บทที่ 1

เมทริกซ์

โดยทั่วไป เราสามารถพบเห็นข้อมูลหลายชนิดที่เขียนอยู่ในรูปกลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาจัดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้มากมายในชีวิตประจำวัน ตัวอย่างเช่น ร้านค้าแห่งหนึ่งซื้อผลไม้มาขาย 5 ชนิด คือ ทุเรียน เงาะ มังคุด ส้ม และลองกอง โดยราคาต้นทุนคิดเป็นต่อกิโลกรัม แสดงเป็นตารางดังนี้

ชนิดผลไม้	ทุเรียน	เงาะ	มังคุด	ส้ม	ลองกอง
ราคา/กิโลกรัม	42	23	35	50	40

ซึ่งสามารถเขียนสั้น ๆ เป็น $\begin{bmatrix} 42 & 23 & 35 & 50 & 40 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 42 \\ 23 \\ 35 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$

หรือในการแข่งขันฟุตบอลรายการหนึ่ง ตารางคะแนนแจ้งผลการแข่งขันดังนี้

ทีม	ชนะ	เสมอ	แพ้
A	5	3	0
B	4	2	2
C	3	2	3
D	2	1	5
E	1	2	5

ซึ่งสามารถเขียนสั้น ๆ เป็น $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

หรือในทางคณิตศาสตร์ เราสามารถจัดเรียงสัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงส้น (System of Linear Equations) ต่อไปนี้

$$5x+3y=1$$

$$x-2y=8$$

ให้อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้เป็น $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

ซึ่งที่กล่าวมาทั้งหมดนี้เป็นตัวอย่างเบื้องต้นของเมทริกซ์ทั้งสิ้น และเนื่องจากวิชาพีชคณิตเชิงเส้นส่วนหนึ่งเป็นการศึกษาระบบสมการเชิงเส้น ในบทนี้จะขอทบทวนสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ ของเมทริกซ์และการดำเนินการบนเมทริกซ์ เพื่อใช้เมทริกซ์เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไป โดยการพิสูจน์สมบัติบางประการที่สำคัญในการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง และการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ รวมถึงการพิสูจน์สมบัติบางประการที่สำคัญของดีเทอร์มิแนนต์และตัวผกผันสำหรับการคูณจะเว้นไว้ เพื่อให้ฝึกปฏิบัติด้วยตนเอง

1.1 เมทริกซ์ (Matrix)

นิยาม 1.1 เมทริกซ์ คือ กลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาจัดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและบรรจุภายในเครื่องหมาย $[\ ]$ เขียนในรูปทั่วไป ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ หรือ } \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

อาจใช้เครื่องหมาย $(\ )$ แทน $[\ ]$ ก็ได้ เรียก a_{ij} ว่า **สมาชิก** (Element หรือ Entry) ในแถว (Row) ที่ i และหลัก (Column) ที่ j ของเมทริกซ์ โดยที่ $i=1,2,3,\ldots,m$ และ $j=1,2,3,\ldots,n$ สำหรับเมทริกซ์ที่มี m แถว และ n หลัก กล่าวว่าเมทริกซ์นั้นมี**มิติ** (Dimension) หรือ **อันดับ** (Order) $m\times n$

ตัวอย่าง 1.1 จงบอกมิติและแจกแจงสมาชิกในแต่ละเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$1)\ A=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/5 \end{bmatrix}$$

$$2)\ B=\begin{bmatrix} 2 & 0.9 & \sqrt{11} & \pi \end{bmatrix}$$

$$3)\ C=\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & x^3 \end{bmatrix}$$

$$4)\ D=\begin{bmatrix} \sin^2\theta & \cos\theta & \tan\theta^2 \\ 2\sin\theta & \sec\theta & \cot(2\theta) \end{bmatrix}$$

วิธีทำ 1) A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×1

และมีสมาชิกดังนี้ $a_{11}=1,\ a_{21}=0,\ a_{31}=-\dfrac{3}{5}$

2) B เป็นเมทริกซ์มิติ 1×4

และมีสมาชิกดังนี้ $b_{11}=2, b_{12}=0.9, b_{13}=\sqrt{11}, b_{14}=\pi$

3) C เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2

และมีสมาชิกดังนี้ $c_{11}=1, c_{12}=x, c_{21}=x^2, c_{22}=x^3$

4) D เป็นเมทริกซ์มิติ 2×3

และมีสมาชิกดังนี้ $d_{11}=\sin^2\theta, d_{12}=\cos\theta, d_{13}=\tan\theta^2$

$$d_{21}=2\sin\theta, d_{22}=\sec\theta, d_{23}=\cot(2\theta)$$ ▲

เมทริกซ์บางเมทริกซ์มีลักษณะพิเศษ ซึ่งจะเป็นลักษณะที่พบเจอได้บ่อยครั้ง เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงต่อไป จะสรุปชนิดของเมทริกซ์ที่สำคัญ ๆ ได้ดังนี้

ลำดับ	ชื่อ	นิยาม	ตัวอย่าง
1	เมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix)	เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก จะเรียกเมทริกซ์จัตุรัสที่มี n แถว n หลัก ว่า “เมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ” หรือ “เมทริกซ์จัตุรัสมิติ n ”	$A=\begin{bmatrix}2&1\\0&4\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 2 $B=\begin{bmatrix}3&2&4\\1&0&5\\2&1&7\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซีจัตุรัสมิติ 3
2	เมทริกซ์สี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Matrix)	เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักไม่เท่ากัน	$A=\begin{bmatrix}1&4\\2&6\\9&-11\end{bmatrix}$
3	เมทริกซ์แนวตั้ง (Column Matrix) หรือเวกเตอร์หลัก (Column Vector)	เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเพียงหลักเดียว	$A=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$
4	เมทริกซ์แนวนอน (Row Matrix) หรือเวกเตอร์แถว (Row Vector)	เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเพียงแถวเดียว	$A=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$
5	เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix หรือ Null Matrix)	เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ทั้งหมด เขียนแทนด้วย $\underline{0}$	$\underline{0}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$ $\underline{0}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ $\underline{0}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
6	เมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix)	เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก (Main Diagonal) เป็นจำนวนจริงใด ๆ และสมาชิกนอกแนวทแยงมุมหลักทุกตัวเป็นศูนย์	$A=\begin{bmatrix}3&0\\0&7\end{bmatrix}$ เส้นทแยงมุมหลัก $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$
7	เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar Matrix)	เมทริกซ์ทแยงมุมที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันทุกตัว	$A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}$
8	เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) หรือเมทริกซ์หนึ่งหน่วย (Unit Matrix)	เมทริกซ์สเกลาร์มิติ $n \times n$ ที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากับ 1 ใช้สัญลักษณ์ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ n	$I_1=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$ $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ b

