_n)x^n$$

และ ถ้า c เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

$$cp(x)=ca_0+ca_1x+\cdots+ca_{n-1}x^{n-1}+ca_nx^n$$

จะได้ว่า $p(x)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V และ c เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

1. $0\underline{x} = \underline{0}$
2. $c\underline{0} = \underline{0}$
3. ถ้า $\underline{x} + \underline{y} = \underline{x} + \underline{z}$ แล้ว $\underline{y} = \underline{z}$
4. $(-1)\underline{x} = -\underline{x}$
5. ถ้า $c\underline{x} = \underline{0}$ แล้ว $c = 0$ หรือ $\underline{x} = \underline{0}$

พิสูจน์ 1. $0\underline{x} = 0\underline{x} + \underline{0}$ สมบัติข้อ 4

$= 0\underline{x} + [0\underline{x} + (-0\underline{x})]$ สมบัติข้อ 5

$= [0\underline{x} + 0\underline{x}] + (-0\underline{x})$ สมบัติข้อ 3

$= [0 + 0]\underline{x} + (-0\underline{x})$ สมบัติข้อ 8

$= 0\underline{x} + (-0\underline{x})$ สมบัติของจำนวนเต็มศูนย์

$= \underline{0}$ สมบัติข้อ 5

2. $c\underline{0} = c\underline{0} + \underline{0}$ สมบัติข้อ 4

$= c\underline{0} + [c\underline{0} + (-c\underline{0})]$ สมบัติข้อ 5

$= [c\underline{0} + c\underline{0}] + (-c\underline{0})$ สมบัติข้อ 3

$= c[\underline{0} + \underline{0}] + (-c\underline{0})$ สมบัติข้อ 7

$= c\underline{0} + (-c\underline{0})$ สมบัติข้อ 4

$= \underline{0}$ สมบัติข้อ 5

3. กำหนดให้ $\underline{x} + \underline{y} = \underline{x} + \underline{z}$

เนื่องจาก $\underline{x} \in V$ จะมี $-\underline{x} \in V$ ที่

$$\underline{x} + (-\underline{x}) = (-\underline{x}) + \underline{x} = \underline{0}$$

แต่ $\underline{x} + y = \underline{x} + \underline{z}$

ดังนั้น $-\underline{x} + (\underline{x} + \underline{y}) = -\underline{x} + (\underline{x} + \underline{z})$

$(-\underline{x} + \underline{x}) + \underline{y} = (-\underline{x} + \underline{x}) + \underline{z}$ สมบัติข้อ 3

$\underline{0} + \underline{y} = \underline{0} + \underline{z}$ สมบัติข้อ 5

$\underline{y} = \underline{z}$ สมบัติข้อ 4

4. $(-1)\underline{x} = \underline{0} + (-1)\underline{x}$ สมบัติข้อ 4

$= (-\underline{x} + \underline{x}) + (-1)\underline{x}$ สมบัติข้อ 5

$= (-\underline{x} + 1\underline{x}) + (-1)\underline{x}$ สมบัติข้อ 10

$= -\underline{x} + (1\underline{x} + (-1)\underline{x})$ สมบัติข้อ 3

$= -\underline{x} + (1 + (-1))\underline{x}$ สมบัติข้อ 8

$= -\underline{x} + 0\underline{x}$ สมบัติของจำนวนเต็ม

$= -\underline{x} + \underline{0}$ จากข้อ 1

$= -x$ สมบัติข้อ 4

5. กำหนดให้ $c\underline{x} = \underline{0}$

ถ้า $c = 0$ จะได้ที่ตามต้องการ

ถ้า $c \neq 0$ จะมี c^{-1} ที่ $cc^{-1} = c^{-1}c = 1$

แต่ $c\underline{x} = \underline{0}$

ดังนั้น $c^{-1}(c\underline{x}) = c^{-1}\underline{0}$

$(c^{-1}c)\underline{x} = \underline{0}$ สมบัติข้อ 3 และจากข้อ 2

$1\underline{x} = \underline{0}$

$\underline{x} = \underline{0}$ สมบัติข้อ 10

3.3 ปริภูมิย่อย (Subspace)

นิยาม 3.4 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F และ S เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ V เรียก S ว่าเป็น**ปริภูมิย่อย**ของ V ก็ต่อเมื่อ S เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F

<u>ตัวอย่าง 3.10</u> กำหนดให้ $S \subset \mathbb{R}^3$ โดย $S = \{(x,y,z) | x - y + z = 0\}$ มีนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ตามตัวอย่าง 3.1 จงแสดงว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $0 - 0 + 0 = 0$

จะได้ว่า $(0,0,0) \in S$

ดังนั้น S ไม่ใช่เซตว่าง

จะแสดงว่า S เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$ โดยจะพิสูจน์ว่าสมบัติทั้ง 10 ข้อ ในนิยาม 3.3 เป็นจริงดังนี้

ให้ $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3), \underline{y} = (y_1, y_2, y_3), \underline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ อยู่ใน S

โดยที่ $x_1 - x_2 + x_3 = 0, y_1 - y_2 + y_3 = 0, z_1 - z_2 + z_3 = 0$ และ a, b เป็นสเกลาร์

