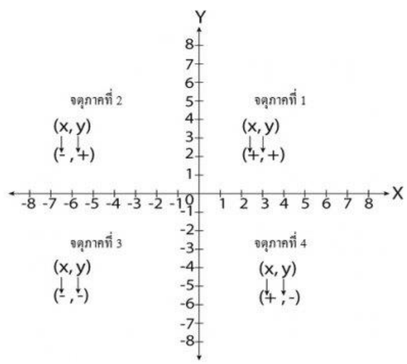
บทที่ 5

ระบบพิกัดฉาก และสมการเส้นตรง

5.1 ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System)

ระบบพิกัดฉาก ประกอบด้วย แกนพิกัดฉาก 2 แกน ได้แก่ เส้นจำนวนที่อยู่บนแกนนอน (แกน x) และเส้นจำนวนที่อยู่บนแกนตั้ง (แกน y) แกนพิกัดฉากทั้งสองนี้จะแบ่งพื้นที่ระนาบออกเป็น 4 ส่วน เรียกพื้นที่ที่ถูกแบ่งออกเป็นส่วนๆ นี้ว่า ***“จตุภาค”*** **(Quadrant)** ซึ่งมีลักษณะดังรูป



ภาพประกอบ 5.1 : แสดงจตุภาคของระบบพิกัดฉาก

ที่มา : พงศธร มหาวิจิตร. 2553

จตุภาคสามารถแสดงด้วยเซตของจุดในระนาบ ดังนี้

จตุภาคที่ 1 หรือ $Q_1 = \{x \mid x > 0$ และ $y > 0\}$

จตุภาคที่ 2 หรือ $Q_2 = \{x \mid x < 0$ และ $y > 0\}$

จตุภาคที่ 3 หรือ $Q_3 = \{x \mid x < 0$ และ $y < 0\}$

จตุภาคที่ 4 หรือ $Q_4 = \{x \mid x > 0$ และ $y < 0\}$

แกน x และ แกน y ตัดกันเป็นมุมฉากที่จุด 0 เรียกจุดนี้ว่า ***“จุดกำเนิด”*** **(Origin)** และเขียนแทนตำแหน่งของจุดบนระบบพิกัดฉากด้วย (x, y) เมื่อ x เป็นค่าที่อ่านได้จากเส้นจำนวนบนแกน x และ y เป็นค่าที่อ่านได้จากเส้นจำนวนบนแกน y การวัดระยะทางตามแนวแกนพิกัดต้องเริ่มจากจุดกำเนิดเสมอ และใช้เครื่องหมายบอกทิศทางของการวัดระยะทางดังนี้

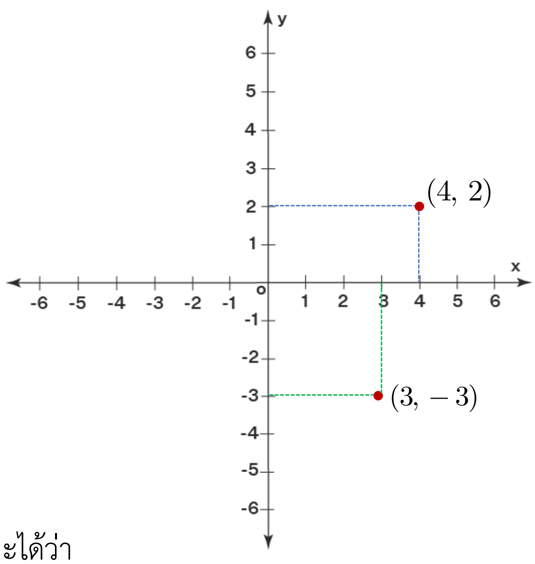
ระยะทางตามแกน x วัดจากจุดกำเนิดไปทางขวาเป็นบวก และไปทางซ้ายเป็นลบ

ระยะทางตามแกน y วัดจากจุดกำเนิดไปข้างบนเป็นบวก และลงข้างล่างเป็นลบ

ดังภาพประกอบ 3.1 เมื่อกำหนดพิกัดของจุดก็สามารถลงจุดนั้นๆ ในระนาบได้

ตัวอย่าง 5.1. จงเขียนกราฟของคู่อันดับ $(4, 2)$ และ $(3, -3)$

วิธีทำ

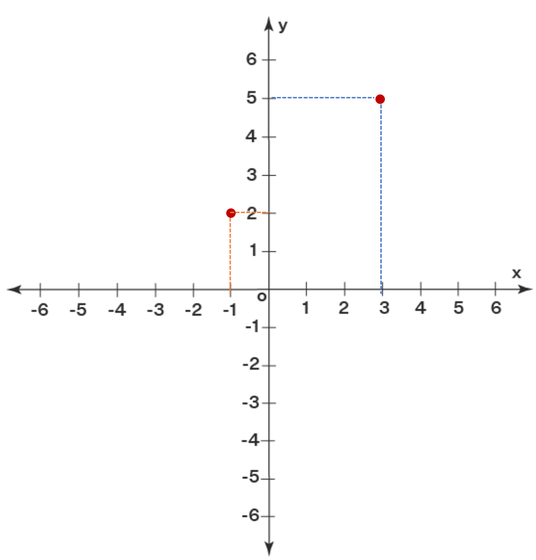


จากตัวอย่างจะได้ว่า

$(4, 2) \in Q_1$ เพราะว่า $x > 0$ และ $y > 0$

$(3, -3) \in Q_4$ เพราะว่า $x > 0$ และ $y < 0$

ตัวอย่าง 5.2. จงเขียนกราฟของคู่อันดับ $(-1, 2)$ และ $(3, 5)$



จากตัวอย่างจะได้ว่า

$(-1,\, 2) \in Q_2$ เพราะว่า $x < 0$ และ $y > 0$

$(3,\, 5) \in Q_1$ เพราะว่า $x > 0$ และ $y > 0$

5.1.1. ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด (Distance Between Two Points)

บทนิยาม 5.1 ถ้า $A\,(x_1\,,\, b)$ และ $B(x_2\,,\, b)$ เป็นจุดบนแกน x หรือ บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ระยะทาง **(distance)** ระหว่างจุด A และ B เขียนแทนด้วย $|\,AB\,| = |\,x_2 - x_1\,|$

ถ้า $A(a,\, y_1)$ และ $B(a,\, y_2)$ เป็นจุดบนแกน y หรือบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ระยะทาง **(distance)** ระหว่างจุด A และ B เขียนแทนด้วย $|\,AB\,| = |y_2 - y_1\,|$
โดยที่ $a,\, b$ เป็นจำนวนจริง

ที่มา : ภานุมาศ แสวงทอง และ ดิน ประทุมวรรณ์. 2551 : 67

ข้อสังเกต 5.1 1. ถ้า $b = 0$ จุด 2 จุดนั้นจะอยู่บนแกน x
และถ้า $b \neq 0$ จุด 2 จุดนั้นจะอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x
2. ถ้า $a = 0$ จุด 2 จุดนั้นจะอยู่บนแกน y
และถ้า $a \neq 0$ จุด 2 จุดนั้นจะอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y

(ที่มา : ภานุมาศ แสวงทอง และ ดิน ประทุมวรรณ์. 2551 : 68)