ลำดับ	ชื่อ	นิยาม	ตัวอย่าง
9	เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix)	ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ แล้วเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A (เขียนแทนด้วย A^t) คือ เมทริกซ์ซึ่งได้จากการนำแถวของ A มาสร้างให้เป็นหลักของเมทริกซ์ A^t นั่นคือ ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ แล้ว $A^t = \left[a_{ji}\right]_{n\times m}$	ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ จะได้เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A คือ $A^t = \begin{bmatrix} 4 & -7 \end{bmatrix}$ ให้ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ B คือ $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
10	เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix)	เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมบัติว่า $a_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุกค่าของ i และ j นั่นคือ ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตร จะได้ $A^t = A$	$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ นั่นคือ $A^t = A$
11	เมทริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew-Symmetrix Matrix)	เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทุกตัว และเป็นเมทริกซ์ที่มีสมบัติว่า $a_{ij} = -a_{ji}$ สำหรับทุกค่าของ i และ j นั่นคือ ถ้า A เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร จะได้ $A^t = -A$	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $= (-1)\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -A$
12	เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Non-Singular Matrix)	เมทริกซ์จัตุรัสที่มีตัวผกผันสำหรับการคูณ หรือกล่าวคือ เมทริกซ์ไม่เอกฐานเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีค่าตัวกำหนดหรือค่าดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant) ไม่เท่ากับศูนย์	$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/10 \\ -1/5 & 1/10 \end{bmatrix}$ $\det(A) = (1)(4) - (-3)(2) = 10 \neq 0$
13	เมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix)	เมทริกซ์จัตุรัสที่ไม่มีตัวผกผันสำหรับการคูณ หรือกล่าวคือ เมทริกซ์เอกฐานเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีค่าดีเทอร์มิแนนต์เป็นศูนย์	$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ A ไม่มีตัวผกผัน $\det(A) = (2)(4) - (1)(8) = 0$

ลำดับ	ชื่อ	นิยาม	ตัวอย่าง
14	เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix)	เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกอยู่ด้านใดด้านหนึ่งของแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด โดยจะเรียก “เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix)" ถ้าสมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทุกตัว แต่ถ้าสมาชิกเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทุกตัว จะเรียกเมทริกซ์สามเหลี่ยมนั้นว่า “เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix)”	$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}$ A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน แล้ว $\det(A)=1\cdot4\cdot6=24$ $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{bmatrix}$ B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง แล้ว $\det(B)=1\cdot3\cdot6=18$
15	เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal Matrix)	เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมบัติว่า $A^t=A^{-1}$ หรือกล่าวคือ เมทริกซ์เชิงตั้งฉากเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่ไม่เป็นเอกฐาน	$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ จะได้ $A^t=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=A^{-1}$ นั่นคือ $AA^t=I=A^tA$
16	เมทริกซ์ปรกติ (Normal Matrix)	เมทริกซ์ที่มีสมบัติ $AA^t=A^tA$ นั่นคือ ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตร เมทริกซ์เสมือนสมมาตร หรือ เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก แล้ว A จะเป็นเมทริกซ์ปรกติ	$A=\begin{bmatrix}5&4&7\\4&1&3\\7&3&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$
17	เมทริกซ์ย่อย (Submatrix) ของ A	เมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวบางแถว หรือหลักบางหลักของเมทริกซ์ A ออกไป	$A=\left[\begin{array}{cc\|cc}2&3&5&-1\\1&2&3&5\\\hline -2&1&4&2\end{array}\right]$ จะได้ $A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$ โดยที่ $A_{11}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$ $A_{12}=\begin{bmatrix}5&-1\\3&5\end{bmatrix}$ $A_{21}=\begin{bmatrix}-2&1\end{bmatrix}$ และ $A_{22}=\begin{bmatrix}4&2\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ย่อยของ A

1.2 การดำเนินการบนเมทริกซ์ (Matrix Operations)

1.2.1 การเท่ากัน (Equality)

เมทริกซ์ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times q}$ เท่ากัน เขียนแทนด้วย $A=B$ ก็ต่อเมื่อ A และ B มีมิติเดียวกัน ($m=p$ และ $n=q$) และ $a_{ij}=b_{ij}$ สำหรับทุกค่าของ i และ j

เมทริกซ์ B และ D มีมิติ 3×3 เท่ากัน แต่ $b_{33}\neq d_{33}$
ดังนั้น $B\neq D$

จากเมทริกซ์ A และ C ซึ่งมีมิติเท่ากับ 2×3 เท่ากัน ถ้ากำหนดให้ x ในเมทริกซ์ C มีค่าเท่ากับ 2 จะได้ว่า $A=C$

1.2.2 การบวก (ลบ) เมทริกซ์ (Addition, Subtraction)

การนำเอาสมาชิกของเมทริกซ์ซึ่งอยู่ในตำแหน่งเดียวกันของเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากันมา บวก (ลบ) กันทำให้ได้เมทริกซ์ใหม่ เช่น ถ้าให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ จะได้ $A\pm B=\left[a_{ij}\pm b_{ij}\right]_{m\times n}$ เมื่อ $i=1,2,3,\dots,m$ และ $j=1,2,3,\dots,n$

