บทที่ 8

การประยุกต์ของพีชคณิตเชิงเส้น

8.1 การประยุกต์ทางภาคตัดกรวยสำหรับรูปแบบกำลังสอง

(Application to Conic Sections : Quadratic form)

สมการในรูป $ax^2+2bxy+cy^2+dx+cy+f=0$ เมื่อ a,b,c,d,e และ f เป็นจำนวนจริงและมีจำนวนอย่างน้อยหนึ่งจำนวนใน a,b และ c ต้องไม่เป็นศูนย์ เรียกสมการนี้**ว่า สมการกำลังสองในตัวแปร** x **และ** y และจะเรียกนิพจน์ $ax^2+2bxy+by^2$ ว่า **รูปแบบกำลังสองสมทบ** (Associated Quadratic Form)

ตัวอย่างเช่น

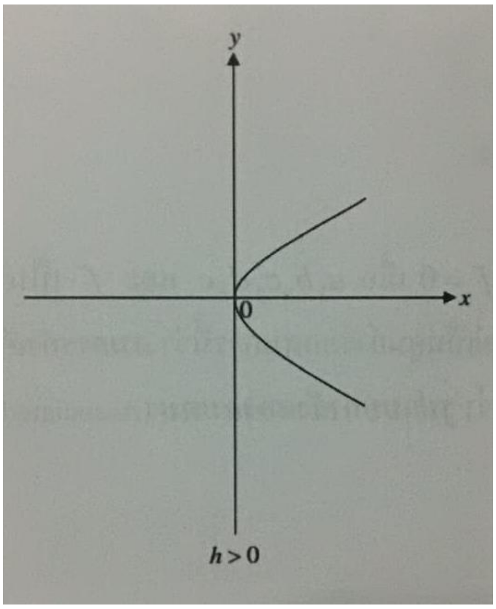
สมการกำลังสอง	**รูปแบบกำลังสองสมบท**
$3x^2+5xy-y^2+2x+7=0$	$3x^2+5xy-y^2$
$4x^2-3y^2+2y+1=0$	$4x^2-3y^2$
$xy+y=0$	xy

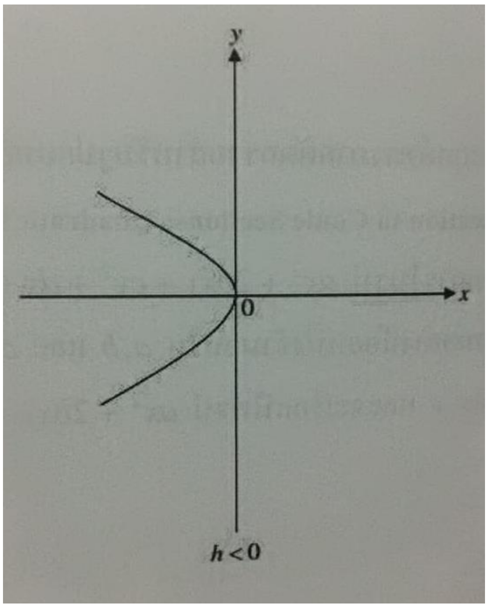
กราฟของสมการกำลังสองในตัวแปร x และ y เรียกว่า **ภาคตัดกรวย** (Conic Sections) และภาคตัดกรวยที่สำคัญได้แก่ วงรี (Ellipses) วงกลม (Circles) พาราโบลา (Parabolas) และไฮเพอร์โบลา (Hyperbolas) ซึ่งพวกนี้เรียกว่า **ภาคตัดกรวยปรกติ** (Non-degenerate Conics) นอกเหนือจากนี้ เรียกว่า **ภาคตัดกรวยลดรูป** (Degenerate Conics) รวมทั้งจุดจุดเดียว (Point) เส้นตรง (Line) และคู่ของเส้นตรง (Pair of Lines)

ภาคตัดกรวยปรกติ จะเรียกว่าอยู่ในตำแหน่งมาตรฐานเทียบกับแกนพิกัด ถ้าสมการสามารถเขียนได้กราฟเป็นรูปใดรูปหนึ่งดังต่อไปนี้