ระยะทาง คือ ระยะที่ไม่บอกทิศทาง หรือกล่าวได้ว่า ระยะทางระยะทางระหว่างจุดสองจุดใดๆ คือ ค่าสัมบูร์ของระยะบอกทิศทางระหว่างจุดทั้งสอง เช่น $|\,AB\,|$ หรือ $|\,BA\,|$ คือ ระยะทางระหว่างจุด A กับจุด B เนื่องจาก $|\,AB\,| \geq 0$ และ $|\,BA\,| \geq 0$ ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุดสองจุดจึงเป็นตัวเลขที่ไม่ติดลบ

ที่มา : อาจารย์ภานุวัตน์ เกียรตินฤมล. 2557 : 1

ตัวอย่าง 5.3. จงหา $|\,A_1B_1\,|$ เมื่อกำหนดจุด $A_1\,(1,\, 4)$ และ $B_1\,(6,\, 4)$

และ จงหา $|\,A_2B_2\,|$ เมื่อกำหนดจุด $A_2\,(2,\, 3)$ และ $B_2\,(-4,\, 3)$

วิธีทำ เนื่องจาก $|\,A_1B_1\,| = |\,x_2 - x_1\,|$

จะได้ว่า $|\,A_1B_1\,| = |\,x_2 - x_1\,|$

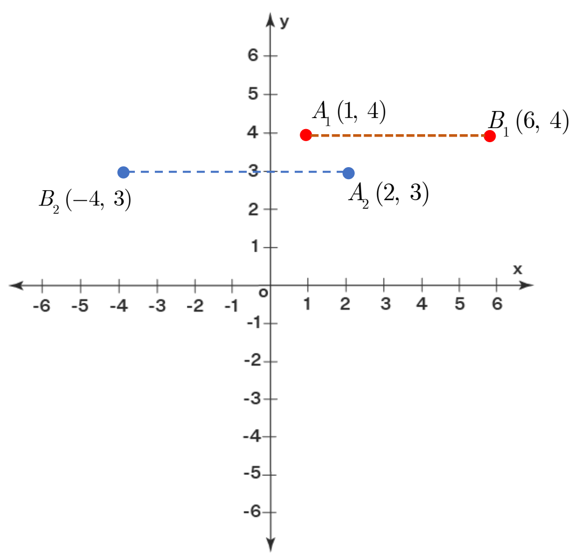
$=|6-1|$
$=5$

และ $|A_2B_2|=|x_2-x_1|$

จะได้ว่า $|A_2B_2|=|x_2-x_1|$

$=|-4-2|$
$=|-6|$
$=6$

สามารถสร้างกราฟได้ดังนี้



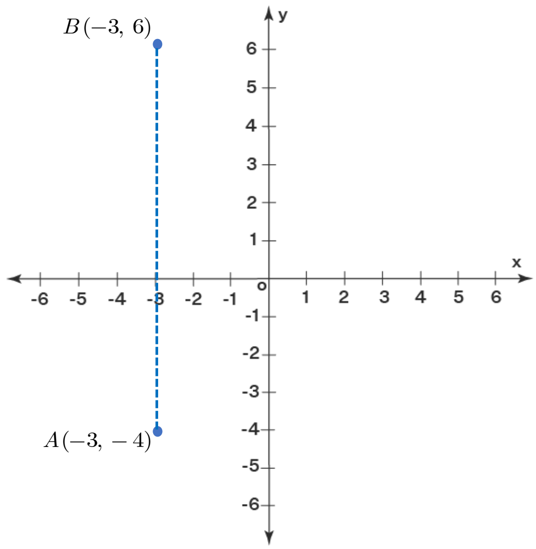
ตัวอย่าง 5.4. จงหา $|AB|$ เมื่อกำหนดจุด $A(-3,\,-4)$ และ $B(-3,\ 6)$

วิธีทำ เนื่องจาก $|AB|=|y_2-y_1|$

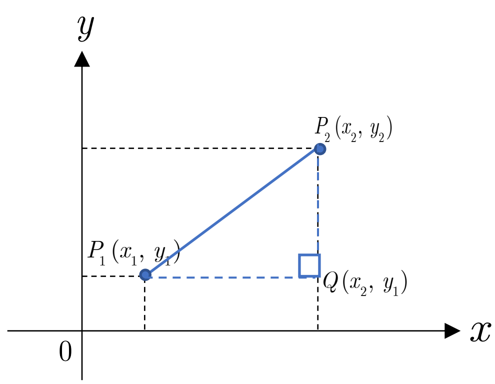
จะได้ว่า $|AB|=|y_2-y_1|$

$=|6-(-4)|$
$=10$

สามารถสร้างกราฟได้ดังนี้



กรณีที่ A และ B มีพิกัด $(a,\ y_1)$ และ $(a,\ y_2)$ ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกนกับแกน y เท่านั้น แต่ถ้าจุด P และ Q อยู่บนเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน x และแกน y เราสามารถหาระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 ได้ดังนี้



ภาพประกอบ 5.2 : แสดงการหาระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2

ที่มา : กุลนาถ ทีปประพันธ์ณี. 2564

ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด P_1 และ P_2 ให้ขนานกับแกน x และแกน y ตามลำดับ มาตัดกันที่จุด Q และจุด Q จะมีพิกัดเป็น $(x_2,\ y_1)$ จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก P_1QP_2 ซึ่งมีมุม P_1QP_2 เป็นมุมฉาก จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|P_1P_2| &= \sqrt{|P_1Q|^2 + |P_2Q|^2} \\
&= \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 5.1 ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใดๆ ที่ต่างกันแล้วระยะทางระหว่างจุดทั้งสอง คือ

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ตัวอย่าง 5.5. จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(5, 4)$ และ $P_2(2, 0)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 5.1

จะได้ว่า $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ดังนั้น $|P_1P_2| = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{9+16} \quad = \sqrt{25} \quad = 5$

ตัวอย่าง 5.6. จงแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีจุดยอดที่ $A(2, 2)$, $B(8, 2)$, $C(5, 6)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 5.1

เนื่องจาก $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

จะได้ว่า $|AB| = \sqrt{(8-2)^2 + (2-2)^2}$

$= \sqrt{36}$

$= 6$

$|BC| = \sqrt{(8-5)^2 + (2-6)^2}$

$= \sqrt{9+16}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

$|AC| = \sqrt{(5-2)^2 + (6-2)^2}$

$= \sqrt{9+16}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

จะได้ว่า $|BC| = |AC|$

แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

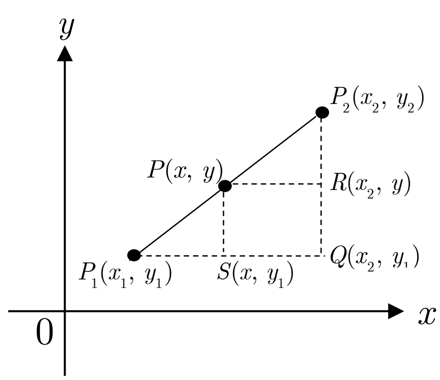
5.1.2. จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง

ทฤษฎีบท 5.2 ให้ $P(x,\, y)$ เป็นจุดใดๆ ที่อยู่บนส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุด $P(x_1,\, y_1)$ และ $P(x_2,\, y_2)$ และแบ่งส่วนของเส้นตรง P_1P_2 ออกเป็นอัตราส่วน

$$\frac{P_1P}{PP_2} = r \quad \text{แล้ว} \quad x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \quad \text{และ} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง แบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $P(x,\, y)$ อยู่ระหว่าง $P(x_1,\, y_1)$ และ $P(x_2,\, y_2)$ โดยที่ $\dfrac{P_1P}{PP_2} = r$ และ $r > 0$