<u>ตัวอย่าง 1.2</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&0&3\\0&-2&-4\end{bmatrix}$ จงหา $A+B$

<u>วิธีทำ</u>

$$A+B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0&3\\0&-2&-4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+(-1)&2+0&3+3\\4+0&5+(-2)&6+(-4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&2&6\\4&3&2\end{bmatrix}$$

▲

สมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับการบวกของเมทริกซ์

ถ้า A,B และ C เป็น $m\times n$ เมทริกซ์ จะได้ว่า

1. $A+B$ เป็น $m\times n$ เมทริกซ์ (ปิดสำหรับการบวก)
2. $A+B=B+A$ (สลับที่สำหรับการบวก)
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (เปลี่ยนหมู่)
4. $A+\underline{0}=A=\underline{0}+A$ (เอกลักษณ์สำหรับการบวก)

5. $A+(-A)=\underline{0}=(-A)+A$ (ผกผันสำหรับการบวก)

6. $A+B=\underline{0}$ แล้ว $A=-B$

7. $A+B=A+C$ แล้ว $B=C$

8. $B+A=C+A$ แล้ว $B=C$

1.2.3 การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงหรือสเกลาร์ (Scalar Multiplication)

ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ c เป็นจำนวนจริงหรือสเกลาร์ แล้ว $cA=\left[ca_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $Ac=\left[a_{ij}c\right]_{m\times n}$

<u>ตัวอย่าง 1.3</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ จงหา $2A$ และ $-A$

<u>วิธีทำ</u>

$$2A=\begin{bmatrix}2(2) & 2(3)\\ 2(4) & 2(0)\\ 2(1) & 2(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 8 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

และ

$$-A=(-1)A$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -4 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

▲

<u>ตัวอย่าง 1.4</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$ จงหา $A-B$

<u>วิธีทำ</u>

$$A-B=A+(-1)B$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & -4 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$ ▲

ตัวอย่าง 1.5 ร้านค้าแห่งหนึ่งซื้อผลไม้มาขายเพียง 5 ชนิด คือ ทุเรียน เงาะ มังคุด ส้ม และลองกอง โดยราคาต้นทุนคิดเป็นต่อกิโลกรัม แสดงเป็นตารางได้ดังนี้

ชนิดผลไม้	ทุเรียน	เงาะ	มังคุด	ส้ม	ลองกอง
ราคา/กิโลกรัม	42	23	35	50	40

ร้านค้าแห่งนี้ต้องการนำผลไม้เหล่านั้นไปขาย โดยมีความต้องการที่จะให้ได้กำไรกิโลกรัมละ 10% ของราคาผลไม้ทุกชนิด จงคำนวณหาราคาขายต่อกิโลกรัม

วิธีทำ นำข้อมูลในตาราง แปลงเป็นเมทริกซ์ จะได้ $\begin{bmatrix} 42 \\ 23 \\ 35 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$

เมื่อต้องการกำไรกิโลกรัมละ 10% ของราคาผลไม้ทุกชนิด จะได้ราคาขายเป็น

$$\frac{110}{100}\begin{bmatrix} 42 \\ 23 \\ 35 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 46.2 \\ 25.3 \\ 38.5 \\ 55 \\ 44 \end{bmatrix}$$

นั่นคือพ่อค้าจะต้องขายทุเรียนกิโลกรัมละ 46.2 บาท เงาะกิโลกรัมละ 25.3 บาท มังคุดกิโลกรัมละ 38.5 บาท ส้มกิโลกรัมละ 55 บาท และลองกองกิโลกรัมละ 44 บาท ▲

สมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงหรือสเกลาร์

ถ้าให้ c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ A,B เป็น $m\times n$ เมทริกซ์ จะได้

1. $(cd)A=c(dA)$ 2. $c(A+B)=cA+cB$

3. $(c+d)A=cA+dA$ 4. $(-1)A=-A$

1.2.4 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ (Matrix Multiplication)

ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ จะได้ผลคูณ $C=AB=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ โดย $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$ หรือกล่าวว่า c_{ij} คือสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์ C ซึ่งได้จากการนำสมาชิกแถวที่ i ของ A คูณกับสมาชิกในหลักที่ j ของ B เป็นคู่ไปตามลำดับ แล้วนำมาบวกกัน

ข้อสังเกต 1. ผลคูณของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B จะหาได้เมื่อจำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถว ของ B

2. เมทริกซ์ที่เป็นผลลัพธ์จะมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวของ A และจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของ B

<u>ตัวอย่าง 1.6</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ จงหา AB

<u>วิธีทำ</u> $AB=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$

โดยที่

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=(1)(1)+(-2)(1)=-1$$

$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=(1)(-1)+(-2)(2)=-5$$

$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=(0)(1)+(4)(1)=4$$

$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=(0)(-1)+(4)(2)=8$$

ดังนั้น $AB=\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 4 & 8\end{bmatrix}$ ▲

เพื่อความสะดวกในการทำความเข้าใจ ให้ดูแผนภาพต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2}} & \cdots & \boxed{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & & & \vdots\\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix}$$

โดยที่ $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}$

<u>ตัวอย่าง 1.7</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$ จงหา AB

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาแผนผังการคูณของเมทริกซ์ A และ B ตามขั้นตอนต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix}\boxed{1 \quad 2 \quad 0}\\ 0 \quad -1 \quad 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}0\\1\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\-2\\-1\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\0\\4\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & \square & \square\\ \square & \square & \square\end{bmatrix}$$

จากแผนผังการคูณจะได้ผลคูณคือ $(1)(0)+(2)(1)+(0)(3)=2$

$$\begin{bmatrix}\boxed{1 \quad 2 \quad 0}\\ 0 \quad -1 \quad 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{matrix}0\\1\\3\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\-2\\-1\end{matrix}} & \begin{matrix}-1\\0\\4\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & \square\\ \square & \square & \square\end{bmatrix}$$