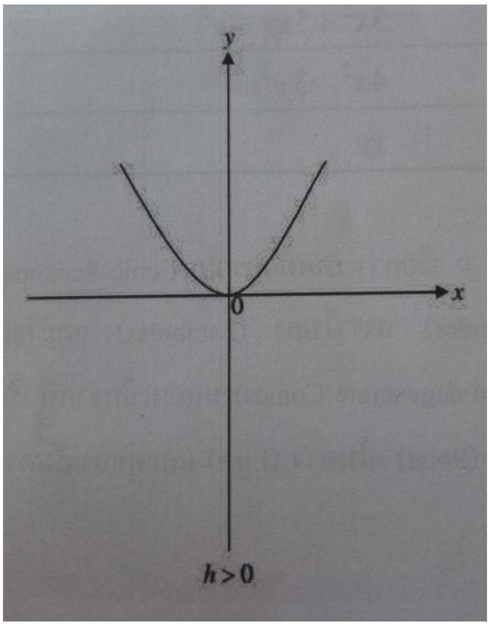
1. กราฟพาราโบลา

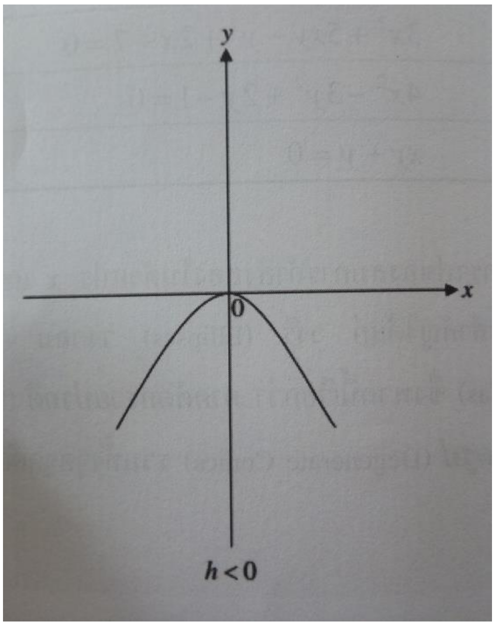
1.1 พาราโบลา (ตะแคง) $y^2=kx$





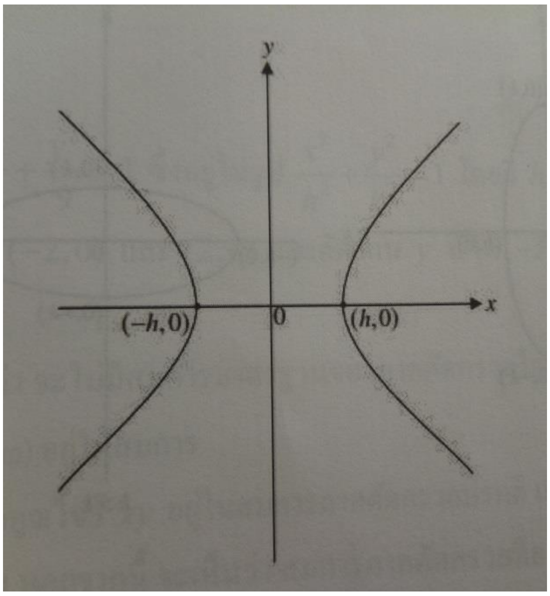
1.2 พาราโบลา (ตั้ง) $x^2 = ky$



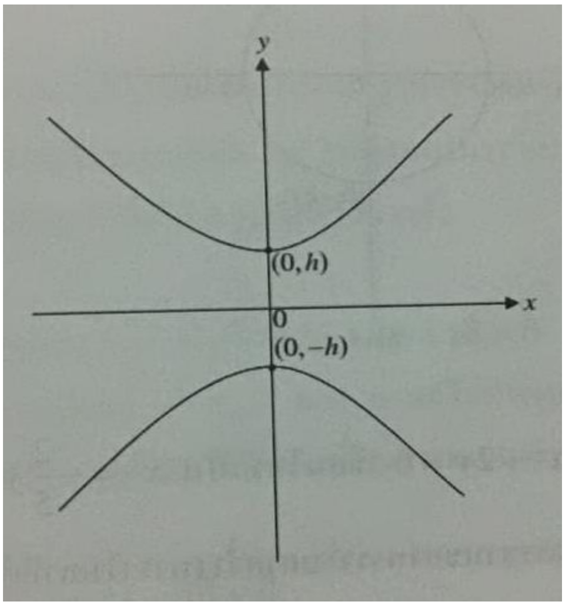


2. กราฟไฮเพอร์โบลา

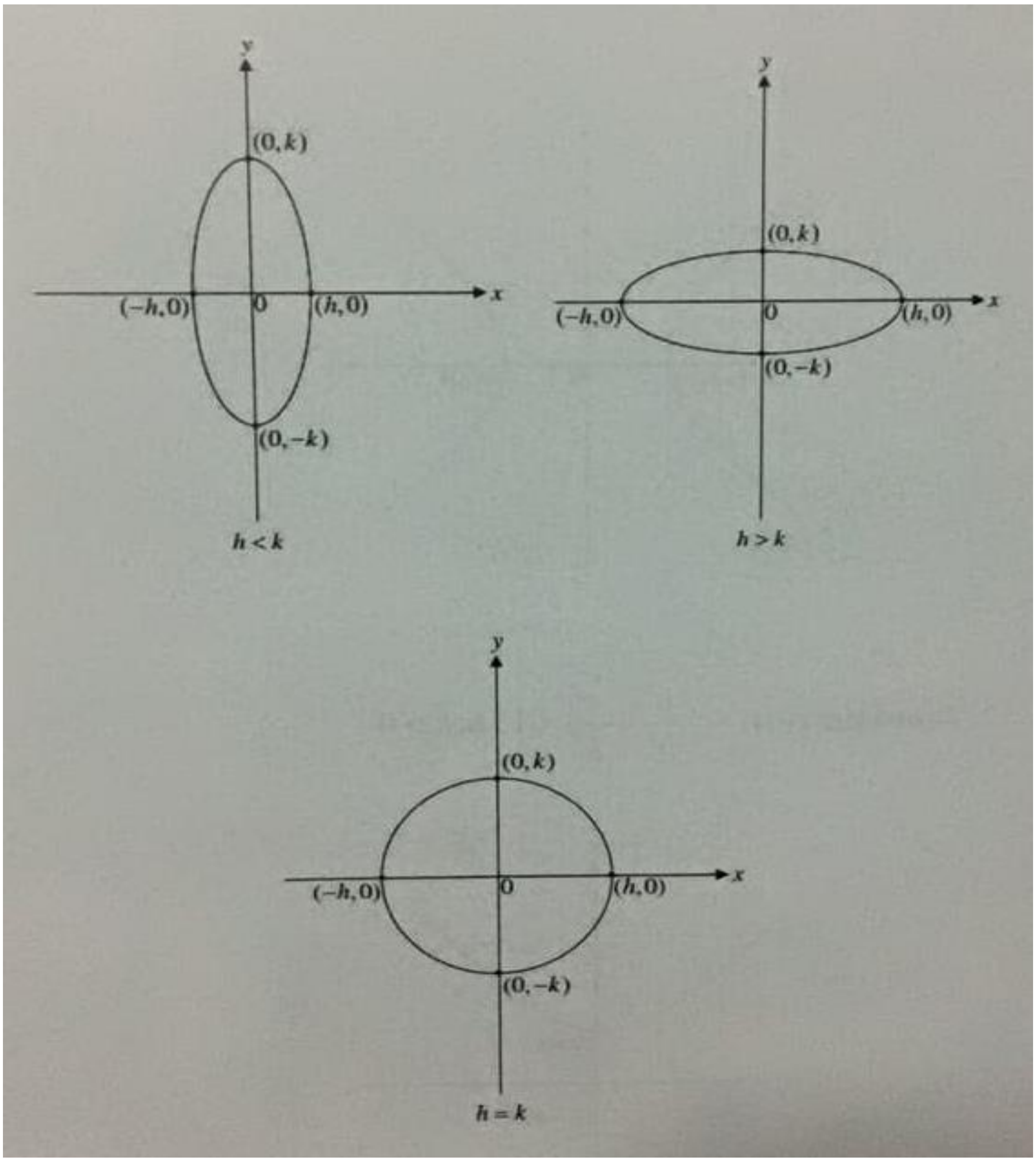
2.1 ไฮเพอร์โบลา (ตะแคง) $\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}=1;h,k>0$



2.2 ไฮเพอร์โบลา (ตั้ง) $\frac{y^2}{h^2}-\frac{x^2}{k^2}=1;h,k>0$



3. กราฟวงรีหรือวงกลม $\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}=1;h,k>0$



ตัวอย่างเช่น 1. สมการ $5x^2+2y=0$ เขียนใหม่เป็น $x^2=-\frac{2}{5}y$ ซึ่งอยู่ในรูป $x^2=ky$ โดยมี $k=-\frac{2}{5}<0$ กราฟจะเป็นรูปมาตรฐานของพาราโบลาคว่ำ (พาราโบลาที่เปิดล่าง)

2. สมการ $x^2-8y^2=-16$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{16}=1$ ซึ่งอยู่ในรูป $\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}=1$ โดยมี $h=\sqrt{2}, k=4$ กราฟจะเป็นรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ซึ่งตัดแกน y ที่ $(0,-\sqrt{2})$ และ $(0,\sqrt{2})$

3. สมการ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ซึ่งอยู่ในรูป $\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}=1$ โดยมี $h=2, k=3$ กราฟจะเป็นรูปมาตรฐานวงรี ซึ่งตัดแกน x ที่ $(-2,0)$ และ $(2,0)$ และตัดแกน y ที่ $(0,-3)$ และ $(0,3)$

จากการสังเกตจะพบว่า จะไม่มีสมการมาตรฐานของภาคตัดกรวยใดที่มีพจน์ xy ซึ่งเรียกว่า **พจน์ผลคูณไขว้** (Cross-Product Term) อยู่ในสมการ

การที่สมการมีพจน์ผลคูณไขว้ xy อยู่ในสมการภาคตัดกรวยปรกติ แสดงว่า ภาคตัดกรวยนั้นจะถูกหมุนไปจากตำแหน่งมาตรฐาน นอกจากนี้ จะเห็นว่า สมการภาคตัดกรวยที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานจะไม่มีพจน์ x^2 และ x หรือพจน์ y^2 และ y ปรากฏขึ้นพร้อมกัน

สมการภาคตัดกรวยปรกติที่ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ xy ปรากฏอยู่ อาจจะมีพจน์ x หรือ y ปรากฏในสมการนอกเหนือจากพจน์ x^2 หรือ y^2 แสดงว่า ภาคตัดกรวยได้ถูกเลื่อนขนานออกไปจากตำแหน่งมาตรฐาน

ในกรณีที่ภาคตัดกรวยปรกติไม่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน เราสามารถใช้**วิธีการหมุน** (Rotation) และ**วิธีการเลื่อนขนาน** (Translation) แกนในระบบพิกัด xy ไปสู่แกนในระบบพิกัด $x'y'$ เพื่อให้ภาคตัดกรวยมีสมการอยู่ในรูปแบบมาตรฐานรูปใดรูปหนึ่งใน 9 รูปที่กล่าวมาแล้ว

ตัวอย่างเช่น พิจารณาสมการกำลังสอง $2x^2+y^2-12x-4y+18=0$
จะเห็นว่า สมการกำลังสองดังกล่าวมีพจน์ x^2, x, y^2 และ y แต่ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ xy ซึ่งเป็นกราฟของภาคตัดกรวยที่เลื่อนจากตำแหน่งมาตรฐานโดยใช้วิธีการเลื่อนขนานของแกนพิกัด แต่ไม่มีการหมุน สามารถทำได้ดังนี้

จาก $2x^2+y^2-12x-4y+18=0$

จัดสมการให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ จะได้

$$(2x^2-12x)+(y^2-4y)=-18$$

หรือ $2(x^2-6x)+(y^2-4y)=-18$

หรือ $2(x^2-2\cdot 3x+3^2)+(y^2-2\cdot 2y+2^2)=-18+2\cdot 3^2+2^2$

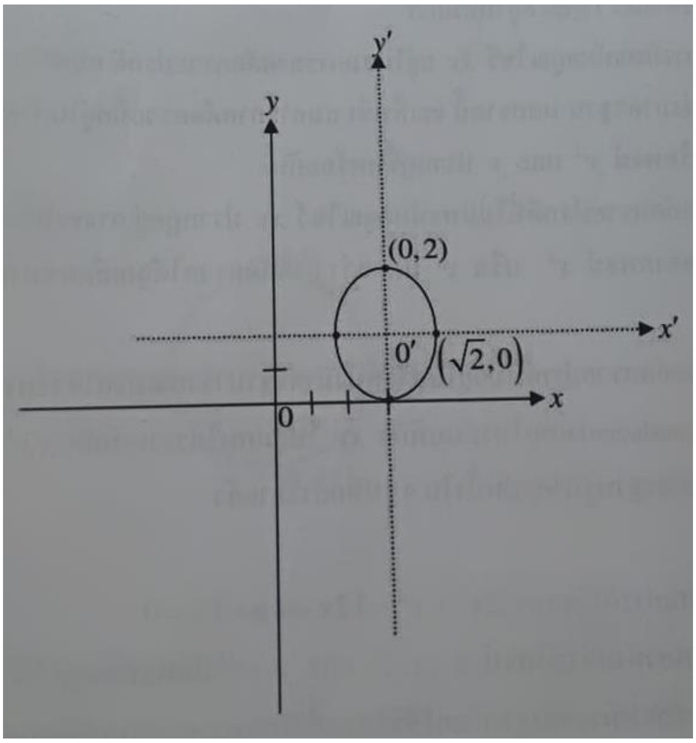
หรือ $\dfrac{(x-3)^2}{2}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

เลื่อนขนานของแกนพิกัดไปยังจุดกำเนิดใหม่ $(3,2)$ โดยให้ $x'=x-3$ และ $y'=y-2$ จะได้สมการเทียบกับแกนพิกัดใหม่เป็น

$$\frac{(x')^2}{2}+\frac{(y')^2}{4}=1$$

หรือ $\dfrac{(x')^2}{\sqrt{2}^{\,2}}+\dfrac{(y')^2}{2^2}=1$

ซึ่งเป็นสมการของกราฟวงรีในตำแหน่งมาตรฐานในระบบพิกัด $x'y'$ ดังรูป



สมการกำลังสอง $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $X'AX+KX+F=\underline{0}$