1. $\underline{x} + \underline{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

จะได้ $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 - x_2 + x_3) + (y_1 - y_2 + y_3)$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

$\therefore \ \underline{x} + \underline{y} \in S$

2. $$\begin{aligned}\underline{x}+\underline{y} &= (x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)\\ &= (y_1+x_1,y_2+x_2,y_3+x_3)\\ &= (y_1,y_2,y_3)+(x_1,x_2,x_3)\\ &= \underline{y}+\underline{x}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\underline{x}+(\underline{y}+\underline{z}) &= (x_1,x_2,x_3)+((y_1,y_2,y_3)+(z_1,z_2,z_3))\\ &= (x_1,x_2,x_3)+(y_1+z_1,y_2+z_2,y_3+z_3)\\ &= (x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),x_3+(y_3+z_3))\\ &= ((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,(x_3+y_3)+z_3)\\ &= (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)+(x_3,y_3,z_3)\\ &= ((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3))+(z_1,z_2,z_3)\\ &= (\underline{x}+\underline{y})+\underline{z}\end{aligned}$$

4. มี $\underline{0}=(0,0,0)\in S$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\underline{x}+\underline{0}&=(x_1,x_2,x_3)+(0,0,0)\\&=(x_1+0,x_2+0,x_3+0)\\&=(x_1,x_2,x_3)\\&=(0+x_1,0+x_2,0+x_3)\\&=(0,0,0)+(x_1,x_2,x_3)\\&=\underline{0}+\underline{x}\end{aligned}$$

5. จาก $a\underline{x}=(ax_1,ax_2,ax_3)$

ให้ $a=-1$ จะได้ $(-1)(\underline{x})=-\underline{x}=(-x_1,-x_2,-x_3)$

ดังนั้น $\forall\underline{x}\in S$

โดยที่ $x_1-x_2+x_3=0$

จะมี $-\underline{x}\in S$

โดยที่ $-x_1-(x_2)+(-x_3)=-(x_1-x_2+x_3)=-0=0$

ซึ่ง $$\begin{aligned}\underline{x}+(-\underline{x})&=(x_1,x_2,x_3)+(-x_1,-x_2,-x_3)\\&=(x_1-x_1,x_2-x_2,x_3-x_3)\\&=(0,0,0)\\&=\underline{0}\end{aligned}$$

6. $a\underline{x} = a(x_1, x_2, x_3)$

$= (ax_1, ax_2, ax_3) \in \mathbb{R}^3$

จะได้ $ax_1 - ax_2 + ax_3 = a(x_1 - x_2 + x_3) = a0 = 0$

$\therefore\ a\underline{x} \in S$

7. $a(\underline{x} + \underline{y}) = a((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3))$

$= a(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$= (a(x_1 + y_1), a(x_2 + y_2), a(x_3 + y_3))$

$= (ax_1 + ay_1, ax_2 + ay_2, ax_3 + ay_3)$

$= (ax_1, ax_2, ax_3) + (ay_1, ay_2, ay_3)$

$= a(x_1, x_2, x_3) + a(y_1, y_2, y_3)$

$= a\underline{x} + a\underline{y}$

8. $(a+b)\underline{x} = (a+b)(x_1, x_2, x_3)$

$= ((a+b)x_1, (a+b)x_2, (a+b)x_3)$

$= (ax_1 + bx_1, ax_2 + bx_2, ax_3 + bx_3)$

$= (ax_1, ax_2, ax_3) + (bx_1, bx_2, bx_3)$

$= a(x_1, x_2, x_3) + b(x_1, x_2, x_3)$

$= a\underline{x} + b\underline{x}$

9. $(ab)\underline{x} = (ab)(x_1, x_2, x_3)$

$= ((ab)x_1, (ab)x_2, (ab)x_3)$

$= (a(bx_1), a(bx_2), a(bx_3))$

$= a(bx_1, bx_2, bx_3)$

$= a(b(x_1, x_2, x_3))$

$= a(b\underline{x})$

10. มี $1 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$1\underline{x} = 1(x_1, x_2, x_3)$

$= (1x_1, 1x_2, 1x_3)$

$= (x_1, x_2, x_3)$

$= \underline{x}$

จะได้ว่า S เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$

ฉะนั้น S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ S เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ V จะได้ว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ V ก็ต่อเมื่อ

1. ถ้า $\underline{u} \in S$ และ $\underline{v} \in S$ แล้ว $\underline{u} + \underline{v} \in S$ (S มีสมบัติปิดภายใต้การบวกเวกเตอร์)

2. ถ้า $\underline{u} \in S$ และ k เป็นสเกลาร์ แล้ว $k\underline{u} \in S$ (S มีสมบัติปิดภายใต้การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์)

<u>พิสูจน์</u> $(\rightarrow)$ ถ้า S เป็นปริภูมิย่อยของ V โดยนิยาม 3.4 จะได้ว่า S เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ดังนั้น S จะมีสมบัติครบ 10 ข้อ ในนิยาม 3.3 และใน 10 ข้อนั้นมีสมบัติปิดภายใต้การบวกเวกเตอร์และปิดภายใต้การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์อยู่ด้วย