จากแผนผังการคูณจะได้ผลคูณคือ $(1)(1)+(2)(-2)+(0)(-1)=-3$

$$\begin{bmatrix}\boxed{1 \quad 2 \quad 0}\\ 0 \quad -1 \quad 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{matrix}0\\1\\3\end{matrix} & \begin{matrix}1\\-2\\-1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-1\\0\\4\end{matrix}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ \square & \square & \square\end{bmatrix}$$

จากแผนผังการคูณจะได้ผลคูณคือ $(1)(-1)+(2)(0)+(0)(4)=-1$

$$\begin{bmatrix}1 \quad 2 \quad 0\\ \boxed{0 \quad -1 \quad 2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}0\\1\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\-2\\-1\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\0\\4\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ 5 & \square & \square\end{bmatrix}$$

จากแผนผังการคูณจะได้ผลคูณคือ $(0)(0)+(-1)(1)+(2)(3)=5$

$$\begin{bmatrix}1 \quad 2 \quad 0\\ \boxed{0 \quad -1 \quad 2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{matrix}0\\1\\3\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\-2\\-1\end{matrix}} & \begin{matrix}-1\\0\\4\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ 5 & 0 & \square\end{bmatrix}$$

จากแผนผังการคูณจะได้ผลคูณคือ $(0)(1)+(-1)(-2)+(2)(-1)=0$

$$\begin{bmatrix}1 \quad 2 \quad 0\\ \boxed{0 \quad -1 \quad 2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{matrix}0\\1\\3\end{matrix} & \begin{matrix}1\\-2\\-1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-1\\0\\4\end{matrix}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ 5 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

จากแผนผังการคูณจะได้ผลคูณคือ $(0)(-1)+(-1)(0)+(2)(4)=8$

จะได้ว่า $AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ 5 & 0 & 8\end{bmatrix}$ ▲

ตัวอย่าง 1.8 ชาวสวนผลไม้ใน จ.เชียงใหม่ ได้บรรทุกผลไม้เพื่อจะเลือกส่งไปขายยังหนึ่งจังหวัดจาก 4 จังหวัด ดังนี้ จ.ตาก จ.นครราชสีมา จ.กาญจนบุรี และกรุงเทพฯ โดยในรถผลไม้คันนี้ประกอบด้วยลำไย 900 เข่ง ลิ้นจี่ 700 เข่ง และสตอเบอรี่ 400 เข่ง ราคาขายต่อเข่งจะขึ้นกับชนิดของผลไม้และระยะทางของจังหวัดซึ่งกำหนดให้ตามตารางดังนี้

ชนิดผลไม้ / จังหวัด	ลำไย	ลิ้นจี่	สตอเบอรี่
ตาก	300	200	500
นครราชสีมา	400	300	200
กาญจนบุรี	500	100	200
กรุงเทพฯ	400	200	300

อยากทราบว่าจังหวัดอะไรที่รถบรรทุกผลไม้ควรจะไปส่ง เพื่อที่ว่าชาวสวนจะได้รับกำไรสูงสุดจากการขายผลไม้ของเขา

วิธีทำ จากข้อความว่ารถผลไม้คันนี้ประกอบด้วยลำไย 900 เข่ง ลิ้นจี่ 700 เข่ง และสตอเบอรี่ 400 เข่ง

สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 900 \\ 700 \\ 400 \end{bmatrix}$

และรายได้จากการบรรทุกผลไม้เพื่อส่งไปขายทั้ง 4 จังหวัด เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} 300 & 200 & 500 \\ 400 & 300 & 200 \\ 500 & 100 & 200 \\ 400 & 200 & 300 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 900 \\ 700 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300(900)+200(700)+500(400) \\ 400(900)+300(700)+200(400) \\ 500(900)+100(700)+200(400) \\ 400(900)+200(700)+300(400) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 610,000 \\ 650,000 \\ 600,000 \\ 620,000 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่ารายได้จากการบรรทุกผลไม้ไปขายที่ จ.นครราชสีมา มากที่สุด ดังนั้น ชาวสวนควรจะเลือกไปส่งผลไม่ที่ จ.นครราชสีมา เพื่อที่ว่าชาวสวนจะได้รับกำไรสูงสุดจากการขายผลไม้ของเขา ▲

สมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

1. AB เป็นเมทริกซ์ เมื่อ A และ B คูณกันได้ (ปิดสำหรับการคูณ)
2. $(AB)C = A(BC)$ (เปลี่ยนหมู่)
3. $A(B+C) = AB + AC$
   $(B+C)A = BA + CA$ (การแจกแจง)
4. $AI = A = IA$ (เอกลักษณ์สำหรับการคูณ)
5. AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA

ตัวอย่างเช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ และ $BA = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $AB \neq BA$

นั่นคือ AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA

สมบัติบางประการที่สำคัญในการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง และการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ ถ้า A, B, C เป็นเมทริกซ์ใด ๆ และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $(A^t)^t = A$
2. $(\cdots(\,(\overbrace{A^t)^t)\cdots)^t}^{n \text{ ตัว}} = \begin{cases} □ & \text{เมื่อ □ เป็นจำนวนคู่} \\ □^{□} & \text{เมื่อ □ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$
3. $(A+B)^t = A^t + B^t = B^t + A^t$
4. $(A-B)^t = A^t - B^t$
5. $(cA)^t = cA^t$
6. $(AB)^t = B^t A^t$
7. ถ้า $AB = \underline{0}$ ไม่จำเป็นที่ $A = \underline{0}$ หรือ $B = \underline{0}$
8. ถ้า $AB = AC$ ไม่จำเป็นที่ $B = C$
9. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้วจะได้เมทริกซ์ยกกำลังเป็น

$$A^2 = AA, A^3 = A^2A = AA^2, \ldots, A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ ตัว}}$$

ข้อสังเกต • ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว

1. AA^t จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร
2. $A+A^t$ จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร
3. $A-A^t$ จะเป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร

• ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์สมมาตร แล้ว

1. A^2 จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร
2. $A+B$ จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร

1.2.5 ตัวกำหนดของเมทริกซ์หรือดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

ถ้าให้ A เป็น $n\times n$ เมทริกซ์ ได้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ ดังนั้น