โดยที่ $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & b \end{bmatrix}, K=\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} f \end{bmatrix}, \underline{0}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

และเรียกเมทริกซ์สมมาตร A ว่า **เมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองของ** X^tAX

ตัวอย่างเช่น 1. เมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองของ $3x^2+5xy+7y^2$ คือ $\begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 7 \end{bmatrix}$

2. เมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองของ $8x^2-4y^2$ คือ $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

พิจารณาภาคตัดกรวยซึ่งมีสมการเป็น

$$X^tAX+KX+F=\underline{0} \qquad \text{....................(8.1)}$$

เราสามารถที่จะทำให้พจน์ผลคูณไขว้ออกไปจากสมการ (8.1) โดยการหมุนแกนพิกัด xy ไปยังแกนพิกัด $x'y'$ สรุปขั้นตอนได้ดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> หาเมทริกซ์ $P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากและทำเมทริกซ์ A ให้เป็นทแยง

มุมได้

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> สลับหลักของ P ถ้าจำเป็น เพื่อทำให้ $\det P = 1$ และทำให้การแปลงพิกัดฉาก $X = PX'$ หรือ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ เป็นการหมุน

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> แทน $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ลงใน (8.1) จะได้

$$(PX')^t A(PX') + K(PX') + F = \underline{0}$$

$$(X')^t (P^t AP)X' + (KP)X' + F = \underline{0} \qquad \text{....................(8.2)}$$

ซึ่งเป็นสมการของภาคตัดกรวยในระบบพิกัด $x'y'$

เนื่องจาก P เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้โดย

$$P^t AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ λ_1 และ λ_2 เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A

ดังนั้น จาก (8.2) จะได้

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0$ ....(8.3)

เมื่อ $d' = dp_{11} + ep_{21}$ และ $e' = dp_{12} + ep_{22}$

จะเห็นว่า สมการ (8.3) ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ปรากฏอยู่

<u>ตัวอย่าง 8.1</u> จงเขียนกราฟของสมการ $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ จะได้

$$a = 5, b = -2, c = 8, d = 0, e = 0, f = -36$$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

หรือ $X^t AX + KX + F = \underline{0}$

โดยที่ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -36 \end{bmatrix}, \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

หรือสมการโจทย์ในรูปเมทริกซ์ คือ $X^t AX - \begin{bmatrix} 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ ....(8.4)

ต่อไปจะหาค่าลักษณะเฉพาะของ A

เนื่องจาก $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(8-\lambda)-4 \\
&= \lambda^2 - 13\lambda + 36
\end{aligned}
$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $\lambda^2 - 13\lambda + 36$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$ หรือ $(\lambda-4)(\lambda-9)=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = 4$ หรือ 9

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 4 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(4)I_2)X = \underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda = 4$ กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 5-4 & -2 \\ -2 & 8-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $x - 2y = 0$

หรือ $x = 2y$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 4 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t \neq 0$$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 4 คือ

$$E_4 = \left\{ t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} - \ 0 \right\}$$

นั่นคือ ฐานหลักของปริภูมิ E_4 คือ $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และทำเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ให้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของปริภูมิ E_4 จะได้ $\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ E_4

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ E_9

ฉะนั้น $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ จะเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้และ $\det P = 1$

แทนค่า $X = PX'$ ใน (8.4) จะได้

$$(PX')^t A(PX') - [36] = [0]$$

หรือ $(X')^t(P^tAP)X' - [36] = [0]$ ....(8.5)

เนื่องจาก $P^tAP = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จาก (8.5) จะได้

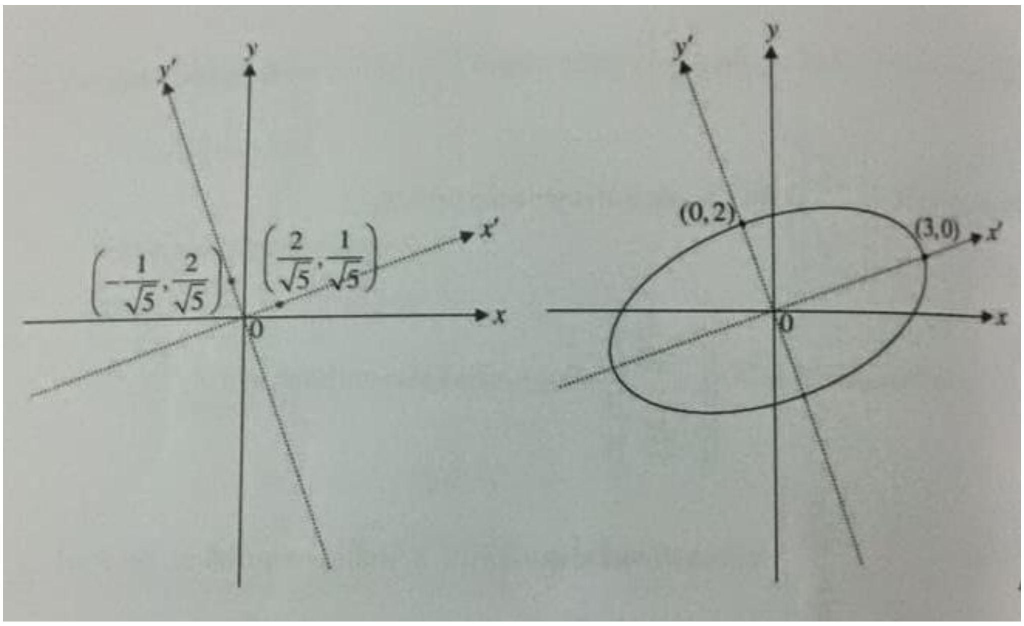
$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - [36] = [0]$$

หรือ $4(x')^2 + 9(y')^2 - 36 = 0$

หรือ $\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1$

หรือ $\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1$

ซึ่งเป็นสมการของกราฟวงรีในระบบพิกัด $x'y'$ ดังรูป



<u>ตัวอย่าง 8.2</u> จงเขียนกราฟของสมการ $5x^2 - 4xy + 8y^2 + \dfrac{20}{\sqrt{5}}x - \dfrac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ จะได้

$$a = 5, b = -2, c = 8, d = \frac{20}{\sqrt{5}}, e = -\frac{80}{\sqrt{5}}, f = 4$$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{20}{\sqrt{5}} & -\dfrac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

หรือ $X^t AX + KX + F = \underline{0}$

โดยที่ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} \dfrac{20}{\sqrt{5}} & -\dfrac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}, \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

หรือสมการโจทย์ในรูปเมทริกซ์ คือ $X^t AX + KX + \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ ....(8.6)

จากตัวอย่าง 8.1 จะได้ $P = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้และ $P^t AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

แทนค่า $X = PX'$ ใน (8.6) จะได้

$$(PX')^t A(PX') + K(PX') + \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$(X')^t (P^t AP)X' + (KP)X' + \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{20}{\sqrt{5}} & -\dfrac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$4(x')^2 + 9(y')^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0$$

$$\left(4(x')^2 - 8x'\right) + \left(9(y')^2 - 36y'\right) = -4$$

$$4\left((x')^2 - 2x'\right) + 9\left((y')^2 - 4y'\right) = -4$$

$$4\left((x')^2 - 2 \cdot 1x' + 1^2\right) + 9\left((y')^2 - 2 \cdot 2y' + 2^2\right) = -4 + 4 \cdot 1^2 + 9 \cdot 2^2$$

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 = 36$$

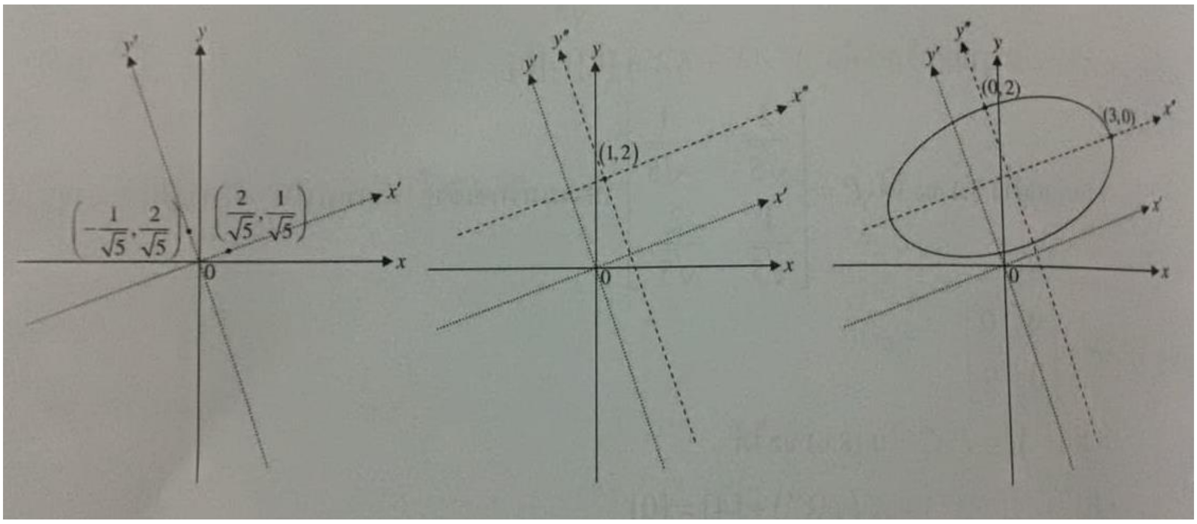
$$\frac{(x' - 1)^2}{9} + \frac{(y' - 2)^2}{4} = 1$$