$(\leftarrow)$ ให้ S สมบัติปิดภายใต้การบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ นั่นคือ สมบัติข้อ 1 และ 6 ในนิยาม 3.3 เป็นจริง

จะแสดงว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ V

นั่นคือ จะต้องแสดงว่าสมบัติที่เหลืออีก 8 ข้อ คือ สมบัติข้อ 2,3,4,5,7,8,9 และ 10 เป็นจริง

จะแสดงว่า S มีสมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 2,3,4,5,7,8,9 และ 10 ดังนี้

ให้ k,ℓ เป็นสเกลาร์ และ $\underline{u},\underline{v},\underline{w}\in S$

จะได้ว่า $\underline{u},\underline{v},\underline{w}\in V$ ด้วย

และเนื่องจาก V เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ดังนั้น $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$

$$\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})=(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}$$
$$k(\underline{u}+\underline{v})=k\underline{u}+k\underline{v}$$
$$(k+\ell)\underline{u}=k\underline{u}+\ell\underline{u}$$
$$(k\ell)\underline{u}=k(\ell\underline{u})$$

และ $1\underline{u}=\underline{u}$

นั่นคือ สมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 2,3,4,5,7,8,9 และ 10 เป็นจริงตามลำดับ

ถัดไปจะแสดงว่า S มีสมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 4 ดังนี้

ให้ $\underline{u} \in S$

จากข้อ 1 จะได้ $-\underline{u} + \underline{u} = 0$

ดังนั้น จะมี $\underline{0} \in S$

นั่นคือ สมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 4 เป็นจริง

และสุดท้าย จะแสดงว่า S มีสมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 5 ดังนี้

ถ้า -1 เป็นจำนวนจริง และ $\underline{u} \in S$

จากข้อ 2 จะได้ $(-1)\underline{u} \in S$

แต่ $(-1)\underline{u} = -\underline{u}$

ดังนั้น จะมี $-\underline{u} \in S$

นั่นคือ สมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 5 เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.11 กำหนดให้ (x_0, y_0) เป็นจุด ๆ หนึ่งใน $\mathbb{R}^2$ และ S เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}^2$ โดยที่ $S = \{k(x_0, y_0) | k \in \mathbb{R}\}$ จงแสดงว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $(0,0) = (0x_0, 0y_0) = 0(x_0, y_0)$ โดยที่ $0 \in \mathbb{R}$

จะได้ว่า $(0,0) \in S$

ดังนั้น S ไม่ใช่เซตว่าง

1. ถ้า $\underline{u} = k_1(x_0, y_0)$ และ $\underline{v} = k_2(x_0, y_0)$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S

จะได้ว่า $\underline{u} + \underline{v} = k_1(x_0, y_0) + k_2(x_0, y_0)$

$= (k_1 + k_2)(x_0, y_0)$ โดยที่ $k_1 + k_2 \in \mathbb{R}$

ดังนั้น $\underline{u} + \underline{v} \in S$

2. ถ้า $\underline{u} = k_1(x_0, y_0)$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S และ k เป็นสเกลาร์

จะได้ว่า $k\underline{u} = k(k_1(x_0, y_0))$

$= (kk_1)(x_0, y_0)$ โดยที่ $kk_1 \in \mathbb{R}$

ดังนั้น $k\underline{u} \in S$

สรุปได้ว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ถ้า S_1 และ S_2 เป็นปริภูมิย่อยของ V แล้ว $S_1 \cap S_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $S_1 \subset V$ และ $S_2 \subset V$

ดังนั้น $S_1 \cap S_2 \subset V$

เนื่องจาก S_1 และ S_2 เป็นปริภูมิย่อยของ V

ดังนั้น $\underline{0} \in S_1$ และ $\underline{0} \in S_2$

ฉะนั้น $\underline{0} \in S_1 \cap S_2$

นั่นคือ $S_1 \cap S_2$ ไม่ใช่เซตว่าง

1. ถ้า $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นสมาชิกของ $S_1 \cap S_2$

   จะได้ว่า $\underline{u}, \underline{v} \in S_1$ และ $\underline{u}, \underline{v} \in S_2$

   เนื่องจาก S_1 และ S_2 เป็นปริภูมิย่อยของ V

   ดังนั้น $\underline{u} + \underline{v} \in S_1$ และ $\underline{u} + \underline{v} \in S_2$

   ฉะนั้น $\underline{u} + \underline{v} \in S_1 \cap S_2$

2. ถ้า $\underline{u}$ เป็นสมาชิกของ $S_1 \cap S_2$ และ k เป็นสเกลาร์

   จะได้ว่า $\underline{u} \in S_1$ และ $\underline{u} \in S_2$

   เนื่องจาก S_1 และ S_2 เป็นปริภูมิย่อยของ V

   ดังนั้น $k\underline{u} \in S_1$ และ $k\underline{u} \in S_2$

   ฉะนั้น $k\underline{u} \in S_1 \cap S_2$

   สรุปได้ว่า $S_1 \cap S_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

3.4 การรวมเชิงเส้น (Linear Combination)