▹ ถ้า A เป็น 1×1 เมทริกซ์ เมื่อ $A=[a_{11}]$ จะได้ $|A|=a_{11}$

▹ ถ้า A เป็น 2×2 เมทริกซ์ เมื่อ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

จะได้ $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

<u>ตัวอย่าง 1.9</u> จงหา $\det A$ เมื่อกำหนด $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> $\det A=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

$=(2)(-1)-(3)(5)$

$=-17$ ▲

▹ ถ้า A เป็น 3×3 เมทริกซ์ เมื่อ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

จะได้ $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

$$=\left(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\right)-\left(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{21}a_{12}\right)$$

<u>ตัวอย่าง 1.10</u> จงหา $\det A$ เมื่อกำหนด $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> $\det A=\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & -4 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right.$

$$=(2)(4)(1)+(-3)(2)(3)+(-4)(-1)(10)$$
$$-(3)(4)(-4)-(10)(2)(2)-(1)(-1)(-3)$$

$$=8-18+40+48-40-3$$

$$=35$$ ▲

วิธีนี้เป็นวิธีลัดในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่งถ้าไม่ทำเช่นนี้ เราต้องหา $\det A$ โดยใช้วิธีตรง (วิธีทั่วไป) ซึ่งเป็นการหาดีเทอร์มิแนนต์โดยอาศัยไมเนอร์ (Minor) และโคแฟกเตอร์ (Cofactor)

▹ การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์มิติ 4×4 ขึ้นไป ไม่มีวิธีลัด ถ้าจะหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ ต้องใช้วิธีตรงเท่านั้น นั่นคือ จำเป็นต้องทราบความหมายของคำว่าไมเนอร์และโคแฟกเตอร์ให้เข้าใจก่อน เพื่อเป็นพื้นฐานในการหาดีเทอร์มิแนนต์ ซึ่งการหาไมเนอร์และโคแฟกเตอร์จะถูกกล่าวถึงต่อไปนี้

ไมเนอร์ ของสมาชิด a_{ij} เขียนแทนด้วย M_{ij} ของเมทริกซ์จัตุรัส $n\times n$ เมื่อ $n\geq 2$ คือดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ย่อยของ A ที่ตัดแถวที่ i และหลักที่ j ออกไปเช่น จาก

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ จะได้ } M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}$$

<u>ตัวอย่าง 1.11</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $M_{11},M_{12},M_{13},M_{21},M_{22},M_{33}$

<u>วิธีทำ</u> $$M_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1)(1)-(2)(0)=-1$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(3)(1)-(2)(1)=1$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=(3)(0)-(-1)(1)=1$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=(2)(1)-(3)(0)=2$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(1)(1)-(3)(1)=-2$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=(1)(-1)-(2)(3)=-7$$ ▲

โคแฟกเตอร์ ของสมาชิก a_{ij} เขียนแทนด้วย C_{ij} ของเมทริกซ์จัตุรัส $n\times n$ เมื่อ $n\geq 2$ คือผลคูณระหว่าง $(-1)^{i+j}$ กับไมเนอร์ของ a_{ij} ดังนั้น $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

<u>ตัวอย่าง 1.12</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -6\\ 1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$ จงหา $C_{11},C_{12},C_{13},C_{23}$

<u>วิธีทำ</u>

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=(1)(-13)=-13$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix}=(-1)(5)=-5$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=(1)(2)=2$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=(-1)(4)=-4$$ ▲

ดังนั้น ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส $n\times n$ เมื่อ $n\geq 2$ หมายถึง ผลรวมของการนำเอาสมาชิกแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งคูณกับโคแฟกเตอร์ในแถวนั้นหรือหลักนั้น ๆ นั่นคือ ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เมื่อ $n\geq 2$ จะได้

$$\det A=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}\ ;\ i\in\{1,2,3,...,n\}$$

หรือ $$\det A=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}\ ;\ j\in\{1,2,3,...,n\}$$

<u>**ตัวอย่าง 1.13**</u> ให้ $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det A$

<u>**วิธีทำ**</u> เลือกใช้แถวที่ 1 จะได้ว่า

$$\det A=(-1)^{1+1}(4)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(0)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=(1)(4)(-8)+(-1)(-1)(-3)+0=-35$$

หรือเลือกใช้หลักที่ 3 จะได้ว่า

$$\det A=(-1)^{1+3}(0)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}(1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}(-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=0+(-1)(1)(21)+(1)(-1)(14)=-35$$ ▲

ข้อสังเกต เพื่อความสะดวกและรวดเร็วในการคำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ ให้เลือกแถวหรือหลักที่มีสมาชิกที่เป็นศูนย์จำนวนมาก ๆ

สมบัติบางประการที่สำคัญของดีเทอร์มิแนนต์

เมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n\times n$

1. $\det(AB)=\det A\cdot\det B$

เช่น ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\det A=-2$ และ $\det B=-5$

และ $\det A\det B=(-2)(-5)=10$

เพราะว่า $AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\det(AB)=10$

ดังนั้น $\det(AB)=\det A\det B$

2. $\det(A^t)=\det A$

เช่น ให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

แล้ว $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

และ $\det\left(A^t\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

นั่นคือ $\det\left(A^t\right) = \det A$

3. $\det I = 1$

เช่น ให้ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det I_2 = 1$ และ $\det I_3 = 1$

4. $\det\left(A^n\right) = \left(\det A\right)^n$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -31$

เพราะว่า $A^3 = \begin{bmatrix} 13 & -7 & 23 \\ -9 & 37 & 14 \\ 13 & 90 & 42 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det\left(A^3\right) = \begin{vmatrix} 13 & -7 & 23 \\ -9 & 37 & 14 \\ 13 & 90 & 42 \end{vmatrix} = -29791$

นั่นคือ $\left(\det A\right)^3 = \left(-31\right)^3 = -29791 = \det\left(A^3\right)$

5. $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = -4$

และ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{-4}$

นั่นคือ $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$

6. $\det(kA) = k^n \det A$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

เช่น ถ้าให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = -2$

เพราะว่า $4A = 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det(4A) = -32$