เลื่อนขนานของแกนพิกัดไปยังจุดกำเนิดใหม่ $(1,2)$ โดยให้ $x'' = x' - 1$ และ $y'' = y' - 2$ จะได้สมการเทียบกับแกนพิกัดใหม่เป็น

$$\frac{(x'')^2}{9}+\frac{(y'')^2}{4}=1$$

หรือ $\frac{(x'')^2}{3^2}+\frac{(y'')^2}{2^2}=1$

ซึ่งเป็นสมการของกราฟวงรีในระบบพิกัด $x''y''$ ดังรูป



8.2 การประยุกต์ทางผิวกำลังสองสำหรับรูปแบบกำลังสอง

(Application to Quadric Surfaces : Quadratic form)

เราสามารถใช้ความรู้เรื่องการประยุกต์ทางภาคตัดกรวยสำหรับรูปแบบกำลังสองมาประยุกต์กับทางผิวกำลังสองสำหรับรูปแบบกำลังสอง โดยขยายไปยังสมการรูปแบบกำลังสองของสามตัวแปรที่อยู่ในรูป

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0 \qquad \text{....................(8.7)}$$

เมื่อ a,b,c,d,e,f,g,h,i,j เป็นจำนวนจริง และ a,b,c,d,e,f ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด

เรียกสมการ (8.7) ว่า **สมการกำลังสองในตัวแปร x,y และ z** และจะเรียกนิพจน์ $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$ ว่า **รูปแบบกำลังสองสมทบ**

สมการ (8.7) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & d & e\\ d & b & f\\ e & f & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} g & h & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\end{bmatrix}$$

หรือ $X^tAX+KX+F=\underline{0}$

โดยที่ $X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} a & d & e\\ d & b & f\\ e & f & c\end{bmatrix}, K=\begin{bmatrix} g & h & i\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} j\end{bmatrix}, \underline{0}=\begin{bmatrix} 0\end{bmatrix}$

และเรียกเมทริกซ์สมมาตร A ว่า **เมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองของ X^tAX**

ตัวอย่างเช่น

1. สมการรูปแบบกำลังสอง $3x^2+2y^2-z^2+4xy+3xz-8yz+7x+2y+3z-7=0$

   มีรูปแบบกำลังสองสมทบ $3x^2+2y^2-z^2+4xy+3xz-8yz$

   และเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง คือ $\begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 & -4 \\ \frac{3}{2} & -4 & -1 \end{bmatrix}$

2. สมการรูปแบบกำลังสอง $4x^2+4y^2+4z^2+2yz+x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}z-\frac{1}{5}=0$

   มีรูปแบบกำลังสองสมทบ $4x^2+4y^2+4z^2+2yz$

   และเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง คือ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

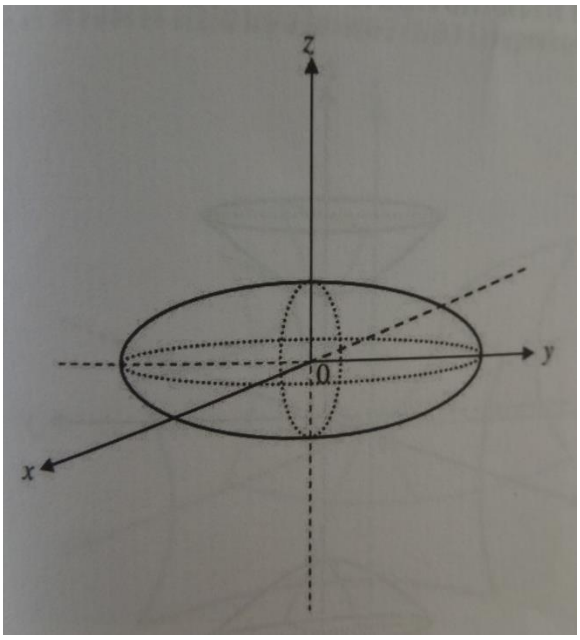
3. สมการรูปแบบกำลังสอง $6xy+6xz+6yz+x+y+z-4=0$

   มีรูปแบบกำลังสองสมทบ $6xy+6xz+6yz$

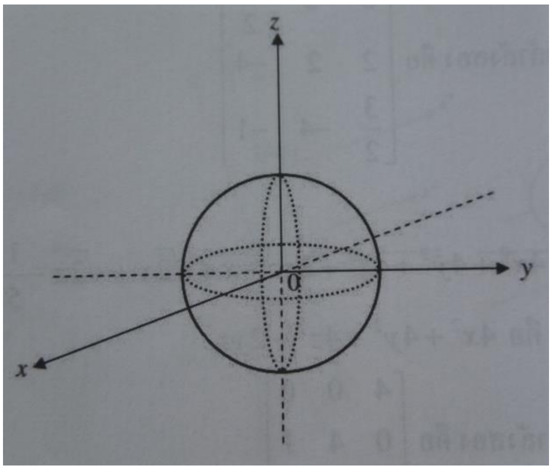
   และเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง คือ $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

กราฟของสมการกำลังสองในตัวแปร x,y และ z เรียกว่า **ผิวกำลังสอง** (Quadrics หรือ Quadric Surfaces) และผิวกำลังสองที่สำคัญได้แก่

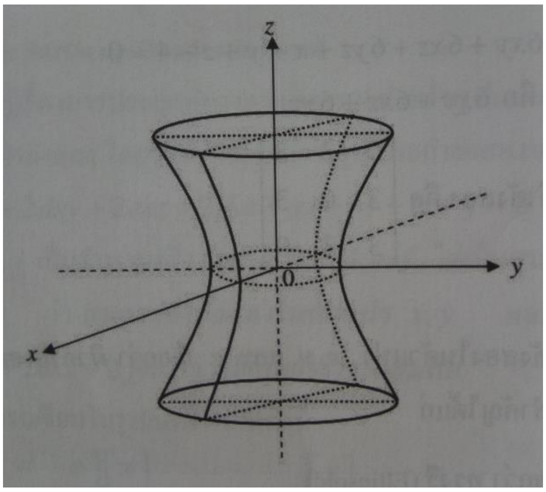
1. $\frac{x^2}{\ell^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1$ เรียกว่า **ทรงรี** (Ellipsoid)



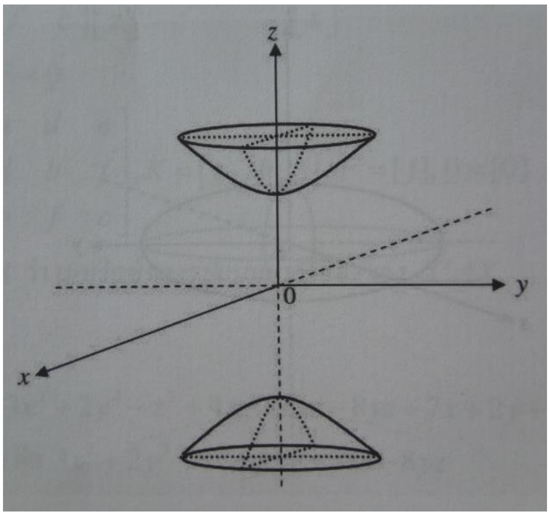
แต่ถ้า $\ell = m = n$ เรียกว่า **ทรงกลม** (Sphere)



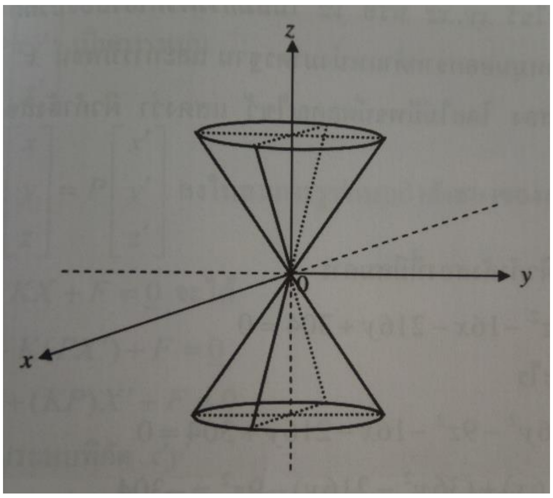
2. $\frac{x^2}{\ell^2}+\frac{y^2}{m^2}-\frac{z^2}{n^2}=1$ เรียกว่า **ทรงไฮเพอร์โบลาหนึ่งชิ้น** (Hyperboloid of One Sheet)



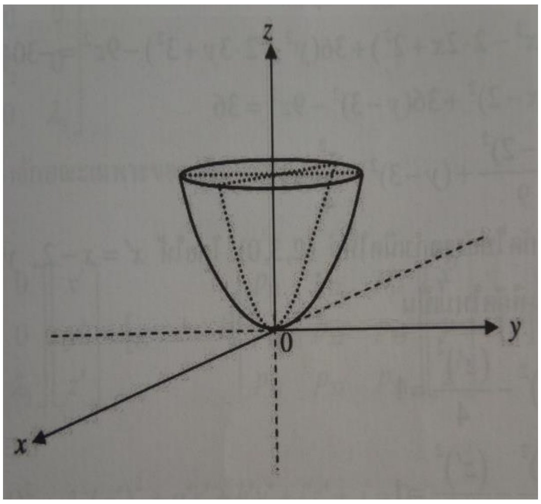
3. $\frac{x^2}{\ell^2} - \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1$ เรียกว่า **ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น** (Hyperboloid of Two Sheets)