ภาพประกอบ 5.3

จากภาพที่ 3.3 จะได้ว่า $\triangle P_1PS \cong \triangle PP_2S$

ดังนั้น $$\frac{P_1S}{PR} = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{PS}{P_2R} = r$$

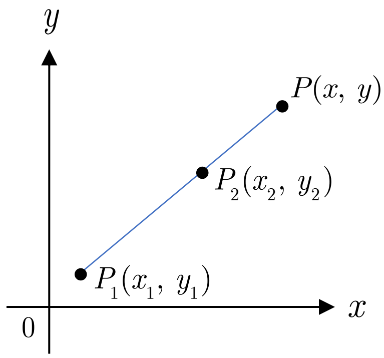
จะได้ $$\frac{x-x_1}{x_2-x} = r \qquad \text{และ} \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y} = r$$

$$x - x_1 = r(x_2 - x) \qquad \text{และ} \qquad y - y_1 = r(y_2 - y)$$

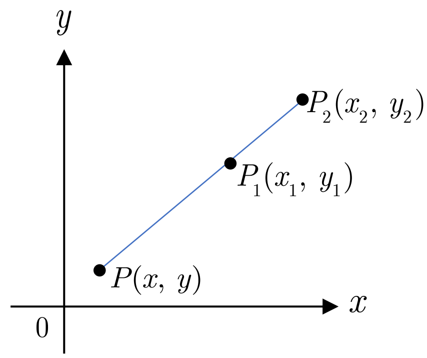
$$(1+r)x = x_1 + rx_2 \qquad \text{และ} \qquad (1+r)y = y_1 + ry_2$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad \text{และ} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

กรณีที่ 2 $P(x_1, y_1)$ อยู่ภายนอกส่วนของเส้นตรง P_1P_2 โดยที่ $\frac{P_1P}{PP_2} = r$ และ $r < 0$



ภาพประกอบ 5.4



ภาพประกอบ 5.5

จากภาพที่ 5.4 และภาพที่ 5.5 ทิศทางของ P_1P และ PP_2 สวนทางกัน ดังนั้น

จะได้ $\frac{P_1P}{PP_2} = r$ และ $r < 0$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1 สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \quad \text{และ} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่า

จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 คือ $P(x, y)$ ซึ่ง

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \quad \text{และ} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

จากทฤษฎีบทที่ 5.2 ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$

จะได้ $\frac{P_1P}{PP_2} = r = 1$

ดังนั้น $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ และ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

ที่มา : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา)

ตัวอย่าง 5.7. จงหาจุดกึ่งกลางของระยะทางระหว่างจุด $A(-5,\,6)$ และ $B(7,\,8)$

วิธีทำ ให้ $P(x,\,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A และ B

วิธีที่ 1 จะได้ $\dfrac{AP}{PB} = 1$

จาก $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1+r} = \dfrac{-5+1(7)}{1+1} = \dfrac{2}{2} = 1$

และ $y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1+r} = \dfrac{6+8}{1+1} = \dfrac{14}{2} = 7$

ดังนั้น $P(x,\,y)$ คือ $P(1,\,7)$

วิธีที่ 2 จะได้ $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-5+7}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

และ $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{6+8}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$

ดังนั้น จุดกึ่งกลาง คือ $P(1,\,7)$

5.1.3. ความชันของเส้นตรง (The Slope of Line)

ให้ P เป็นจุดใดๆ บนระนาบ สามารถลากเส้นตรงผ่านจุด P ได้หลายเส้น ซึ่งเส้นตรงแต่ละเส้นอาจทำมุมกับแกน x ในลักษณะที่แตกต่างกันอาจจะเป็นมุมแหลม หรือมุมป้าน หรือมุมฉาก มุมดังกล่าวที่เส้นตรงแต่ละเส้นทำกับแกน x เรียกว่า ***ความเอียง*** **(inclination)** ของเส้นตรงเหล่านั้น

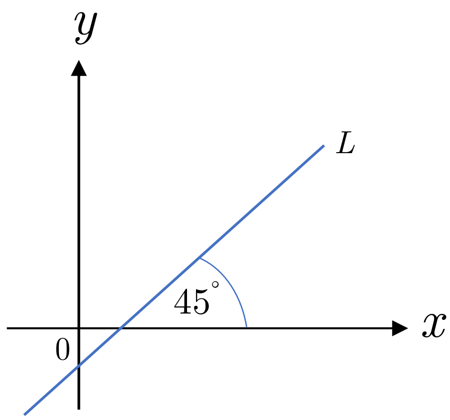
บทนิยาม 5.2. ให้ L เป็นเส้นตรงในระนาบ

1. ถ้า L ขนานหรือทับกับแกน x จะกล่าวว่า L มีความเอียงเท่ากับศูนย์
2. ถ้า L ตั้งฉากกับแกน x จะกล่าวว่า L มีความเอียงเป็น $\dfrac{\pi}{2}$ หรือ 90 องศา
3. ถ้า L ทำมุม θ กับ แกน x ซึ่งเป็นมุมที่เล็กที่สุดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะกล่าวว่า L มีความเอียงเป็น θ นั่นคือ $0^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ}$

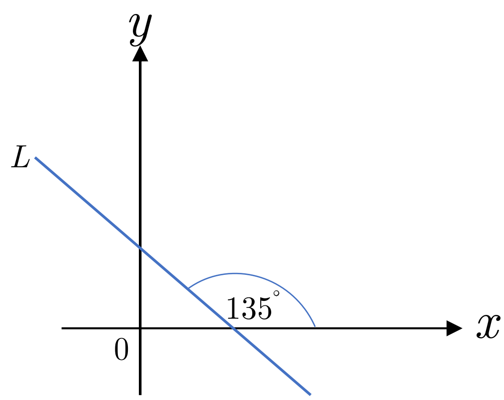
ที่มา : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา)

บทนิยาม 5.3. **ความชัน (Slope)** ของเส้นตรง L ซึ่งเขียนแทนด้วย m คือ จำนวนที่มีค่าเท่ากับ $\tan\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมเอียง จะได้ $m = \tan\theta$ เมื่อ $\theta \neq 90^{\circ}$

ที่มา : อาจารย์ภานุวัตน์ เกียรตินฤมล. 2557 : 3



ภาพประกอบ 5.6



ภาพประกอบ 5.7

จากภาพประกอบ 5.6 จะได้ความชันของ $L = \tan 45^{\circ} = 1$

จากภาพประกอบ 5.7 จะได้ความชันของ $L = \tan 135^{\circ} = -1$

จะเห็นว่า ถ้า $0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ จะได้ $\tan\theta > 0$ นั่นคือ ความชันของเส้นตรงมีค่าเป็นจำนวนบวก

ถ้า $90^{\circ} < \theta < 180^{\circ}$ จะได้ $\tan\theta < 0$ นั่นคือ ความชันของเส้นตรงมีค่าเป็นจำนวนลบ