นั่นคือ $\det(4A) = -32 = 4^2(-2) = k^n \det A$

หรือถ้าให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = 29$

เพราะว่า $3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 12 & 6 & 15 \\ -9 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det(3A) = 783$

นั่นคือ $\det(3A) = 783 = 3^3(29) = k^n \det A$

7. $\det(-A) = \begin{cases} \det\square & \text{เมื่อ } \square \text{ มีมิติเป็นเลขคู่เช่น } 2\times 2 \\ -\det\square & \text{เมื่อ } \square \text{ มีมิติเป็นเลขคี่เช่น } 3\times 3 \end{cases}$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

จะได้ $\det A = (1)(4) - (2)(3) = -2$

เพราะว่า $-A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{bmatrix}_{2\times 2}$

จะได้ $\det A=(-1)(-4)-(-2)(-3)=-2$

นั่นคือ $\det(-A)=\det A$

หรือถ้าให้ $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -4\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & 10 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$

จะได้ $\det A=35$

เพราะว่า $-A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -2\\ -3 & -10 & -1\end{bmatrix}_{3\times 3}$

จะได้ $\det(-A)=-35$

นั่นคือ $\det(-A)=-\det A$

8. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่แถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) เป็น 0 ทั้งแถว (หรือทั้งหลัก) จะได้ $\det A=0$

เช่น ให้ $A=\begin{bmatrix}3 & 6 & 10\\ 0 & 5 & 8\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 7 & 0\\ 4 & 6 & 0\end{bmatrix}$

จะได้ $\det A=0$ และ $\det B=0$

9. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีสองแถวหรือสองหลักใด ๆ ที่มีสมาชิกเท่ากัน จะได้ $\det A=0$

เช่น ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ จะพบว่า แถวที่ 2 และ 3 เหมือนกัน

จะได้ $\det(A)=(-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}(0)\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}(2)\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}$

$=(-1)(-1)(6)+0+(-1)(2)(3)$

$=0$

10. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการคูณแต่ละสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง k แล้ว $\det B = k \det A$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

และ $\det B = ka_{11}a_{22} - a_{21}ka_{12} = k\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)$

นั่นคือ $|B| = k|A|$

11. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกอยู่เหนือหรือใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 ทั้งหมด $\det A$ เท่ากับผลคูณของสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = (3)(5)(7) = 105$

และ $\det B = (1)(7)(5) = 35$

12. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากเมทริกซ์ A โดยการสลับแถว (หลัก) คู่ใดคู่หนึ่ง จะได้ $\det B = -\det A$

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$\det B = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)$

$\det C = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)$

นั่นคือ $\det A = -\det B = -\det C$

หรือ $\det B = \det C = -\det A$

13. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากเมทริกซ์ A โดยการนำค่าคงที่ไปคูณแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) และนำไปบวกหรือลบกับอีกแถว (หลัก) หนึ่งซึ่งไม่ใช่แถว (หลัก) เดิม แล้ว $\det B = \det A$

เช่น ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A=(-1)^{2+1}(4)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+0+(-1)^{2+3}(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

$=(-1)(4)(4)+(-1)(1)(-12)$

$=4$

ถ้าให้ B ได้จากการคูณแถวที่ 1 ของ A ด้วย 2 แล้วบวกกับแถวที่ 3 ของ A

จะได้ $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

และ $\det B=(-1)^{2+1}(4)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+0+(-1)^{2+3}(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$

$=(-1)(4)(4)+(-1)(1)(-12)$

$=4$

นั่นคือ $\det B=\det A=4$

หรือถ้าให้ C ได้จากการคูณหลักที่ 2 ของ A ด้วย -1 และบวกกับหลักที่ 1 ของ A

จะได้ $C=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

และ $\det C=(-1)^{2+1}(4)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+0+(-1)^{2+3}(1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$

$=(-1)(4)(4)+(-1)(1)(-12)$

$=4$

นั่นคือ $\det C=\det A=4$

1.2.6 เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ (Inverse of a Matrix)

เมทริกซ์ที่จะหาตัวผกผันสำหรับการคูณได้ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์นั้นต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัสและต้องมีค่าดีเทอร์มิแนนต์ไม่เท่ากันศูนย์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันสำหรับการคูณได้ แล้วจะใช้ A^{-1} เป็นสัญลักษณ์แทน เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณของ A

การหาตัวผกผันสำหรับการคูณของเมทริกซ์

- ถ้า A เป็น 1×1 เมทริกซ์ เมื่อ $A=\left[a_{11}\right]$ โดยที่ $a_{11}\neq 0$

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}}$$

- ถ้า A เป็น 2×2 เมทริกซ์ เมื่อ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ และ $\det A\neq 0$ จะได้

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$

<u>**ตัวอย่าง 1.14**</u> ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

<u>**วิธีทำ**</u> จะได้ $\det A=(1)(4)-(2)(3)=-2$

นั่นคือ $$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix}$$ ▲

- ถ้า A เป็น $n\times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n\geq 2$ แล้วจะหาตัวผกผันสำหรับการคูณของเมทริกซ์โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ ดังนั้น จำเป็นต้องทราบความหมายของคำว่า เมทริกซ์โคแฟกเตอร์ (Cofactor Matrix) และเมทริกซ์ผูกพัน (Adjoint Matrix) ตามลำดับ เพื่อเป็นพื้นฐานในการหาตัวผกผันสำหรับการคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

เมทริกซ์โคแฟกเตอร์

กำหนด $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ โดยที่ $n\geq 2$ และ C_{ij} แทนโคแฟกเตอร์ของ a_{ij} จะได้เมทริกซ์โคแฟกเตอร์ของ A คือ $n\times n$ เมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j คือ C_{ij} เราเรียกเมทริกซ์โคแฟกเตอร์ของ A ด้วย $cof\ A$ ดังนั้น

$$cof\ A=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ผูกพัน (Adjoint Matrix)