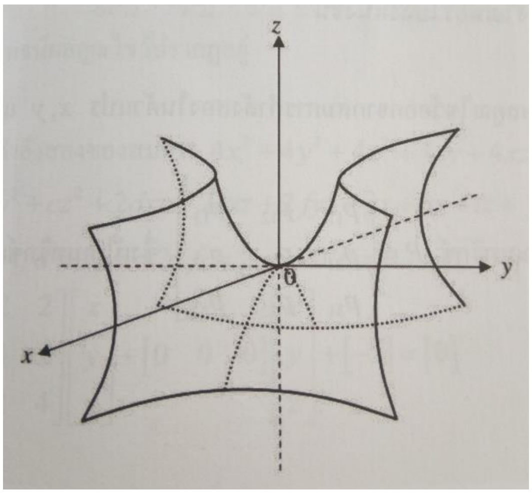
4. $\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 0$ เรียกว่า **ทรงกรวยเชิงวงรี** (Elliptic Cone)



5. $\dfrac{x^2}{\ell^2}+\dfrac{y^2}{m^2}-z=0$ เรียกว่า **ทรงพาราโบลาเชิงวงรี** (Elliptic Paraboloid)



6. $\dfrac{x^2}{\ell^2}-\dfrac{y^2}{m^2}-z=0$ เรียกว่า **ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา** (Hyperbolic Paraboloid)



ผิวกำลังสองที่มีสมการอยู่ใน 6 รูปแบบข้างต้น จะเรียกว่า อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน เทียบกับแกนพิกัด และการมีพจน์ผลคูณไขว้ xy, xz หรือ yz ในสมการผิวกำลังสองปรกติ (Non-degenerate Quadric) แสดงว่า ผิวกำลังสองจะถูกหมุนออกจากตำแหน่งมาตรฐาน และการมีพจน์ x^2 และ x, y^2 และ y หรือ z^2 และ z ในผิวกำลังสอง โดยไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ แสดงว่า ผิวกำลังสองจะถูกเลื่อนไปจากตำแหน่งมาตรฐาน

ตัวอย่าง 8.3 จงพิจารณาว่าผิวกำลังสองที่มีสมการ

$$4x^2+36y^2-9z^2-16x-216y+304=0$$

เป็นผิวกำลังสองที่มีชื่อว่าอะไร

วิธีทำ เนื่องจาก $4x^2+36y^2-9z^2-16x-216y+304=0$

$$(4x^2-16x)+(36y^2-216y)-9z^2=-304$$
$$4(x^2-4x)+36(y^2-6y)-9z^2=-304$$
$$4(x^2-2\cdot 2x+2^2)+36(y^2-2\cdot 3y+3^2)-9z^2=-304+4\cdot 2^2+36\cdot 3^2$$
$$4(x-2)^2+36(y-3)^2-9z^2=36$$
$$\frac{(x-2)^2}{9}+(y-3)^2-\frac{z^2}{4}=1$$

เลื่อนขนานของแกนพิกัดไปยังจุดกำเนิดใหม่ $(2,3,0)$ โดยให้ $x'=x-2, y'=y-3$ และ $z'=z$ จะได้สมการเทียบกับแกนพิกัดใหม่เป็น

$$\frac{(x')^2}{9}+(y')^2-\frac{(z')^2}{4}=1$$

หรือ $\dfrac{(x')^2}{3^2}+\dfrac{(y')^2}{1^2}-\dfrac{(z')^2}{2^2}=1$

ซึ่งเป็นสมการของผิวทรงไฮเพอร์โบลาหนึ่งชั้น

วิธการเอาพจน์ผลคูณไขว้ออกจากสมการกำลังสองในตัวแปร x,y และ z สามารถสรุปขั้นตอนได้ดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> หาเมทริกซ์ $P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากและทำเมทริกซ์ A ให้เป็นทแยงมุมได้

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> สลับหลักของ P ถ้าจำเป็น เพื่อทำให้ $\det P=1$ และทำให้การแปลงพิกัดฉาก $X=PX'$ หรือ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ เป็นการหมุน

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> แทน $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ ลงในสมการรูปแบบกำลังสองของสามตัวแปร x,y และ z ที่อยู่ในรูปเมทริกซ์ $X^tAX+KX+F=\underline{0}$ จะได้

$$(PX')^tA(PX')+K(PX')+F=\underline{0}$$

$$(X')^t(P^tAP)X'+(KP)X'+F=\underline{0} \qquad \text{....................(8.8)}$$

ซึ่งเป็นสมการผิวกำลังสองในระบบพิกัด $x'y'$

เนื่องจาก P เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้โดย

$$P^tAP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

เมื่อ λ_1, λ_2 และ λ_3 เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A

ดังนั้น จาก (8.8) จะได้

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0$ ....(8.9)

เมื่อ $g' = gp_{11} + hp_{21} + ip_{31}, h' = gp_{12} + hp_{22} + ip_{32}$ และ $i' = gp_{13} + hp_{23} + ip_{33}$

จะเห็นว่า สมการ (8.9) ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ปรากฏอยู่

<u>ตัวอย่าง 8.4</u> จงวาดรูปผิวกำลังสองของสมการ $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$ จะได้

$a = 4, b = 4, c = 4, d = 2, e = 2, f = 2, g = 0, h = 0, i = 0, j = -3$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

หรือ $X^tAX + KX + F = \underline{0}$

โดยที่ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}, \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

หรือสมการโจทย์ในรูปเมทริกซ์ คือ $X^tAX - \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ ....(8.10)

ต่อไปจะหาค่าลักษณะเฉพาะของ A

เนื่องจาก $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= 32 - 36\lambda + 12\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $32 - 36\lambda + 12\lambda^2 - \lambda^3$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $32 - 36\lambda + 12\lambda^2 - \lambda^3 = 0$

หรือ $(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 8) = 0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = 2, 2$ หรือ 8

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 2 โดยแก้ระบบสมการเชิง

เส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(-2)I_3)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda=2$ กำหนดให้ $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}4-2 & 2 & 2\\ 2 & 4-2 & 2\\ 2 & 2 & 4-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

นั่นคือ $2x+2y+2z=0$

หรือ $x+y+z=0$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 2 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X=\begin{bmatrix}-s-t\\ s\\ t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$ โดยที่ $s,t\neq 0$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 2 คือ

$$E_2=\left\{s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\middle|\, s,t\in\mathbb{R}-\ 0\right\}$$

นั่นคือ ฐานหลักของปริภูมิ E_2 คือ $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ และทำเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ ให้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของปริภูมิ E_2 โดยใช้ขบวนการกราม-ชมิดท์ จะได้ $\left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ E_2

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ E_8

ฉะนั้น $P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ จะเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้

และ $\det P=1$

แทนค่า $X=PX'$ ใน (8.10) จะได้

$$(PX')^t A(PX')-[3]=[0]$$

หรือ $(X')^t(P^tAP)X'-[3]=[0]$ ....(8.11)

เนื่องจาก $P^tAP=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

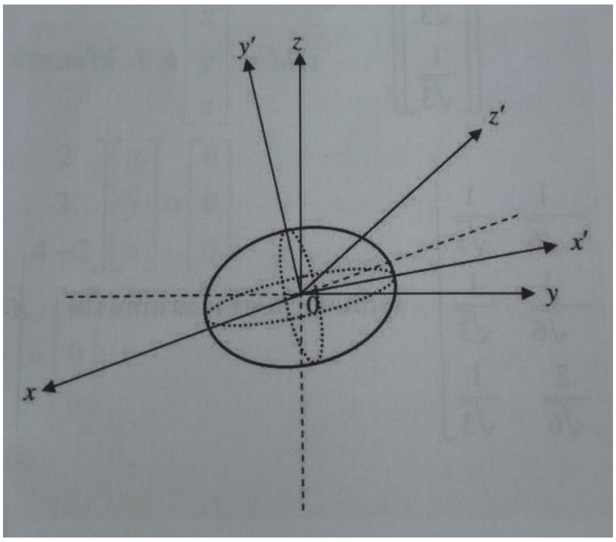
ดังนั้น จาก (8.11) จะได้

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}-[3]=[0]$$

หรือ $2(x')^2+2(y')^2+8(z')^2=3$

หรือ $\dfrac{(x')^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}+\dfrac{(y')^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}+\dfrac{(z')^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2}=1$

ซึ่งเป็นสมการของผิวทรงรีในระบบพิกัด $x'y'z'$ ดังรูป



ตัวอย่าง 8.5 จงวาดรูปผิวกำลังสองของสมการ $-3y^2+2z^2+4xy+8z+12=0$

วิธีทำ เนื่องจาก $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0$ จะได้

$a=0,b=-3,c=2,d=2,e=0,f=0,g=0,h=0,i=8,j=12$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$

หรือ $X^tAX+KX+F=\underline{0}$

โดยที่ $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, K=\begin{bmatrix}0 & 0 & 8\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}12\end{bmatrix}, \underline{0}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$