นิยาม 3.5 ให้ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V จะกล่าวว่า เวกเตอร์ $\underline{v}$ ใน V เป็น**การรวมเชิงเส้น**ของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ ก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ ที่ทำให้ $\underline{v} = a_1\underline{v}_1, a_2\underline{v}_2, \ldots, a_n\underline{v}_n$

<u>ตัวอย่าง 3.16</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^2$ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $(2,7)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,2)$ และ $(0,1)$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ $(2,7) = a_1(1,2) + a_2(0,1)$

$$= (a_1, 2a_1) + (0, a_2)$$

$$= (a_1, 2a_1 + a_2)$$

จะได้ $a_1 = 2$ (3.1)

$2a_1 + a_2 = 7$ (3.2)

แทน $a_1 = 2$ ใน (3.2) จะได้ $a_2 = 7 - 2(2) = 3$

ดังนั้น $(2,7) = 2(1,2) + 3(0,1)$

นั่นคือ $(2,7)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,2)$ และ $(0,1)$ ▲

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V และ W เป็นเซตของเวกเตอร์ใน V ที่เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ จะได้ว่า

1. W เป็นปริภูมิย่อยของ V ที่มี $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in W$
2. ถ้า U เป็นปริภูมิย่อยใด ๆ ของ V ที่มี $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ เป็นสมาชิก แล้ว $W \subset U$

   (นั่นคือ W เป็นปริภูมิย่อยของ V ที่เล็กที่สุด ที่มี $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ เป็นสมาชิก)

<u>พิสูจน์</u> 1. จะพิสูจน์ว่า $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ เป็นสมาชิกของ W และ W เป็นปริภูมิย่อยของ V

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= 1\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \ldots + 0\underline{v}_n \\ \underline{v}_2 &= 0\underline{v}_1 + 1\underline{v}_2 + \ldots + 0\underline{v}_n \\ &\vdots \\ \underline{v}_n &= 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \ldots + 1\underline{v}_n \end{aligned}$$

นั่นคือ $\underline{v}_i$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$

ดังนั้น $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ เป็นสมาชิกของ W

ถัดไป จะพิสูจน์ว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ V

ให้ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน W

โดยที่ $\underline{u} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_k\underline{v}_n$

$\underline{v} = b_1\underline{v}_1 + b_2\underline{v}_2 + \ldots + b_k\underline{v}_n$

เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ เป็นสเกลาร์

จะได้ $\underline{u} + \underline{v} = (a_1 + b_1)\underline{v}_1 + (a_2 + b_2)\underline{v}_2 + \ldots + (a_n + b_n)\underline{v}_n$

ดังนั้น $\underline{u} + \underline{v} \in W$

ให้ $\underline{u} \in W$ และ c เป็นสเกลาร์

$c\underline{u} = (ca_1)\underline{v}_1 + (ca_2)\underline{v}_2 + \ldots + (ca_n)\underline{v}_n$

ดังนั้น $c\underline{u} \in W$

นั่นคือ W เป็นปริภูมิย่อยของ V

2. ถ้า U เป็นปริภูมิย่อยใด ๆ ของ V ที่มี $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ เป็นสมาชิก

จะได้ว่า แต่ละเวกเตอร์ $\underline{v}_i = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \ldots + 1\underline{v}_i + \ldots + 0\underline{v}_n$

ฉะนั้น $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ เป็นสมาชิกของ W

ให้ U เป็นปริภูมิย่อยอื่นของ V ที่ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ เป็นสมาชิก

เนื่องจาก U มีสมบัติปิดภายใต้การบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ดังนั้น U จะมี $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_k\underline{v}_n$ ซึ่งเป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ เป็นสมาชิก

นั่นคือ สมาชิกแต่ละตัวของ W จะเป็นสมาชิกของ U

หรือกล่าวคือ $W \subset U$ ▲

3.5 การแผ่ทั่ว (Span)

นิยาม 3.6 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ เป็นเซตย่อยของเวกเตอร์ใน V จะเรียก S ว่า **แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์** (Span the Space) V ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ เวกเตอร์ใน V เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S

<u>ตัวอย่าง 3.19</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^2$ ให้ $\underline{v}_1=(1,0)$ และ $\underline{v}_2=(0,1)$ จงพิจารณาว่าเซต $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^2$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ (x,y) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^2$

ต้องการหาว่า มีสเกลาร์ a_1,a_2 ที่ทำให้ $(x,y)=a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2$ หรือไม่

หรือกล่าวคือ ต้องการหาว่า (x,y) จะเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1,\underline{v}_2$ หรือไม่

พิจารณา $(x,y)=a_1(1,0)+a_2(0,1)$

ฉะนั้น $a_1=x$ และ $a_2=y$ ซึ่งเป็นสเกลาร์

ดังนั้น $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$

นั่นคือ S แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^2$

<u>ตัวอย่าง 3.20</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ ให้ $\underline{v}_1=(1,0,0),\underline{v}_2=(0,1,0)$ และ $\underline{v}_3=(0,0,1)$ จงพิจารณาว่าเซต $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ (x,y,z) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^3$