เมทริกซ์ผูกพันของ $n \times n$ เมทริกซ์ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ โดยที่ $n \geq 2$ คือ เมทริกซ์สับเปลี่ยนของ $cof\ A$ เราเขียนเมทริกซ์ผูกพันของ A ด้วย $adj\ A$ นั่นคือ

$$adj\ A=\left[cof\ A\right]^t=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 1.15</u> ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $adj\ A$

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-17$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=-11$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=18$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=19$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=14$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=-15$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-10$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=15$$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-14$$

ดังนั้น $adj\ A = [cof\ A]^t = \begin{bmatrix} -17 & -11 & 18 \\ 19 & 14 & -15 \\ -10 & 15 & -14 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -17 & 19 & -10 \\ -11 & 14 & 15 \\ 18 & -15 & -14 \end{bmatrix}$ ▲

สมมติให้ $A(adj\ A) = D = [d_{ij}]_{n \times n}$

โดย $d_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$

และถ้า $i = j$ แล้ว $d_{ij} = d_{ii} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \det A$

นั่นคือ สมาชิกแต่ละตัวในแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ $D = \det A$

แต่ ถ้า $i \neq j$ แล้ว $d_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = 0$

นั่นคือ สมาชิกแต่ละตัวนอกแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ $D = 0$

ดังนั้น $A(adj\ A) = D = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = (\det A) I_n$

ในทำนองเดียวกัน จะพิสูจน์ได้ว่า

$(adj\ A)A = D = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = (\det A) I_n$

ฉะนั้น $A(adj\ A) = (adj\ A)A = (\det A) I_n$

จะได้ว่า $\frac{1}{\det A}[A(adj\ A)] = \frac{1}{\det A}[(adj\ A)A] = I_n$

$A\left[\frac{1}{\det A}(adj\ A)\right] = \left[\frac{1}{\det A}(adj\ A)\right]A = I_n$

สรุปได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj\ A)$

ดังนั้น ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ และ $\det A \neq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\ A$$

ตัวอย่าง 1.16 ให้ $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 6 & 3\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

วิธีทำ เพราะว่า $\det A=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 6 & 3\\ 2 & -4 & 0\end{vmatrix}=64\neq 0$

ดังนั้น A สามารถหาเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณของ A ได้

เนื่องจาก $C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6 & 3\\ -4 & 0\end{vmatrix}=12$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=6$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-16$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -4 & 0\end{vmatrix}=4$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=16$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 6 & 3\end{vmatrix}=12$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10$$

และ $C_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 6\end{vmatrix}=16$

ดังนั้น $adj\,A=[cof\ A]^t=\begin{bmatrix}12 & 6 & -16\\ 4 & 2 & 16\\ 12 & -10 & 16\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}12 & 4 & 12\\ 6 & 2 & -10\\ -16 & 16 & 16\end{bmatrix}$

นั่นคือ $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}adj\,A=\dfrac{1}{64}\begin{bmatrix}12 & 4 & 12\\ 6 & 2 & -10\\ -16 & 16 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/16 & 1/16 & 3/16\\ 3/32 & 1/32 & -5/32\\ -1/4 & 1/4 & 1/4\end{bmatrix}$ ▲

สมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับตัวผกผันสำหรับการคูณ

1. $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

4. $A^{-1} = \frac{I}{A}$

5. $AB = AC = I$ แล้ว $B = C = A^{-1}$

6. $\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$

7. $\left(A^{m}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m}$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

นอกจากนี้ การหาตัวผกผันของเมทริกซ์จัตุรัส A ยังสามารถหาได้โดยการใช้สมบัติ $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้ ซึ่งจริง ๆ แล้ว การหาตัวผกผันของเมทริกซ์ด้วยวิธีนี้ไม่เหมาะสำหรับเมทริกซ์ที่มีมิติใหญ่

<u>**ตัวอย่าง 1.17**</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ จาหา A^{-1}

<u>**วิธีทำ**</u> สมมติให้ $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นผกผันของ A

ดังนั้น $AB = BA = I_2$

หรือ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+5c & 3b+5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ $a + 2c = 1 \quad (1.1)$

$3a + 5c = 0 \quad (1.2)$

$b + 2d = 0 \quad (1.3)$

$3b + 5d = 1 \quad (1.4)$

แก้ระบบสมการหาค่าของ a, b, c, d จะได้

$(1.1)\times 3: \quad 3a + 6c = 3 \quad (1.5)$

$(1.5)-(1.2)$: $c=3$

แทน $C=3$ ใน (1.1) จะได้ $a=1-2(3)=-5$

$(1.3)\times 3$: $3b+6d=0$ (1.6)

$(1.6)-(1.4)$: $d=-1$

แทน $d=-1$ ใน (1.3) จะได้ $b=-2(-1)=2$

ฉะนั้น $A^{-1}=B=\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ▲

1.3 การใช้ดีเทอร์มิแนนต์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

จาก**หลักเกณฑ์คราเมอร์** (Cramer's Rule) กล่าวว่าให้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้นมี n สมการ และ n ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$AX=B$$

โดยที่ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$ เป็น**เมทริกซ์สัมประสิทธิ์** (Coefficient Matrix)

$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ เป็นเมทริกซ์ตัวแปร

และ $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ เป็น**เมทริกซ์ค่าคงตัว**

ถ้า $\det A\neq 0$ แล้ว $AX=B$ จะมีผลเฉลยเพียงชุดเดียว

$$x_i=\frac{\det A_i}{\det A};\ i=1,2,\ldots,n$$

โดยที่ A_i คือ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของเมทริกซ์ A ด้วยสมาชิกของ B

ตัวอย่างเช่น 1) ระบบสมการที่มี 2 สมการ และ 2 ตัวแปร x_1 และ x_2

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = C_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = C_2$$

จะได้ $$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

และ $$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

2. ระบบสมการที่มี 3 สมการ และ 3 ตัวแปร x_1, x_2 และ x_3

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$$

จะได้ $$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

และ $$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

ตัวอย่าง 1.18 จงใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ในการแก้สมการ

$$x_1 + 2x_3 = 6$$
$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$$

วิธีทำ เพราะว่า $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72$$

และ $|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152$

จะได้ $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{-40}{44} = \dfrac{-10}{11}$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$