หรือสมการโจทย์ในรูปเมทริกซ์ คือ $X^tAX+KX+\begin{bmatrix}12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$ ....(8.12)

ต่อไปจะหาค่าลักษณะเฉพาะของ A

เนื่องจาก $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ จะได้

$$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}0-\lambda & 2 & 0\\ 2 & -3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda(-3-\lambda)(2-\lambda)-2\cdot 2(2-\lambda$$

$$=(2-\lambda)(-\lambda(-3-\lambda)-4)$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2+3\lambda-4)$$

$$=(2-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-1)$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $(2-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-1)$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $(2-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-1)=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = 1, 2$ หรือ -4

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(1)I_3)X = \underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda = 1$ กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 2 & 0 \\ 2 & -3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $-x + 2y = 0$

และ $z = 0$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t \neq 0$$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 คือ

$$E_1 = \left\{ t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} - 0 \right\}$$

นั่นคือ ฐานหลักของปริภูมิ E_1 คือ $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ และทำเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ให้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของปริภูมิ E_1 จะได้ $\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ E_1

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ E_2 และ $\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐาน

หลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ E_{-4}

ฉะนั้น $P=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ จะเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้

และ $\det P=1$

แทนค่า $X=PX'$ ใน (8.12) จะได้

$$(PX')^t A(PX')+K(PX')+\begin{bmatrix}12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

หรือ $(X')^t(P^tAP)X'+(KP)X'+\begin{bmatrix}12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$ ....(8.13)

เนื่องจาก $P^tAP=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

และ $KP=\begin{bmatrix}0 & 0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

ดังนั้น จาก (8.13) จะได้

$$\begin{bmatrix}x' & y' & z'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

$$(x')^2+2(y')^2-4(z')^2+8y'=-12$$

$$(x')^2+2(y')^2+8y'-4(z')^2=-12$$

$$(x')^2+2\ (y')^2+4y'\ -4(z')^2=-12$$

$$(x')^2+2\ (y')^2+2\cdot 2y'+2^2\ -4(z')^2=-12+2\cdot 2^2$$

$$(x')^2+2(y'+2)^2-4(z')^2=-4$$

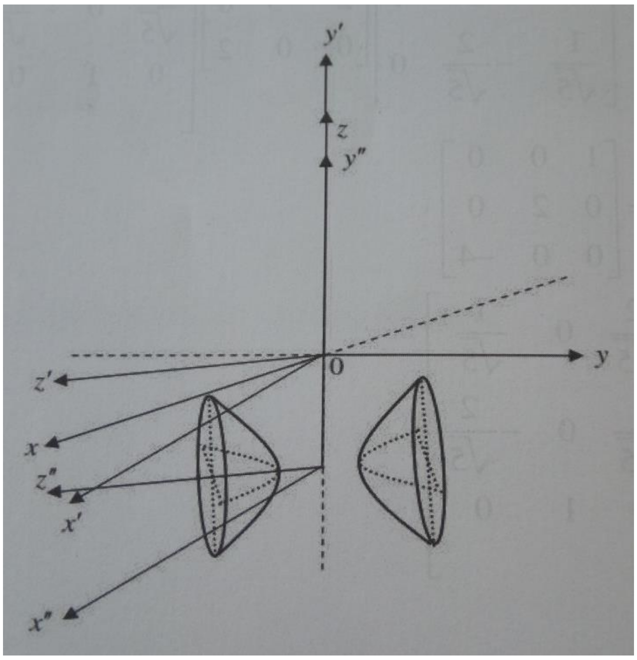
$$(z')^2-\frac{(x')^2}{4}-\frac{(y'+2)^2}{2}=1$$

เลื่อนขนานของแกนพิกัดไปยังจุดกำเนิดใหม่ $(0,-2,0)$ โดยให้ $x''=x',y''=y'+2$ และ $z''=z'$ จะได้สมการเทียบกับแกนพิกัดใหม่เป็น

$$(z'')^2-\frac{(x'')^2}{4}-\frac{(y'')^2}{2}=1$$

หรือ $\dfrac{(z'')^2}{1^2}-\dfrac{(x'')^2}{2^2}-\dfrac{(y'')^2}{\sqrt{2}^{\,2}}=1$

ซึ่งเป็นสมการของผิวทรงไฮเพอร์โบลาสองชั้นในระบบพิกัด $x''y''z''$ ดังรูป



8.3 การประยุกต์ทางสมการเชิงอนุพันธ์ (Application to Differential Equation)

กฎหลาย ๆ กฎที่สำคัญทางฟิสิกส์ เคมี และชีววิทยา จะเขียนในพจน์ของสมการเชิงอนุพันธ์ นั่นคือ เป็นสมการที่มีฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยสมการเชิงอนุพันธ์ที่ง่ายที่สุดสมการหนึ่งอยู่ในรูป

$y'=ay$ ....(8.14)

เมื่อ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่รู้ค่า (Unknow Function) ที่จะต้องหา

หรือกล่าวคือ $y=f(x)$ เป็นผลเฉลยของ (8.14) ที่ต้องการหา

$y'=\dfrac{dy}{dx}$ เป็นอนุพันธ์ของ y

และ a เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=ay$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int a dx$$
$$\ln y = ax + c_0$$

หรือ $y = ce^{ax}$ **....................**(8.15)

เมื่อ $c = e^{c_0}$ เป็นตัวคงค่าใด ๆ จะเรียก (8.15) ว่า **ผลเฉลยทั่วไป** (General Solution) ของ $y' = ay$ และหากมีเงื่อนไขเพิ่มเติม แล้วสามารถหา **ผลเฉลยเฉพาะ** (Particular Solution) เพียงผลเฉลยเดียวจากผลเฉลยทั่วไปได้

ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = ay$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $y(0) = 3$ ซึ่งเรียกเงื่อนไขที่เพิ่มเข้ามาว่า **เงื่อนไขเริ่มต้น** (Initial Condition) และปัญหาในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น จะเรียกว่า **ปัญหาค่าเริ่มต้น** (Initial-Value Problem)

ในที่นี้จะพูดถึงการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \qquad \text{....................(8.16)}$$

เมื่อ $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x), \ldots, y_n = f_n(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องหา และ a_{ij} เป็นค่าคงตัว ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (8.16) อาจเขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

หรือ $Y' = AY$

<u>ตัวอย่าง 8.6</u> กำหนดระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 \\ y_2' &= -2y_2 \\ y_3' &= 5y_3 \end{aligned}$$

1) จงเขียนระบบสมการเชิงอนุพันธ์นี้ในรูปเมทริกซ์

2) จงแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์นี้

3) จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 4, y_3(0) = -2$$

<u>วิธีทำ</u> 1) จากโจทย์ จะได้ $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ หรือ $Y' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} Y$

2) เนื่องจากแต่ละสมการมีฟังก์ชันที่ไม่รู้ค่าเพียงฟังก์ชันเดียวและแต่ละสมการอิสระจากกัน จึงสามารถแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้

$y_1 = c_1 e^{3x}, y_2 = c_2 e^{-2x}$ และ $y_3 = c_3 e^{5x}$

หรืออยู่ในรูปเมทริกซ์ $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{-2x} \\ c_3 e^{5x} \end{bmatrix}$ เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

3) เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1(0) = 1$ จะได้ $1 = c_1 e^{3\cdot 0}$ หรือ $c_1 = 1$

$y_2(0) = 4$ จะได้ $4 = c_2 e^{-2\cdot 0}$ หรือ $c_2 = 4$

$y_3(0) = -2$ จะได้ $-2 = c_3 e^{5\cdot 0}$ หรือ $c_3 = -2$

ดังนั้น ผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $y_1 = e^{3x}, y_2 = 4e^{-2x}$ และ $y_3 = -2e^{5x}$

หรืออยู่ในรูปเมทริกซ์ $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 4e^{-2x} \\ -2e^{5x} \end{bmatrix}$

จากตัวอย่าง 8.6 จะเห็นว่า การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันที่ไม่รู้ค่าเพียงฟังก์ชันเดียวและเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม สามารถแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวได้โดยง่าย

ในกรณีที่เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A ไม่เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม การแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ $Y' = AY$ สามารถทำได้โดยพยายามแทนค่า Y ที่จะทำให้ระบบสมการใหม่มีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นทแยงมุม แล้วแก้ระบบสมการใหม่ที่ง่ายขึ้น ซึ่งจะได้ผลเฉลยของระบบสมการเดิม

สมมติแทนค่า

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_2 + \cdots + p_{1n}u_n \\ y_2 &= p_{21}u_1 + p_{22}u_2 + \cdots + p_{2n}u_n \\ &\vdots \\ y_n &= p_{n1}u_1 + p_{n2}u_2 + \cdots + p_{nn}u_n \end{aligned}\right\} \qquad \text{....................(8.17)}$$