ต้องการหาว่า มีสเกลาร์ a_1,a_2,a_3 ที่ทำให้ $(x,y,z)=a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+a_3\underline{v}_3$ หรือไม่

พิจารณา $(x,y,z)=a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)$

$$=(a_1,a_2,a_3)$$

ฉะนั้น $a_1=x,a_2=y$ และ $a_3=z$ ซึ่งเป็นสเกลาร์

ดังนั้น $(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$

นั่นคือ S แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ ▲

<u>ตัวอย่าง 3.21</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ ให้ $\underline{v}_1=(1,2,3), \underline{v}_2=(0,1,0)$ และ $\underline{v}_3=(1,0,2)$ เซต $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ (x,y,z) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^3$

ต้องการหาว่า มีสเกลาร์ a_1, a_2 และ a_3 ที่ทำให้ $(x,y,z)=a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+a_3\underline{v}_3$ หรือไม่

พิจารณา $(x,y,z)=a_1(1,2,3)+a_2(0,1,0)+a_3(1,0,2)$

$$=(a_1+a_3, 2a_1+a_2, 3a_1+2a_3)$$

จะได้ $a_1+a_3=x$ (3.12)

$2a_1+a_2=y$ (3.13)

$3a_1+2a_3=z$ (3.14)

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1, a_2, a_3 โดย

$(3.12)\times 2$: $2a_1+2a_3=2x$ (3.15)

$(3.14)-(3.15)$: $a_1=z-2x$

แทน $a_1=z-2x$ ใน (3.12) จะได้ $a_3=x-(z-2x)=3x-z$

และแทน $a_1=z-2x$ ใน (3.13) จะได้ $a_2=y-2(z-2x)=4x+y-2z$

โดยที่ a_1, a_2 และ a_3 เป็นสเกลาร์

ดังนั้น $(x,y,z)=(z-2x)(1,2,3)+(4x+y-2z)(0,1,0)+(3x-z)(1,0,2)$

นั่นคือ S แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ ▲

นิยาม 3.8 ให้ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V

และ $W = \{\underline{u} | \underline{u}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ เรียก W ว่า **ถูกแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์** $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ (space spanned by $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$) และเขียนแทนด้วย $W = span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ หรือ $W = span(S)$ เมื่อ $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$

เช่น จากตัวอย่าง 3.19 จะเห็นว่า $\mathbb{R}^2$ ถูกแผ่ทั่วโดย S

นั่นคือ $\mathbb{R}^2 = span(S)$ เมื่อ $S = \{(1,0),(0,1)\}$

จากตัวอย่าง 3.20 จะเห็นว่า $\mathbb{R}^3$ ถูกแผ่ทั่วโดย S

นั่นคือ $\mathbb{R}^3 = span(S)$ เมื่อ $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

และจากตัวอย่าง 3.21 จะเห็นว่า $\mathbb{R}^3$ ถูกแผ่ทั่วโดย S

นั่นคือ $\mathbb{R}^3 = span(S)$ เมื่อ $S = \{(1,2,3),(0,1,0),(1,0,2)\}$

ทฤษฎีบท 3.5 ถ้า S แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ $V, S \subset W$ และ $W \subset V$ แล้ว W จะแผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ V

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\underline{v} \in V$

เนื่องจาก S แผ่ทั่ว V หรือ $V = span(S)$

ดังนั้น $\underline{v}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ S

แต่เนื่องจากเวกเตอร์ทุกเวกเตอร์ใน S เป็นสมาชิกของ W

ดังนั้น $\underline{v}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ W ด้วย

ฉะนั้น จะได้ว่า W แผ่ทั่ว V หรือ $V = span(W)$

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ $S = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m\}$ และ $S' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V จะได้ว่า $span(S) = span(S')$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละเวกเตอร์ใน S เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S' และกลับกัน แต่ละเวกเตอร์ใน S' เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S

<u>พิสูจน์</u> $(\rightarrow)$ ให้ $span(S) = span(S')$

สมมติ $\underline{u}_i \in span(S);\ i = 1, 2, \ldots, m$

กล่าวคือ $\underline{u}_i$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m$

เนื่องจาก $span(S) = span(S')$

ดังนั้น $\underline{u}_i \in span(S')$

กล่าวคือ $\underline{u}_i$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$

ฉะนั้น แต่ละเวกเตอร์ใน S จะเป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S'

ในทำนองเดียวกัน แต่ละเวกเตอร์ใน S' เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S

$(\leftarrow)$ ให้แต่ละเวกเตอร์ใน S เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S'

และในทางกลับกัน แต่ละเวกเตอร์ใน S' เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S

จะพิสูจน์ว่า $span(S) = span(S')$

ให้ $\underline{x} \in span(S)$

จะได้ $\underline{x}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m$

นั่นคือ $\underline{x} = c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2 + \ldots + c_m\underline{u}_m$ โดยที่ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ เป็นสเกลาร์