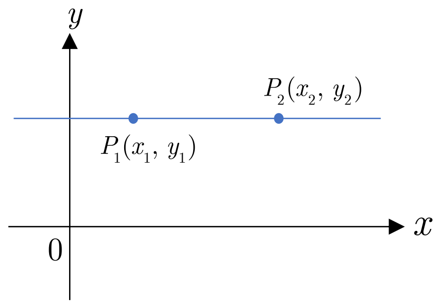
ในกรณีที่ $\theta = 90^{\circ}$ เส้นตรงจะไม่มีความชัน เนื่องจาก $\tan 90^{\circ}$ หาค่าไม่ได้

ในกรณีที่ $\theta = 0^{\circ}$ เส้นตรงจะมีความชันเท่ากับศูนย์ เนื่องจาก $\tan 0^{\circ} = 0$

ทฤษฎีบท 5.3. ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ จะได้ว่า

ความชันของเส้นตรง L คือ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

การพิสูจน์ **กรณีที่ 1** ถ้า $y_1 = y_2$

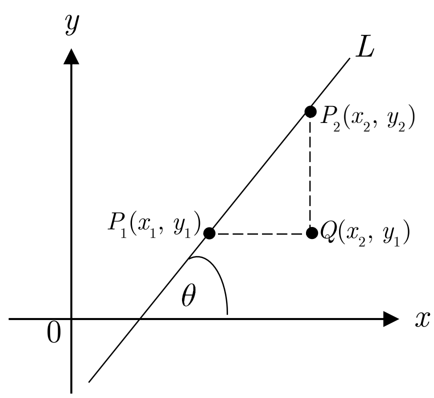


ภาพประกอบ 5.8

จากภาพประกอบ 5.8 จะเห็นว่าเส้นตรง L ขนานกับแกน x จากบทนิยาม 5.2 จะได้ว่าเส้นตรงมีความเอียงเท่ากับศูนย์ ดังนั้น $m = 0$ และ $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$

นั่นคือ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

กรณีที่ 2 $y_1 \neq y_2$ ให้เส้นตรง L ทำมุมกับแกน x เป็นมุม θ



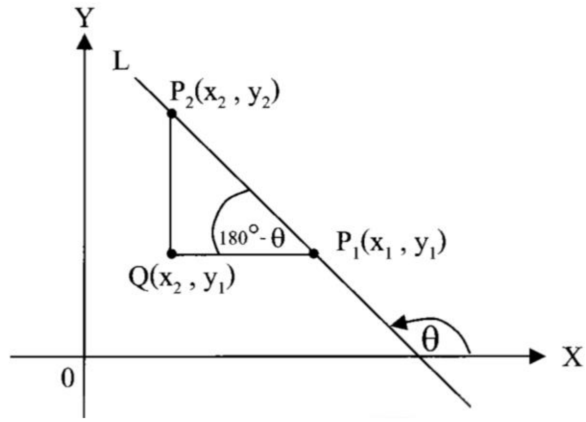
ภาพประกอบ 5.9

ที่มา : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา)

จากภาพประกอบ 5.9 $y_1 < y_2$ ดังนั้น $\tan\theta = \dfrac{P_2Q}{P_1Q}$ จะได้ $\tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

นั่นคือ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $y_1 > y_2$ จะได้ $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



ภาพประกอบ 5.10

ที่มา : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา)

ในกรณีที่เส้นตรง L ทำมุมป้านกับแกน x

จากภาพที่ 5.10 จะได้ $m = \tan\theta$

$$m = \tan(180^{\circ} - \theta)$$

$$m = -\frac{P_2Q}{P_1Q} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

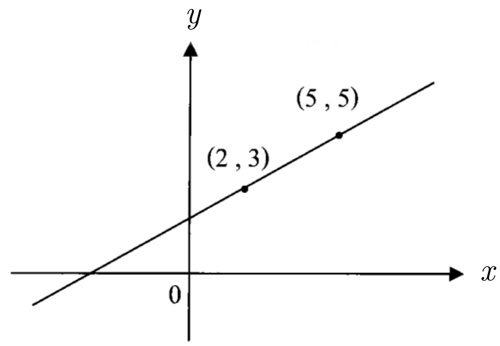
นั่นคือ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ตัวอย่าง 5.8. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 3)$ และ $(5, 5)$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 5.3. จะได้ว่า $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ดังนั้น ความชัน $= \dfrac{5-3}{5-2} = \dfrac{2}{3}$

กราฟของเส้นตรงจะมีลักษณะ ดังนี้



ภาพประกอบ 5.11

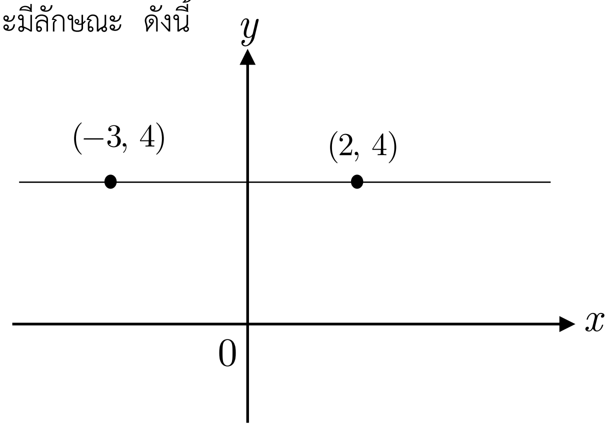
ที่มา : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา)

ตัวอย่าง 5.9. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3, 4)$ และ $(2, 4)$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 5.3. จะได้ว่า $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ดังนั้น ความชัน $= \dfrac{4-4}{2-(-3)} = \dfrac{0}{5} = 0$

กราฟของเส้นตรงจะมีลักษณะ ดังนี้



ภาพที่ 5.12

ข้อสังเกต 5.2 1. เส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เมื่อ $y_1 = y_2$ จะขนานกับแกน x และมีความชันเท่ากับศูนย์

2. ถ้าเส้นตรงทำมุมแหลมกับแกน x จากภาพที่ 5.9 จะได้ว่า $x_2 - x_1 > 0$ และ $y_2 - y_1 > 0$ หรือ $x_1 - x_2 < 0$ และ $y_1 - y_2 < 0$

ดังนั้น $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ มีค่ามากกว่าศูนย์

3. ถ้าเส้นตรงทำมุมป้านกับแกน x จากภาพที่ 5.10 จะได้ว่า

$x_2 - x_1 < 0$ และ $y_2 - y_1 > 0$ หรือ $x_1 - x_2 > 0$ และ $y_1 - y_2 < 0$

ดังนั้น $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ มีค่ามากกว่าศูนย์

5.1.4 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก (Parallel and Perpendicular Lines)

1. เส้นขนาน

บทนิยาม 5.4. ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ ถ้า $\theta_1 = \theta_2$ เราจะกล่าวว่า เส้นตรง L_1 ขนานกับเส้นตรง L_2 หรือ $L_1 \,//\, L_2$

ที่มา : ภานุมาศ แสวงทอง และ ดิน ประทุมวรรณ์. 2551 : 71

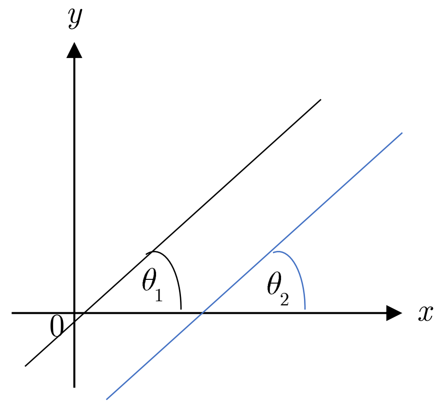
บทนิยาม 5.5. ถ้า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ และมีความชัน m_1, m_2 ตามลำดับ โดยที่ $\theta_1 \neq 90^\circ$ และ $\theta_2 \neq 90^\circ$ จะได้