หรืออยู่ในรูปเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

หรือ $Y = PU$

ในการแทนค่า p_{ij} ซึ่งเป็นค่าคงตัวที่จะต้องการหา เพื่อให้ระบบใหม่ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันที่ไม่รู้ค่า $u_1, u_2, \ldots, u_n$ มีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม โดยจะหา p_{ij} จากการหาอนุพันธ์ของแต่ละสมการใน (8.17) จะได้ว่า $Y' = PU'$ ซึ่งถ้าแทนค่า $Y = PU$ และ $Y' = PU'$ ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น $Y' = AY$ และถ้าสมมติว่า P เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันสำหรับการคูณได้ แล้วทำให้ได้ว่า

$$PU' = AY$$

หรือ $PU' = A(PU)$

หรือ $U' = (P^{-1}AP)U$

หรือ $U' = DU$

โดยที่ $D = P^{-1}AP$

ดังนั้น ถ้าต้องการเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ D ที่เป็นทแยงมุม จะต้องเลือก P เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้ ซึ่งสามารถสรุปวิธีการแก้ระบบสมการ $Y' = AY$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์และเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> หาเมทริกซ์ P ที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> แทนค่า $Y = PU$ และ $Y' = PU'$ เพื่อให้ได้ระบบสมการใหม่ $U' = DU$ ที่มีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม โดยที่ $D = P^{-1}AP$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> แก้ระบบสมการ $U' = DU$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> หา Y จากสมการ $Y = PU$

<u>ตัวอย่าง 8.7</u> กำหนดสมการเชิงอนพันธ์

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

1) จงแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์นี้

2) จงหาผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1(0) = 1, y_2(0) = 6$

<u>วิธีทำ</u> 1) จากโจทย์ จะได้ $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ หรือ $Y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} Y$

นั่นคือ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

ซึ่งเมทริกซ์ A นี้สามารถทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ โดยมีเมทริกซ์ P ที่มีหลักเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่เป็นอิสระเชิงเส้นของ A

เนื่องจาก $\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}$

$$=(1-\lambda)(-2-\lambda)-4$$
$$=\lambda^2+\lambda-6$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $\lambda^2+\lambda-6$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $\lambda^2+\lambda-6=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda=2$ หรือ -3

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 2 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(2)I_2)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda=2$ กำหนดให้ $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}1-2 & 1\\ 4 & -2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

นั่นคือ $-x_1+x_2=0$

หรือ $x_1=x_2$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 2 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$X=\begin{bmatrix}t\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ โดยที่ $t\neq 0$

จะได้ $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิลักษณะเฉพาะ E_2

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\ 1\end{bmatrix}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิลักษณะเฉพาะ E_{-3}

ดังนั้น $P=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{4}\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ จะเป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ A ทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}D&=P^{-1}AP\\ &=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{4}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

ถัดไป แทนค่า $Y = PU$ และ $Y' = PU'$ ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์โจทย์ จะได้ระบบสมการใหม่เป็นระบบที่มีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

$$\begin{aligned} U' &= DU \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} U \end{aligned}$$

หรือ $u_1' = 2u_1$

$u_2' = -3u_2$

จะได้ $u_1 = c_1e^{2x}, u_2 = c_2e^{-3x}$

หรือ $U = \begin{bmatrix} c_1e^{2x} \\ c_2e^{-3x} \end{bmatrix}$

ดังนั้น ผลเฉลยของระบบสมการโจทย์ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1e^{2x} \\ c_2e^{-3x} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1e^{2x} - \frac{1}{4}c_2e^{-3x} \\ c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2) เมื่อแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1(0) = 1, y_2(0) = 6$ ลงไปในผลเฉลย

$$\begin{aligned} c_1e^{2x} - \frac{1}{4}c_2e^{-3x} &= y_1 \\ c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} &= y_2 \end{aligned}$$

จะได้ $c_1e^{2(0)} - \frac{1}{4}c_2e^{-3(0)} = 1$

$c_1e^{2(0)} + c_2e^{-3(0)} = 6$

หรือ $c_1 - \frac{1}{4}c_2 = 1$ ....(8.18)

$c_1 + c_2 = 6$ ....(8.19)

แก้ระบบสมการหาค่าของ c_1, c_2 โดย

(8.19) – (8.18) : $c_1 + \frac{1}{4}c_2 = 5$

หรือ $c_2 = 4$

แทน $c_2 = 4$ ใน (8.19) จะได้ $c_1 = 6 - c_2 = 6 - 4$

ฉะนั้น $c_1 = 2, c_2 = 4$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $y_1 = 2e^{2x} - e^{-3x}, y_2 = 2e^{2x} + 4e^{-3x}$

แบบฝึกหัดบทที่ 8

1. จงบอกชื่อของสมการภาคตัดกรวยต่อไปนี้

1.1 $y+1=x^2$
1.2 $y= 2x^2$
1.3 $x^2+y^2=16$
1.4 $2x^2+2y^2=8$
1.5 $2x^2+3y=0$
1.6 $x^2-12y=0$
1.7 $4x^2+9y^2=36$
1.8 $9x^2-4y^2=36$
1.9 $x^2-y^2=4$
1.10 $5x^2+3y^2=1$

2. จงใช้วิธีการเลื่อนขนานของแกนพิกัดเพื่อเปลี่ยนสมการกำลังสองต่อไปนี้ให้เป็นภาคตัดกรวยรูปมาตรฐาน พร้อมทั้งบอกชื่อภาคตัดกรวยและสมการในระบบพิกัด $x'y'$

2.1 $7x^2+16y^2+28x-96y+60=0$
2.2 $25x^2+16y^2-100x-32y-284=0$
2.3 $3x^2-6x-y+1=0$
2.4 $x^2-2x-2y-3=0$
2.5 $x^2+y^2-2x+4y-5=0$
2.6 $x^2+y^2+2x-4y-10=0$
2.7 $x^2-5y^2+10y-25=0$
2.8 $16y^2-9x^2-32y+36x-164=0$

3. จงใช้การหมุนและวิธีการเลื่อนขนาน (ถ้าจำเป็น) เพื่อเปลี่ยนให้เป็นภาคตัดกรวยมาตรฐาน พร้อมทั้งบอกชื่อภาคตัดกรวยและสมการในระบบพิกัดสุดท้าย

3.1 $2x^2+8xy-4y^2-7=0$
3.2 $6x^2-12xy+y^2=30$
3.3 $x^3+2xy+y^2-8x+8y=0$
3.4 $x^2+xy+y^2=1$
3.5 $x^2-3xy+y^2=5$
3.6 $x^2+4xy+4y^2-5x-6=0$
3.7 $x^2+xy+y^2+x-y=3$
3.8 $4x^2-12xy+9y^2-52x+26y+81=0$

4. จงบอกชื่อของสมการผิวกำลังสองต่อไปนี้

4.1 $16x^2+36y^2+9z^2=144$
4.2 $4x^2-16y^2+z^2=16$
4.3 $16x^2-400y^2+25z^2=400$
4.4 $x^2-4y^2-z^2=4$
4.5 $9x^2+144y^2-16z^2=-144$
4.6 $36x^2+9y^2-4z^2=0$
4.7 $225x^2-400y^2+144z^2=0$
4.8 $4z=x^2+y^2$
4.9 $z=y^2-x^2$
4.10 $z^2=4-x^2-y^2$

5. จงใช้วิธีการเลื่อนขนาดของแกนพิกัดเพื่อเปลี่ยนสมการกำลังสองต่อไปนี้ให้เป็นผิวกำลังสองรูปมาตรฐาน พร้อมทั้งบอกชื่อผิวกำลังสองและสมการในระบบพิกัด $x'y'$

5.1 $4x^2+9y^2-25z^2+16x-18y+50z+900=0$
5.2 $4x^2-9y^2+8x+36y-288z-32=0$
5.3 $9x^2+4y^2-9z^2-18x-8y-18z=32$
5.4 $4x^2+25y^2+100z^2-32x-50y+200z=-89$

5.5 $4x^2+9y^2-25z^2+16x-18y+50z-900=0$

5.6 $4x^2+4y^2+z^2+8y-4z+4=0$

5.7 $z=4-x^2-y^2-2y$

5.8 $36x^2+4y^2-9z^2+72x-16y+18z=-43$

6. จงใช้การหมุนและวิธีการเลื่อนขนาน (ถ้าจำเป็น) เพื่อเปลี่ยนให้เป็นผิวกำลังสองรูปมาตรฐาน พร้อมทั้งบอกชื่อผิวกำลังสองและสมการในระบบพิกัดสุดท้าย

6.1 $3x^2+2y^2+3z^2-2xy-2yz-144=0$

6.2 $2x^2+2y^2+2z^2-4xz+3\sqrt{2x}+3\sqrt{2z}=0$

6.3 $-3y^2+2z^2+4xy+8z+12=0$

6.4 $6xy+6xz+6yz+x+y+z=4$

6.5 $5x^2+5y^2+2z^2+8xy+4xz+4yz-5=0$

6.6 $-x^2-y^2+z^2+6xy+2xz+2yz-12x+4y-10z-11=0$

6.7 $x^2+y^2+z^2+4xy-4=0$

6.8 $2xy+z=0$

7. จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการต่อไปนี้

7.1 $y_1'=-3y_1+y_2$
$y_2'=y_1-3y_2$

7.2 $y_1'=3y_1+2y_2$
$y_2'=4y_1+y_2$

7.3 $y_1'=y_2$
$y_2'=y_1$

7.4 $y_1'=2y_1+3y_2$
$y_2'=\dfrac{1}{3}y_1+2y_2$

7.5 $y_1'=-4y_1-6y_2$
$y_2'=y_1+y_2$

7.6 $y_1'=y_1+3y_2$
$y_2'=5y_1+3y_2$

7.7 $y_1'=2y_1-4y_2$
$y_2'=y_1-3y_2$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1(0)=3, y_2(0)=0$