และแต่ละ $\underline{u}_i$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$

จะได้ $\underline{u}_i = d_{i1}\underline{v}_1 + d_{i2}\underline{v}_2 + \ldots + d_{in}\underline{v}_n$ โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, m$

และ $d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{in}$ เป็นสเกลาร์

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\underline{x} &= c_1\left(d_{11}\underline{v}_1 + d_{12}\underline{v}_2 + \ldots + d_{1n}\underline{v}_n\right) + c_2\left(d_{21}\underline{v}_1 + d_{22}\underline{v}_2 + \ldots + d_{2n}\underline{v}_n\right) \\ &\quad + \cdots + c_m\left(d_{m1}\underline{v}_1 + d_{m2}\underline{v}_2 + \ldots + d_{mn}\underline{v}_n\right) \\ &= \left(c_1d_{11} + c_2d_{21} + \ldots + c_md_{m1}\right)\underline{v}_1 + \left(c_1d_{12} + c_2d_{22} + \ldots + c_md_{m2}\right)\underline{v}_2 \\ &\quad + \cdots + \left(c_1d_{1n} + c_2d_{2n} + \ldots + c_md_{mn}\right)\underline{v}_n\end{aligned}$$

กล่าวคือ $\underline{x}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$

นั่นคือ $\underline{x} \in span(S')$

ฉะนั้น $span(S) \subset span(S')$

ในทำนองเดียวกัน ก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า $span(S') \subset span(S)$

สรุปได้ว่า $span(S) \subset span(S')$ ▲

ทฤษฎีบท 3.7 กำหนดเวกเตอร์ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}$ ในปริภูมิเวกเตอร์ V

ถ้า $W = span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ แล้ว $W = span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}\}$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $W = span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$

จะได้ว่า ทุกเวกเตอร์ใน W เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$

สมมติ $\underline{w} \in W$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ

จะได้ $\underline{w} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \ldots + c_n\underline{v}_n$

หรือ $\underline{w} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \ldots + c_n\underline{v}_n + 0\underline{v}_{n+1}$

นั่นคือ ทุกเวกเตอร์ใน W จะเป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}$

ดังนั้น $W = span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}\}$ ▲

3.6 อิสระเชิงเส้น (Linearly Independent)

นิยาม 3.9 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V และ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นสเกลาร์

ถ้า $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+\ldots+a_n\underline{v}_n=\underline{0}$ แล้ว $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$ จะเรียก S ว่าเป็น**อิสระเชิงเส้น** (Linearly Independent)

ถ้า $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+\ldots+a_n\underline{v}_n=\underline{0}$ และ มีจำนวนเต็ม i บางตัวที่ $a_i\neq 0$ แล้วจะเรียก S ว่า**ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น** (Linearly Dependent)

<u>ตัวอย่าง 3.24</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^2$ กำหนดให้ $\underline{v}_1=(0,2)$ และ $\underline{v}_2=(2,1)$ จงพิจารณาว่าเซต $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2=\underline{0}$ โดยที่ $a_1,a_2\in\mathbb{R}$

จะได้ว่า $a_1(0,2)+a_2(2,1)=(0,0)$

$$(0,2a_1)+(2a_2,a_2)=(0,0)$$

$$(2a_2,2a_2+a_2)=(0,0)$$

นั่นคือ

$$2a_2=0 \tag{3.19}$$

$$2a_2+a_2=0 \tag{3.20}$$

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1,a_2 โดย

$(3.19)\div 2:\quad a_2=0$

แทน $a_2=0$ ใน (3.20) จะได้ $a_1=\frac{1}{2}(0-0)=0$

ดังนั้น $a_1=a_2=0$

ฉะนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น ▲

<u>ตัวอย่าง 3.25</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ กำหนดให้ $\underline{v}_1=(1,1,1), \underline{v}_2=(-1,2,-1)$ และ $\underline{v}_3=(3,0,2)$ จงพิจารณาว่าเซต $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+a_3\underline{v}_3=\underline{0}$ โดยที่ $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$

จะได้ว่า $a_1(1,1,1)+a_2(-1,2,-1)+a_3(3,0,2)=(0,0,0)$

$$(a_1-a_2+3a_3, a_1+2a_2, a_1-a_2+2a_3)=(0,0,0)$$

นั่นคือ
$$a_1-a_2+3a_3=0 \tag{3.21}$$
$$a_1+2a_2=0 \tag{3.22}$$
$$a_1-a_2+2a_3=0 \tag{3.23}$$

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1,a_2,a_3 โดย

$(3.21)-(3.23)$: $\quad a_3=0$

แทน $a_3=0$ ใน (3.21) จะได้

$$a_1-a_2=0 \tag{3.24}$$

$(3.22)-(3.24)$: $\quad 3a_2=0$ หรือ $a_2=0$

แทน $a_2=0, a_3=0$ ใน (3.21) จะได้ $a_1=0+0-3(0)=0$

ดังนั้น $a_1=a_2=a_3=0$

ฉะนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น ▲

<u>ตัวอย่าง 3.27</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ P_2 กำหนดให้ $\underline{v}_1 = x^2 + 2x + 1$, $\underline{v}_2 = x^2 - 1$ และ $\underline{v}_3 = x^2 - x$ จงพิจารณาว่าเซต $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 = \underline{0}$ โดยที่ $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