(1) ถ้า $m_1 = m_2$ จะได้ L_1 ขนานกับ L_2 หรือ $L_1 \,//\, L_2$

(2) ถ้า L_1 ขนานกับ L_2 หรือ $L_1 \,//\, L_2$ จะได้ $m_1 = m_2$

ทฤษฎีบท 5.4. ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 ตามลำดับและมีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ ถ้า $\theta_1 = \theta_2$ (หรือ $m_1 = m_2$) และ L_1 กับ L_2 มีจุดร่วมกันหนึ่งจุด เราจะกล่าวว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงเดียวกัน

ที่มา : ภานุมาศ แสวงทอง และ ดิน ประทุมวรรณ์. 2551 : 72



ภาพประกอบ 5.13

ที่มา : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา)

พิสูจน์ ให้ L_1 ขนานกับ L_2 โดยที่ θ_1 และ θ_2 เป็นความเอียงของ L_1 และ L_2 ตามลำดับ ซึ่ง $\theta_1 = \theta_2$

เนื่องจาก $\theta_1 = \theta_2$ จะได้ $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

เมื่อ $0 \leq \theta_1 < 180$ และ $0 \leq \theta_2 < 180$

ดังนั้น $m_1 = m_2$

ในทางกลับกัน ถ้า $m_1 = m_2$

ดังนั้น $m_1 = \tan\theta_1$ และ $m_2 = \tan\theta_2$

จะได้ $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

ดังนั้น $\theta_1 = \theta_2$

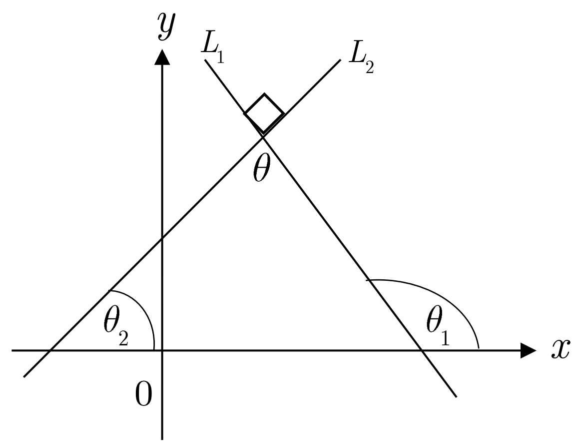
นั่นคือ L_1 ขนานกับ L_2

ที่มา : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา)

2. เส้นตั้งฉาก

ทฤษฎีบท 5.5. ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงในระนาบ มีความชันเป็น m_1 และ m_2 ตามลำดับ เส้นตรง L_1 จะตั้งฉากกับเส้นตรง L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 \cdot m_2 = -1$ โดยที่ L_1 และ L_2 ไม่ขนานกับแกน y

ที่มา : ภานุมาศ แสวงทอง และ ดิน ประทุมวรรณ์. 2551 : 72



ภาพประกอบ 5.14

ที่มา : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา)

พิสูจน์ กำหนดให้ L_1 มีความเอียงเป็น θ_1 และมีความชันเป็น m_1 และ $m_1 \neq 0$

และ L_2 มีความเอียงเป็น θ_2 และมีความชันเป็น m_2 และ $m_2 \neq 0$

และให้ L_1 ตั้งฉากกับ L_2

ดังนั้น $m_1 = \tan\theta_1$ และ $m_2 = \tan\theta_2$

จากภาพที่ 5.9 เนื่องจาก L_1 ตั้งฉากกับ L_2

จะได้ $\theta_1 = 90^\circ + \theta_2$

$$\tan\theta_1 = \tan(90^\circ + \theta_2$$
$$\tan\theta_1 = -\cot\theta_2$$
$$\tan\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_2}$$
$$\tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 = -1$$

นั่นคือ $m_1 \cdot m_2 = -1$

ในทางกลับกัน ถ้า $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$\tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 = -1$$

$$\tan\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_2}$$

ให้ θ เป็นมุมที่ L_1 ทำกับ L_2

เนื่องจาก $\theta = \theta_1 - \theta_2$

$$\tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2}$$

เนื่องจาก $\tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 = -1$ และ $0 \le \theta \le 180^{\circ}$

ดังนั้น $1 + \tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 = 0$

ซึ่งทำให้ $\tan\theta$ หาค่าไม่ได้

แสดงว่า $\theta = 90^{\circ}$

นั่นคือ L_1 ตั้งฉากกับ L_2

ที่มา : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา)

ตัวอย่าง 5.10. จงแสดงว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(2, 1)$ และ $B(4, 5)$ กับเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(2, 3)$ และ $D(4, 2)$ ตั้งฉากกัน

วิธีทำ ให้ m_1 เป็นความชันของเส้นตรง AB

$$m_1 = \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

และให้ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง CD

$$m_2 = \frac{2-3}{4-2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $m_1 \cdot m_2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

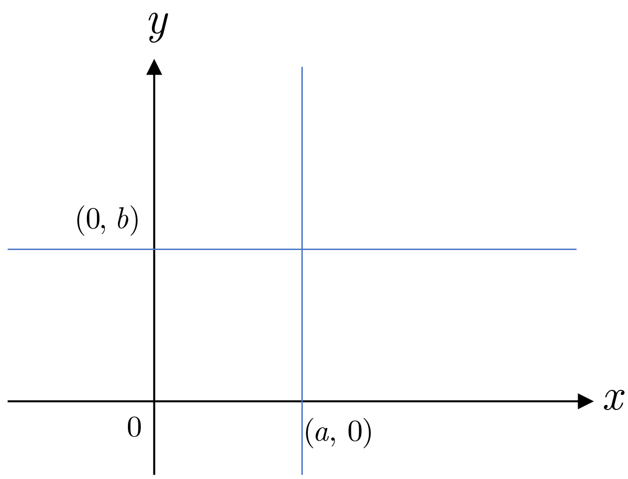
จะได้ว่า เส้นตรง AB ตั้งฉากกับเส้นตรง CD

5.2 สมการเส้นตรง (Equation of a Straight Line)

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง สามารถเขียนเฉพาะสมการที่เป็นเงื่อนไข ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y และเรียกว่า **"สมการเส้นตรง"** ซึ่งมีหลายรูปแบบ ดังจะได้กล่าวดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.6. สมการของเส้นตรงที่ขนานกับแกน y และผ่านจุด $(a, 0)$ คือ $x = a$ และสมการของเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และผ่านจุด $(0, b)$ คือ $y = b$

การพิสูจน์



ภาพประกอบ 5.15

จากภาพประกอบ 5.15 สมมุติให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน y และขนานกับแกน x ตามลำดับ โดยที่ L_1 ตัดกับแกน x ที่จุด $(a, 0)$ และ L_2 ตัดกับแกน y ที่จุด $(a, 0)$

จะได้ว่า จุดทุกจุดบนเส้นตรง L_1 มีพิกัดที่หนึ่งเป็น a และพิกัดที่สองเป็นจำนวนจริงใดๆ