7.8 $y_1'=2y_2$
$y_2'=2y_1$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1(0)=-9, y_2(0)=15$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 8

1. 1.1 พาราโบลา

   1.2 พาราโบลา

   1.3 วงกลม

   1.4 วงกลม

   1.5 พาราโบลา

   1.6 พาราโบลา

   1.7 วงรี

   1.8 ไฮเพอร์โบลา

   1.9 ไฮเพอร์โบลา

   1.10 วงรี

2. 2.1 $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{7}=1$ หรือ $\frac{(x')^2}{16}+\frac{(y')^2}{7}=1$, วงรี

   2.2 $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$ หรือ $\frac{(x')^2}{16}+\frac{(y')^2}{25}=1$, วงรี

   2.3 $(x-1)^2=\frac{1}{3}(y+2)$ หรือ $(x')^2=\frac{1}{3}y'$, พาราโบลา

   2.4 $(x-1)^2=\frac{1}{2}(y+2)$ หรือ $(x')^2=\frac{1}{2}y'$, พาราโบลา

   2.5 $(x-1)^2+(y+2)^2=(\sqrt{10})^2$ หรือ $(x')^2+(y')^2=10$, วงกลม

   2.6 $(x+1)^2+(y-2)^2=(\sqrt{15})^2$ หรือ $(x')^2+(y')^2=15$, วงกลม

   2.7 $\frac{x^2}{20}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$ หรือ $\frac{(x')^2}{20}-\frac{(y')^2}{4}=1$, ไฮเพอร์โบลา

   2.8 $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$ หรือ $\frac{(y')^2}{9}-\frac{(x')^2}{16}=1$, ไฮเพอร์โบลา

3. 3.1 $\frac{4(x')^2}{7}-\frac{6(y')^2}{7}=1$, ไฮเพอร์โบลา

   3.2 $\frac{(y')^2}{3}-\frac{(x')^2}{10}=1$, ไฮเพอร์โบลา

   3.3 $(x')^2=-\frac{32}{3\sqrt{2}}y'$, พาราโบลา

3.4 $\frac{3\ x'^{\ 2}}{2}+\frac{y'^{\ 2}}{2}=1$, วงรี

3.5 $\frac{y'^{\ 2}}{2}-\frac{x'^{\ 2}}{10}=1$, ไฮเพอร์โบลา

3.6 $\left(x'-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2=-\frac{2}{\sqrt{5}}\left(y'-\frac{5\sqrt{5}}{8}\right)$ หรือ $x''^{\ 2}=-\frac{2}{\sqrt{5}}y''$, พาราโบลา

3.7 $\frac{y'-\sqrt{2}^{\ 2}}{10}+\frac{3\ x'^{\ 2}}{10}=1$ หรือ $\frac{y''^{\ 2}}{10}+\frac{x''^{\ 2}}{10\,/\,3}=1$, วงรี

3.8 $\left(y'+\frac{7}{\sqrt{13}}\right)^2=8\sqrt{13}\left(x'-\frac{81}{8\sqrt{13}}\right)$ หรือ $y''^{\ 2}=8\sqrt{13}x''$, พาราโบลา

4. 4.1 ทรงรี

4.2 ทรงไฮเพอร์โบลาหนึ่งชิ้น

4.3 ทรงไฮเพอร์โบลาหนึ่งชิ้น

4.4 ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น

4.5 ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น

4.6 ทรงกรวยเชิงวงรี

4.7 ทรงกรวยเชิงวงรี

4.8 ทรงพาราโบลาเชิงวงรี

4.9 ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา

4.10 ทรงกลม

5. 5.1 $\frac{x+2^{\ 2}}{225}+\frac{y-1^{\ 2}}{100}-\frac{z-1^{\ 2}}{36}=-1$

หรือ $\frac{x'^{\ 2}}{225}+\frac{y'^{\ 2}}{100}-\frac{z'^{\ 2}}{36}=-1,$ ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น

5.2 $\frac{x+1^{\ 2}}{72}-\frac{y-2^{\ 2}}{32}=z$

หรือ $\frac{x'^{\ 2}}{72}-\frac{y'^{\ 2}}{32}=z',$ ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา

5.3 $\frac{x-1^{\ 2}}{4}+\frac{y-1^{\ 2}}{9}-\frac{z+1^{\ 2}}{4}=1$

หรือ $\frac{x'\ ^{2}}{4}+\frac{y'\ ^{2}}{9}-\frac{z'\ ^{2}}{4}=1,$ ทรงไฮเพอร์โบลาหนึ่งชิ้น

5.4 $\frac{x-4\ ^{2}}{25}+\frac{y-1\ ^{2}}{4}+\ z+1\ ^{2}=1$

หรือ $\frac{x'\ ^{2}}{25}+\frac{y'\ ^{2}}{4}+\ z'\ ^{2}=1,$ ทรงรี

5.5 $\frac{x+2\ ^{2}}{225}+\frac{y-1\ ^{2}}{100}-\frac{z-1\ ^{2}}{36}=1$

หรือ $\frac{x'\ ^{2}}{225}+\frac{y'\ ^{2}}{100}-\frac{z'\ ^{2}}{36}=1,$ ทรงไฮเพอร์โบลาหนึ่งชิ้น

5.6 $x^2+\ y+1\ ^{2}+\frac{z-2\ ^{2}}{4}=1$

หรือ $x'\ ^{2}+\ y'\ ^{2}+\frac{z'\ ^{2}}{4}=1,$ ทรงรี

5.7 $x^2+\ y+1\ ^{2}=-\ z-5$

หรือ $x'\ ^{2}+\ y'\ ^{2}=\ -z'\ ,$ ทรงพาราโบลาเชิงวงรี

5.8 $x+1\ ^{2}+\frac{y-2\ ^{2}}{9}=\frac{z-1\ ^{2}}{4}$

หรือ $x'\ ^{2}+\frac{y'\ ^{2}}{9}=\frac{z'\ ^{2}}{4},$ ทรงกรวยเชิงวงรี

6. 6.1 $x'\ ^{2}+3\ y'\ ^{2}+4\ z'\ ^{2}=144,$ ทรงรี

6.2 $y'\ ^{2}+2\ z'\ ^{2}=-3x',$ ทรงพาราโบลาเชิงวงรี

6.3 $z'\ ^{2}-\frac{x'\ ^{2}}{4}-\frac{y'+2\ ^{2}}{2}=1$

หรือ $z''\ ^{2}-\frac{x''\ ^{2}}{4}-\frac{y''\ ^{2}}{2}=1,$ ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น

6.4 $\frac{\left(z'+\frac{\sqrt{3}}{12}\right)^{2}}{\frac{11}{16}}-\frac{x'\ ^{2}}{\frac{11}{8}}-\frac{y'\ ^{2}}{\frac{11}{8}}=1$

หรือ $\frac{z''\ ^{2}}{\frac{11}{16}}-\frac{x''\ ^{2}}{\frac{11}{8}}-\frac{y''\ ^{2}}{\frac{11}{8}}=1,$ ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น

6.5 $\dfrac{x'^{2}}{\frac{1}{2}}+\dfrac{y'^{2}}{5}+\dfrac{z'^{2}}{5}=1,$ ทรงรี

6.6 $4\left(y'+\sqrt{2}\right)^{2}-3\left(x'-\sqrt{3}\right)^{2}=2\sqrt{6}\left(z'-\sqrt{6}\right)$

หรือ $4\left(y''\right)^{2}-3\left(x''\right)^{2}=2\sqrt{6}\left(z''\right)$, ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา

6.7 $\dfrac{x'^{2}}{\frac{4}{3}}-\dfrac{y'^{2}}{4}+\dfrac{z'^{2}}{4}=1,$ทรงไฮเพอร์โบลาหนึ่งชิ้น

6.8 $x'^{2}-y'^{2}=-z',$ ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา

7. 7.1 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -c_1e^{-4t}+c_2e^{-2t} \\ c_1e^{-4t}+c_2e^{-2t} \end{bmatrix}$ เมื่อ c_1,c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

7.2 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1e^{-t}+c_2e^{5t} \\ -2c_1e^{-t}+c_2e^{5t} \end{bmatrix}$ เมื่อ c_1,c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

7.3 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1e^{t}+c_2e^{-t} \\ c_1e^{t}-c_2e^{-t} \end{bmatrix}$ เมื่อ c_1,c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

7.4 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1e^{t}+c_2e^{3t} \\ \left(-c_1e^{t}+c_2e^{3t}\right)/3 \end{bmatrix}$ เมื่อ c_1,c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

7.5 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2c_1e^{-t}-3c_2e^{-2t} \\ c_1e^{-t}+c_2e^{-2t} \end{bmatrix}$ เมื่อ c_1,c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

7.6 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1e^{-2t}+c_2e^{6t} \\ -c_1e^{-2t}+c_2e^{6t} \end{bmatrix}$ เมื่อ c_1,c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

7.7 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4e^{t}-e^{-2t} \\ e^{t}-e^{-2t} \end{bmatrix}$

7.8 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3e^{2t}-12e^{-2t} \\ 3e^{2t}+12e^{-2t} \end{bmatrix}$