จะได้ $a_1\left(x^2 + 2x + 1\right) + a_2\left(x^2 - 1\right) + a_3\left(x^2 - x\right) = 0$

$$\left(a_1 + a_2 + a_3\right)x^2 + \left(2a_1 - a_3\right)x + \left(a_1 - a_2\right) = 0$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x จะได้

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \tag{3.28}$$

$$2a_1 - a_3 = 0 \tag{3.29}$$

$$a_1 - a_2 = 0 \tag{3.30}$$

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1, a_2, a_3 โดยที่ (3.30) จะได้

$$a_1 = a_2 \tag{3.31}$$

แทน $a_1 = a_2$ ใน (3.28) จะได้

$$2a_1 + a_3 = 0 \tag{3.32}$$

$(3.29) + (3.32)$: $\quad 4a_1 = 0$ หรือ $a_1 = 0$

แทน $a_1 = 0$ ใน (3.29) และ (3.31) จะได้ $a_3 = 0$ และ $a_1 = 0$ ตามลำดับ

นั่นคือ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

ดังนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น ▲

<u>ตัวอย่าง 3.28</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^4$ ให้ $\underline{v}_1=(1,2,5,-1), \underline{v}_2=(7,-1,5,8)$ และ $\underline{v}_3=(2,-1,0,3)$ จงพิจารณาว่าเซต $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+a_3\underline{v}_3=\underline{0}$ โดยที่ $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$

จะได้ $a_1(1,2,5,-1)+a_2(7,-1,5,8)+a_3(2,-1,0,3)=(0,0,0)$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} a_1+7a_2+2a_3&=0\\ 2a_1-a_2-a_3&=0\\ 5a_1+5a_2&=0\\ -a_1+8a_2+3a_3&=0 \end{aligned}$$

แก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์หาค่าของ a_1,a_2,a_3 โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานทำกับเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ จะได้

$$A=\begin{bmatrix}1&7&2\\2&-1&-1\\5&5&0\\-1&8&3\end{bmatrix}\begin{matrix}R_2\to R_2-2R_1\\R_3\to R_3-5R_1\\\sim\\R_4\to R_4+R_1\end{matrix}\begin{bmatrix}1&7&2\\0&-15&-5\\0&-30&-10\\0&15&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_3\to R_3-2R_2\\\sim\\R_4\to R_4+R_2\end{matrix}\begin{bmatrix}1&7&2\\0&-15&-5\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_2 \to -\frac{1}{5}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง rank $A = 2$

และจำนวนตัวแปร $= 3$

นั่นคือ rank $A <$ จำนวนตัวแปรในระบบ

ดังนั้น ระบบสมการมีผลเฉลยมากมาย

จากเมทริกซ์สุดท้าย จะได้

$$a_1 + 7a_2 + 2a_3 = 0$$

$$3a_2 + a_3 = 0$$

ถ้าให้ $a_3 = t$ โดยที่ $t \in \mathbb{R}$

จะได้ $a_2 = -\frac{a_3}{3} = -\frac{t}{3}$

และ $a_1 = -7a_2 - 2a_3 = -7\left(-\frac{t}{3}\right) - 2(t) = \frac{t}{3}$

เช่น ให้ $a_3 = 1$ จะได้ $a_1 = \frac{1}{3}$ และ $a_2 = -\frac{1}{3}$

ฉะนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ▲

ทฤษฎีบท 3.8 ให้ S เป็นเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V

1. ถ้า $\underline{0} \in S$ แล้ว S จะไม่เป็นอิสระเชิงเส้น
2. ถ้า $S = \{\underline{v}\}$ และ $\underline{v} \neq \underline{0}$ แล้ว S เป็นอิสระเชิงเส้น
3. ถ้า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นและ $S \subset S'$ แล้ว S' จะไม่เป็นอิสระเชิงเส้น
4. ถ้า S เป็นอิสระเชิงเส้นและ $S' \subset S$ แล้ว S' จะเป็นอิสระเชิงเส้น

<u>พิสูจน์</u> 1. ให้ $\underline{0} \in S$

จะได้ว่า $a\underline{0} = \underline{0}$ ทุกสเกลาร์ $a \neq 0$

ดังนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

2. ให้ $S = \{\underline{v}\}$ และ $\underline{v} \neq \underline{0}$

จะได้ว่า $a\underline{v} = \underline{0}$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$

ดังนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น

3. ให้ S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

นั่นคือ จะมีสเกลาร์ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ซึ่งไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด ที่ทำให้

$$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_n\underline{v}_n = \underline{0} \text{ โดยที่ } \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in S$$

แต่ $S \subset S'$

ดังนั้น $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in S'$

ฉะนั้น S' ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

4. ให้ S เป็นอิสระเชิงเส้น และ $S' \subset S$

สมมติ S' ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

จากข้อ 3 จะได้ S ไม่อิสระเชิงเส้น ซึ่งขัดแย้ง

ดังนั้น S' เป็นอิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 3.9 ถ้า $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V โดยที่ $n\geq 2$ และ $\underline{0}\notin S$ แล้ว S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อมี $\underline{v}_k$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_{k-1}$ สำหรับ k บางตัวที่มากกว่า 1