ดังนั้น สมการของ L_1 คือ $\boldsymbol{y}$

ในทำนองเดียวกัน จุดทุกจุดบนเส้นตรง L_2 มีพิกัดที่หนึ่งเป็น b และพิกัดที่สองเป็นจำนวนจริงใดๆ

ดังนั้น สมการของ L_2 คือ $y = b$

ทฤษฎีบท 5.7. เส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) มีสมการเป็น $y - y_1 = m(x - x_1)$ เรียกการเขียนกราฟแบบนี้ว่า **รูปแบบจุด – ความชัน (Point – Slope form)**

ตัวอย่าง 5.11. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(6, 3)$ และมีความชันเท่ากับ 3

วิธีทำ จากสมการ $y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้
$$y - 3 = 3(x - 6)$$
$$y - 3 = 3x - 18$$
$$y = 3x - 15$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(6, 3)$ และมีความชันเท่ากับ 3 คือ $3x - y - 15 = 0$

ตัวอย่าง 5.12. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,\, 4)$ และมีความชันเท่ากับ 4

วิธีทำ จากสมการ $y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้ $y - 4 = 4(x - (-2))$

$$y - 4 = 4x + 8$$

$$y = 4x + 12$$

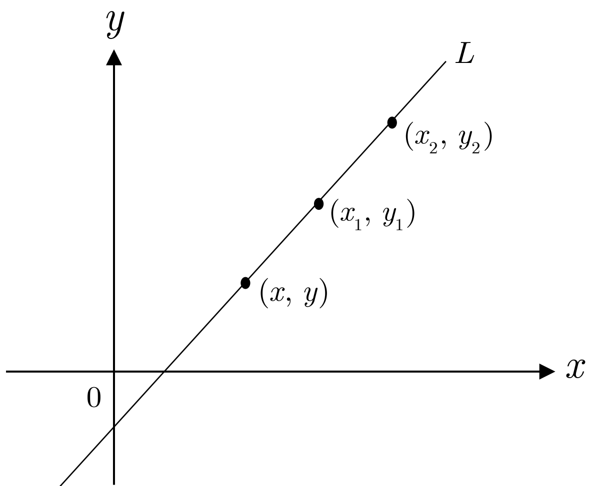
ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,\, 4)$ และมีความชันเท่ากับ 4 คือ $4x - y + 12 = 0$

ทฤษฎีบท 5.8. เส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_1,\, y_1)$ และ $(x_2,\, y_2)$ เมื่อ $x_1 \neq x_2$ มีสมการเป็น

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ หรือ } y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

เรียกการเขียนกราฟแบบนี้ว่า **รูปแบบจุดสองจุด (Two – Point form)**

การพิสูจน์



ภาพประกอบ 5.16

จากภาพประกอบ 5.16 ให้ m เป็นความชันของเส้นตรง L

จะได้ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ เมื่อ $x_1 \neq x_2$

ให้ $(x,\, y)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง L

จะได้ $y - y_1 = m(x - x_1)$

ดังนั้น $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ตัวอย่าง 5.13. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3, 4)$ กับ $(5, -2)$

วิธีทำ จากสมการ $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

จะได้ $$y - 4 = \frac{(-2) - 4}{5 - (-3)}(x - (-3))$$

$$-4 = \frac{2}{8}(x + 3)$$

$$y - 4 = \frac{1}{4}(x + 3)$$

$$4(y - 4) = 1(x + 3)$$

$$4y - 16 = x + 3$$

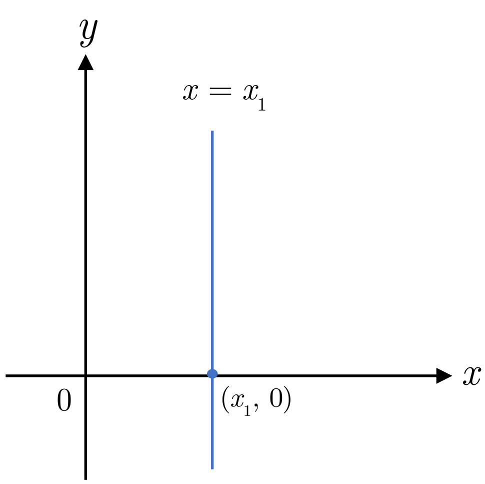
$$0 = x - 4y + 19$$

ดังนั้น สมการเส้นตรง คือ $x - 4y + 19 = 0$

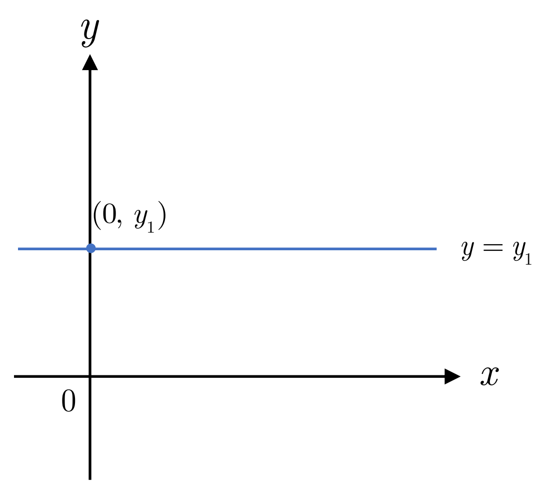
ทฤษฎีบท 5.9. เส้นตรงซึ่งมีความชัน m และมีระยะตัดแกน y (y - intercept) เท่ากับ b มีสมการเป็น $y = mx + b$ เรียกการเขียนสมการแบบนี้ว่า **รูปแบบความชัน – ระยะตัดแกน (Slope – Intercept form)**

ที่มา : รศ. ยืน ภู่วรวรรณ, สำนักบริการคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

นอกจากเส้นตรงในรูปแบบที่ได้กล่าวมาแล้ว เรายังพบเห็นสมการเส้นตรงที่เขียนในรูปสมการ $x = x_1$ ซึ่งเรียกว่า **เส้นตรงในแนวดิ่ง** และเขียนในรูป $y = y_1$ ซึ่งเรียกว่า **เส้นตรงในแนวนอน** สังเกตุได้ว่าเราไม่สามารถหาความชันของเส้นตรงในแนวดิ่งได้ แต่ความชันของเส้นตรงในแนวนอนมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังภาพที่ 5.13. และ 5.14.