และ $x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{152}{44} = \dfrac{38}{11}$

หมายเหตุ จะใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ได้ในกรณีที่ระบบสมการมี n สมการ n ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานเท่านั้น ถ้าในกรณีที่ $n \geq 4$ จะมีความยุ่งยากในการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ ดังนั้นจะใช้การกำจัดแบบเกาส์เซียน (Gaussian Elimination) และการกำจัดแบบเกาส์จอแดน (Gauss-Jordan Elimination) แทนการใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ซึ่งจะกล่าวถึงในบทถัดไป

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 5 & 2 & 0\\ 1 & 8 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 9\\ 2 & 6\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 3 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ -6 & 8 & -1\end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix}-1 & 6 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$ และ $F=\begin{bmatrix}0 & 0 & 6\\ -2 & 5 & 25\end{bmatrix}$

จงหาเมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1.1 $B+2C$ 1.2 $C-B$

1.3 AB 1.4 BA

1.5 B^t 1.6 $-5A^t$

1.7 $(D+E+F)^t$ 1.8 $D^t+E^t+F^t$

1.9 B^tD^t 1.10 $(DB)^t$

2. จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

2.1 $\begin{bmatrix}7 & -15\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ 2.2 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$

2.3 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & -5 & 1\\ 7 & -3 & 4\end{bmatrix}$ 2.4 $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & -2\\ 5 & 5 & 6\end{bmatrix}$

2.5 $\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 6 & -1 & 2\\ -9 & 2 & -3\end{bmatrix}$ 2.6 $\begin{bmatrix}2 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -3 & 4 & -3\end{bmatrix}$

2.7 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 5 & 6 & 1\\ 0 & -3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ 2.8 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & 2\\ 1 & 8 & -4 & -\frac{1}{2}\\ -2 & 0 & 12 & -6\\ 4 & -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

2.9 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$ 2.10 $\begin{bmatrix}5 & 10 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$

3. ถ้า $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ จงหา A^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1

4. ให้ $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ จงหา B^2, B^3, B^4 และ B^5

5. ให้ $C=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 6 & -3\end{bmatrix}$ และ $D=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ จงหา C^2 และ D^2

6. ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ จงหา $\det\left(A^n\right)$

7. จงหาเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

7.1 $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 6 & 9\end{bmatrix}$

7.2 $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

7.3 $\begin{bmatrix}4 & -5\\ -3 & 4\end{bmatrix}$

7.4 $\begin{bmatrix}-8 & -3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

7.5 $\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$

7.6 $\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\ 1 & 0 & 6\\ 4 & 0 & 9\end{bmatrix}$

7.7 $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & -5\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

7.8 $\begin{bmatrix}0 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 3\\ -1 & -2 & -2\end{bmatrix}$

7.9 $\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 8\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$

7.10 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$

8. โดยใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ (ถ้ามี)

8.1 $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$
$2x_1 + 5x_2 = 16$

8.2 $2x + y = 5$
$6x + 3y = 15$

8.3 $-x + 2y - z = 13$
$3x + y + 8z = 24$
$5x - 2y + 2z = 7$

8.4 $2x - y + 2z = 8$
$x + 2y + 3z = 3$
$3x - y - 2z = 1$

8.5 $$\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 6x-5y+z&=8\\ 12x+7y+19z&=18 \end{aligned}$$

8.6 $$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=1\\ 2x_1-x_2+x_3&=3\\ 4x_1+x_2+2x_3&=0 \end{aligned}$$

8.9 $$\begin{aligned} x_1+8x_2+x_3+5x_4&=11\\ 8x_1-4x_2+3x_3+x_4&=-2\\ 5x_1+4x_2+5x_3&=-4\\ x_1-12x_2-x_3+2x_4&=2 \end{aligned}$$

8.10 $$\begin{aligned} x+y-2z+t&=6\\ 2x-y-z+2t&=9\\ x+3y+z-t&=-4\\ x-2y+3z+t&=-1 \end{aligned}$$

ผลเฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 1

1. 1.1 $\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 8 & 14 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ 1.2 $\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

1.3 $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & 57 \\ 17 & 51 \end{bmatrix}$ 1.4 หาผลคูณไม่ได้

1.5 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 9 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ 1.6 $\begin{bmatrix} -10 & -25 & -5 \\ 5 & -10 & -40 \\ -20 & 0 & -15 \end{bmatrix}$

1.7 $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 11 \\ 6 & 25 \end{bmatrix}$ 1.8 $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 11 \\ 6 & 25 \end{bmatrix}$

1.9 $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 23 & -4 \end{bmatrix}$ 1.10 $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 23 & -4 \end{bmatrix}$

2. 2.1 -9 2.2 7

2.3 0 2.4 54

2.5 0 2.6 0

2.7 -36 2.8 -782

2.9 0 2.10 0

3. $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$

4. $B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B$

5. $C^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = C$ และ $D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. $(-2)^n$

7. 7.1 ไม่มี A^{-1}

7.2 $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7.3 $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

7.4 $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

7.5 $\frac{1}{36}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 11 \\ 10 & 4 & -10 \\ -8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

7.6 ไม่มี A^{-1}

7.7 $\frac{1}{32}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -13 & -4 & 19 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

7.8 $-1\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

7.9 $\frac{1}{48}\begin{bmatrix} 17 & -5 & 2 \\ 5 & 7 & -22 \\ -4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

7.10 $\frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -7 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

8. 8.1 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3$

8.2 ระบบสมการเชิงเส้นนี้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ด้วยหลักเกณฑ์ของคราเมอร์

8.3 $x = 5, y = 9, z = 0$

8.4 $x = 1, y = -2, z = 2$

8.5 ระบบสมการเชิงเส้นนี้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ด้วยหลักเกณฑ์ของคราเมอร์

8.6 $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 3$

8.7 $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 7$

8.8 $x = -1, y = 2, z = 3$

8.9 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = -1, x_4 = 2$

8.10 $x = 2, y = -1, z = -2, t = 1$