<u>พิสูจน์</u> $(\rightarrow)$ สมมติว่า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

นั่นคือ จะมีสเกลาร์ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ บางตัวไม่เท่ากับศูนย์ ที่ทำให้

$$a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+\ldots+a_n\underline{v}_n=\underline{0}$$

ให้ j เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดใน $\{1,2,3,\ldots,n\}$ ที่ $a_j\neq 0$

สมมติ $j=1$

จะได้ว่า $a_1\underline{v}_1=\underline{0}$ และ $a_1\neq 0$

ดังนั้น $\underline{v}_1=\underline{0}$ ซึ่งขัดกับที่กำหนด $\underline{0}\notin S$

ฉะนั้น $j>1$ และ $\underline{v}_j=\dfrac{a_1}{a_j}\underline{v}_1-\dfrac{a_2}{a_j}\underline{v}_2-\cdots-\dfrac{a_{j-1}}{a_j}\underline{v}_{j-1}$

$(\leftarrow)$ ให้ $k>1$ และ $\underline{v}_k$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_{k-1}$

จะได้ว่า $\underline{v}_k=a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+\ldots+a_{k-1}\underline{v}_{k-1}$

ดังนั้น $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+\ldots+a_{k-1}\underline{v}_{k-1}-\underline{v}_k=\underline{0}$

ฉะนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ▲

ตัวอย่าง 3.31 กำหนด $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ โดยที่ $\underline{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$, $\underline{v}_2=\begin{bmatrix}5\\6\\-1\end{bmatrix}$ และ $\underline{v}_3=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$

จงแสดงว่า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

พิสูจน์ ต้องการหาว่าเวกเตอร์ $\underline{v}_1$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_2$ และ $\underline{v}_3$ หรือไม่

โดยพิจารณาจาก $\underline{v}_1=a\underline{v}_2+b\underline{v}_3$ โดยที่ a,b เป็นสเกลาร์

จะได้ $$\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}5\\6\\-1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$$

นั่นคือ $$\begin{aligned}5a+3b&=1\\6a+2b&=-2\\-a+b&=3\end{aligned}$$

แก้ระบบสมการหาค่าของ a,b โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานทำกับเมทริกซ์แต่งเติม จะได้

$$[A|B]=\begin{bmatrix}5&3&1\\6&2&-2\\-1&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ซึ่ง rank $[A|B]=2$

rank $A=2$

และ จำนวนตัวแปร $=2$

นั่นคือ rank $[A|B]=$ rank $A=$ จำนวนตัวแปรในระบบ

ดังนั้น ระบบสมการจะมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $a=-1$ และ $b=2$

หรือกล่าวคือ $\underline{v}_1=-\underline{v}_2+2\underline{v}_3$

ฉะนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ▲

ทฤษฎีบท 3.10 กำหนด $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k\}\subset\mathbb{R}^n$ ถ้า $k>n$ แล้ว S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\underline{v}_1=(\underline{v}_{11},\underline{v}_{12},\ldots,\underline{v}_{1n})$

$$\underline{v}_2=(\underline{v}_{21},\underline{v}_{22},\ldots,\underline{v}_{2n})$$

$$\vdots$$

$$\underline{v}_k=(\underline{v}_{k1},\underline{v}_{k2},\ldots,\underline{v}_{kn})$$

พิจารณาสมการ $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+\cdots+a_k\underline{v}_k=\underline{0}$

หรือ
$$a_1v_{11}+a_2v_{21}+\cdots+a_kv_{k1}=0$$
$$a_1v_{12}+a_2v_{22}+\cdots+a_kv_{k2}=0$$
$$\vdots$$
$$a_1v_{1n}+a_2v_{2n}+\cdots+a_kv_{kn}=0$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ที่มี n สมการ k ตัวแปร คือ $a_1,a_2,\ldots,a_k$

เนื่องจาก $k>n$

ดังนั้น ระบบสมการจะมีผลเฉลยมากมาย

ฉะนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ▲

<u>ตัวอย่าง 3.32</u> ให้ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}\subset\mathbb{R}^2$ โดยที่ $\underline{v}_1=(1,2)$, $\underline{v}_2=(-3,4)$, $\underline{v}_3=(0,1)$

จงพิจารณาว่าเซต S เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก S มีสมาชิก 3 ตัว

จะได้ $k=3$ และ $n=2$

นั่นคือ $k>n$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 3.10 สรุปได้ว่า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ▲

<u>ตัวอย่าง 3.33</u> ให้ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_4\}\subset M_{3\times1}$ โดยที่ $\underline{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\underline{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix}$, $\underline{v}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$ และ $\underline{v}_4=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$

จงพิจารณาว่าเซต S เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก S เป็นเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ $M_{3\times1}$ และ S มีสมาชิก 4 ตัว

จะได้ $k=4$ และ $n=3$

นั่นคือ $k>n$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 3.10 สรุปได้ว่า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ▲