ภาพประกอบ 5.17



ภาพประกอบ 5.18

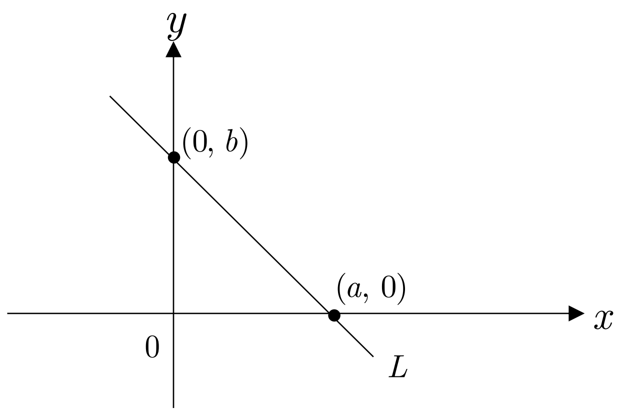
ภาพประกอบ 5.17. สมการเส้นตรงที่เขียนในรูปสมการ $x = x_1$ (ที่มา : เลิศสิทธิโกศล 2541 : 15)

ภาพประกอบ 5.18. สมการเส้นตรงที่เขียนในรูปสมการ $y = y_1$ (ที่มา : เลิศสิทธิโกศล 2541 : 15)

ทฤษฎีบท 5.10. เส้นตรงที่มีระยะตัดแกน x เท่ากับ a ระยะตัดแกน y เท่ากับ b โดยที่ a และ b ไม่เท่ากับศูนย์ มีสมการเป็น $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

เรียกการเขียนแบบนี้ว่า **รูปแบบระยะตัดแกน (Intercept form)**

พิสูจน์



ภาพประกอบ 5.19

ให้เส้นตรง L ตัดกับแกน x ที่จุด $(a,\, 0)$ และตัดแกน y ที่จุด $(0,\, b)$ จะได้

ความชันของเส้นตรง $L = \dfrac{b-0}{0-a} = -\dfrac{b}{a}$

จากสมการ $\quad y = mx + b$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$\frac{b}{a}x + y = b$$

ดังนั้น $\quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

ตัวอย่าง 5.14. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งมีระยะตัดแกน y เท่ากับ 3 และระยะตัดแกน x เท่ากับ -4

วิธีทำ จากสมการ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

จะได้ว่า $a=-4$ และ $b=3$

จะได้
$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$$
$$\frac{3x-4y}{-12}=1$$
$$3x-4y=-12$$
$$3x-4y+12=0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรง คือ $3x-4y+12=0$

บทนิยาม 5.6. สมการที่เขียนอยู่ในรูป $Ax+By+C=0$ เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกว่า **สมการกำลังหนึ่ง** หรือ**สมการเชิงเส้น (Linear equation)** ของตัวแปร x และ y

ทฤษฎีบท 5.11. เส้นตรงในระบบพิกัดฉากจะมีสมการเป็น $Ax+By+C=0$ เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงตัวโดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกการเขียนแบบนี้ว่า **รูปแบบทั่วไป (General form)**

ที่มา : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา)

พิสูจน์ เนื่องจากสมการเส้นตรงในระบบพิกัดฉากจะมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน y หรือกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชันเป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่งสมการจะอยู่ในรูป $x=a$ หรือ $y=mx+b$ โดยที่ a, b และ m เป็นค่าคงตัว ซึ่งสมการดังกล่าวจะเป็นกรณีหนึ่งของสมการ $Ax+By+C=0$

นั่นคือ เส้นตรงทุกเส้นในระบบพิกัดฉากจะมีสมการในรูป $Ax+By+C=0$

พิจารณาสมการ $Ax+By+C=0$ เมื่อ A กับ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะเห็นว่ามีกรณีที่เป็นไปได้ ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $A = 0$ และ $B \neq 0$

จะได้ $y = -\dfrac{C}{B}$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน x

กรณีที่ 2 เมื่อ $A \neq 0$ และ $B = 0$

จะได้ $x = -\dfrac{C}{B}$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน y

กรณีที่ 3 เมื่อ $A \neq 0$ และ $B \neq 0$

จะได้ $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงที่มีความชัน $-\dfrac{A}{B}$ และผ่านจุด $(0, -\dfrac{C}{B})$

นั่นคือ สมการ $Ax + By + C = 0$ จะมีกราฟเป็นเส้นตรง

ตัวอย่าง 5.15. จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $3x + 5y - 10 = 0$ และจุดที่เส้นตรงนี้ตัดแกน y

วิธีทำ จากสมการ $3x + 5y - 10 = 0$

จะได้ $y = -\dfrac{3}{5}x + 2$

ดังนั้น ความชัน $= -\dfrac{3}{5}$

จุดตัดแกน y คือจุด $(0,\ 2)$

ตัวอย่าง 5.16. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $x - 2y + 4 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $x - 2y + 4 = 0$

จะได้ $y = \dfrac{x}{2} + 2$

ความชัน $= \dfrac{1}{2}$

จะได้ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 3)$ คือ -2

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 3)$ และมีความชัน -2 คือ

$$y-3=(-2)(x-1)$$
$$y-3=-2x+2$$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $x-2y+4=0$

คือ $2x+y-5=0$

ตัวอย่าง 5.17. จงหาสมการเส้นตรงที่อยู่ห่างจากจุด $P(1,-2)$ และ $Q(3,-4)$ เป็นระยะทางเท่ากัน

วิธีทำ เส้นตรงที่อยู่ห่างจาก P และ Q เป็นระยะทางเท่ากัน เป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด P กับจุด Q

จุดกึ่งกลางของ PQ คือ $(2,-3)$

ความชันของ PQ คือ $\dfrac{-4-(-2)}{3-1}=\dfrac{-2}{2}$
$$=-1$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่แบ่งครึ่ง PQ คือ 1

จะได้ว่า สมการที่ต้องการ คือ $y-(-3)=1(x-2)$ หรือ $x-y-5=0$

สรุปรูปแบบของสมการเส้นตรง

(1) สมการของเส้นที่ขนานกับแกน y คือ $x=a$

(2) สมการของเส้นที่ขนานกับแกน x คือ $y=b$

(3) สมการรูปแบบจุด - ความชัน คือ $y-y_1=m(x-x_1)$

(4) สมการรูปแบบจุด 2 จุด คือ $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(5) สมการรูปแบบจุดตัดแกน y คือ $y=mx+b$

(6) สมการรูปแบบจุดตัดแกน คือ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

(7) สมการของเส้นตรงในรูปทั่วไป คือ $Ax+By+C=0$

5.3 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

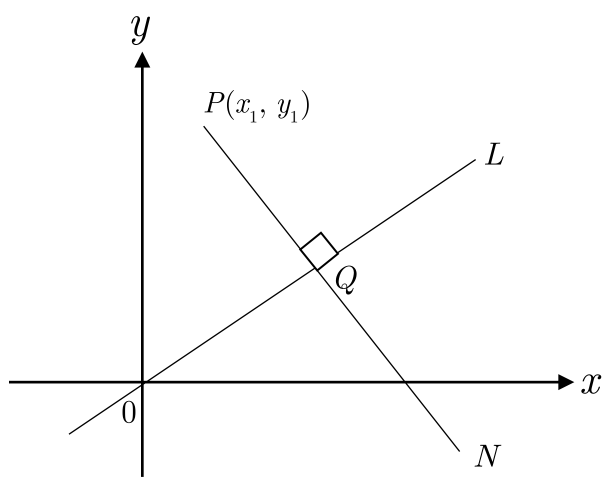
บทนิยาม 5.7 ให้ P เป็นจุดและ L เป็นเส้นตรงบนระนาบ ระยะห่างระหว่างเส้นตรง L กับจุด P หมายถึง ระยะที่ลากจากจุด P ไปตั้งฉากกับเส้นตรง L

ทฤษฎีบท 5.12 ให้ L เป็นเส้นตรงที่มีสมการ $Ax + By + C = 0$ และ $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดบนระนาบ จะได้ระยะห่างระหว่างเส้นตรง L กับจุด P คือ

$$d = \frac{| Ax_1 + By_1 + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ที่มา : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา)

พิสูจน์



ภาพประกอบ 5.20

จากภาพประกอบ 5.20 L เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้มีสมการเป็น $Ax + By + C = 0$ โดยที่ $A, B \neq 0$

ให้ N เป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P และตั้งฉากกับเส้นตรง L ที่จุด Q จะได้

ความชันของเส้นตรง L คือ $-\dfrac{A}{B}$ และ

ความชันของเส้นตรง N คือ $\frac{B}{A}$

ดังนั้น เส้นตรง N มีสมการเป็น $y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1)$ หรือ

$$Bx - Ay = Bx_1 - Ay_1 \qquad \text{.. (1)}$$

และจากสมการเส้นตรง L จะได้ $Ax + By = -C$ .... (2)

จากสมการ (1) และ (2) แก้สมการเพื่อหาพิกัดของจุด Q จะได้พิกัดของจุด Q คือ

$$\left[\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2},\ \frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2 + B^2}\right]$$

ให้ d แทนระยะทางระหว่างจุด P และ Q จะได้

$$d^2 = \left[\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2} - x_1\right]^2 + \left[\frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2 + B^2} - y_1\right]^2$$

$$d^2 = \left[\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC - A^2x_1 - B^2x_1}{A^2 + B^2}\right]^2 + \left[\frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC - A^2y_1 - B^2y_1}{A^2 + B^2}\right]^2$$

$$d^2 = \frac{\left[-A(Ax_1 + By_1 + C)\right]^2}{(A^2 + B^2)^2} + \frac{\left[-B(Ax_1 + By_1 + C)\right]^2}{(A^2 + B^2)^2}$$

$$d^2 = \frac{A^2(Ax_1 + By_1 + C)^2 + B^2(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}$$

$$d^2 = \frac{(A^2 + B^2)(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}$$

$$d^2 = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2}$$

$$d = \frac{|\,Ax_1 + By_1 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

นั่นคือ ระยะห่างระหว่างเส้นตรง L กับจุด $P(x_1, y_1)$ คือ $\dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ตัวอย่าง 5.18. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง $12x + 5y + 12 = 0$ กับจุด $(2, -2)$

วิธีทำ จากสมการ $12x + 5y + 12 = 0$

จะได้ $A = 12,\ B = 5$ และ $C = 12$

จากสูตร $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

จะได้ $d = \dfrac{|(12 \times 2) + 5(-2) + 12|}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$

$$d = \frac{|(12 \times 2) + 5(-2) + 12|}{\sqrt{144 + 25}}$$

$$d = \frac{24 - 10 + 12}{\sqrt{169}}$$

$$d = \frac{26}{13} = 2$$

นั่นคือ ระยะห่างจากเส้นตรง $12x + 5y + 12 = 0$ กับจุด $(2, -2)$ เท่ากับ 2 หน่วย

ทฤษฎีบท 5.13 ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ขนานกัน ซึ่งมีสมการเป็น $Ax + By + C_1 = 0$ และ $Ax + By + C_2 = 0$ จะได้ว่า ระยะห่างระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 คือ

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

พิสูจน์ เนื่องจากเส้นตรง L_1 และ L_2 ขนานกัน เลือกจุด $P_1(x_1, y_1)$ บนเส้นตรง L_1

ให้ d เป็นระยะห่างระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2

ดังนั้น d เป็นระยะห่างระหว่างเส้นตรง L_2 กับจุด P_1

จากสูตรระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด $d = \dfrac{|\,Ax_1 + By_1 + C_2\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ....(1)

เนื่องจากจุด P_1 อยู่บนเส้นตรง L_1 จะได้ $Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$

$$Ax_1 + By_1 = -C_1$$

แทนค่า $Ax_1 + By_1 = -C_1$ ในสมการ (1) จะได้

$$d = \frac{|-C_1 + C_2\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\,C_1 - C_2\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

นั่นคือ ระยะห่างระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน เท่ากับ $\dfrac{|\,C_1 - C_2\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ตัวอย่าง 5.19. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งขนานกับเส้นตรง $x + y - 4 = 0$

และอยู่ห่างจากเส้นตรงเส้นนี้ 4 หน่วย

วิธีทำ ความชันของเส้นตรง $x + y - 4 = 0$ เท่ากับ -1

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $x + y - 4 = 0$

คือ $y = -x + C$ หรือ $x + y - C = 0$

แต่จุด $(0, 4)$ อยู่บนเส้นตรง $x + y - 4 = 0$

ดังนั้น ระยะจากจุด $(0, 4)$ ไปยังเส้นตรง $x + y - C = 0$

คือ $d = \dfrac{|\,0 + 4 - C\,|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{|\,4 - C\,|}{\sqrt{2}}$

จะได้ว่า $$\frac{|\,4-C\,|}{\sqrt{2}}=4$$

$$|\,4-C\,|=4\sqrt{2}$$

ดังนั้น $4=4\sqrt{2}$ หรือ $4-C=-4\sqrt{2}$

จะได้ $C=4-4\sqrt{2}$ หรือ $C=4+4\sqrt{2}$

นั่นคือ สมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $x+y-4=0$ และอยู่ห่างจาก
เส้นตรงเส้นนี้ 4 หน่วย คือ

$$x+y-(4-4\sqrt{2})=0 \quad \text{และ}$$

$$x+y+(4+4\sqrt{2})=0$$

ตัวอย่าง 5.20. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $3x-4y+2=0$ และอยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(5,\,6)$ และ $(-1,\,2)$ เป็นระยะทางทั้งหมด 3 หน่วย

วิธีทำ ให้ L เป็นเส้นตรงที่ต้องการหาสมการ

เนื่องจากเส้นตรง L ขนานกับเส้นตรง $3x-4y+2=0$

ดังนั้น เส้นตรง L ขนานกับเส้นตรง $3x-4y+C=0$

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด $(5,\,6)$ และ $(-1,\,2)$ คือจุด $(2,\,4)$

ดังนั้น $$\frac{|\,3(2)-4(4)+C\,|}{\sqrt{9+16}}=3$$

$$\frac{|\,C-10\,|}{5}=3$$

ดังนั้น $$|\,C-10\,|=15$$

จะได้ $C-10=15$ หรือ $C-10=-15$

$C=25$ หรือ $C-10=-5$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ $3x-4y+25=0$ และ

$$3x-4y-5=0$$

ตัวอย่าง 5.21. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งมีความเอียงเท่ากับ 45° และอยู่ห่างจากจุด $(2, 3)$ เป็นระยะทาง $2\sqrt{2}$ หน่วย

วิธีทำ ความชันของเส้นตรงที่ต้องการ คือ $\tan 45^{\circ}=1$

จะได้ว่า เส้นตรงมีสมการเป็น $y=x+c$

หรือ $x-y+c=0$

ระยะทางจากจุด $(2, 3)$ ไปยังเส้นตรงเท่ากับ $2\sqrt{2}$ หน่วย

จะได้ $$2\sqrt{2}=\frac{|\,x-y+c\,|}{\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{2}=\frac{|\,2-3+c\,|}{\sqrt{2}}$$

$$4=|\,c-1\,|$$

ดังนั้น $c=5,-3$

จะได้สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ $x-y+5=0$

และ $x-y-3=0$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จงหา $\overline{AB}$ เมื่อกำหนดจุด A และ B ดังต่อไปนี้

    1.1 $A(1,2)$ และ $B(3,-2)$

    1.2 $A(-2,-2)$ และ $B(3,9)$

    1.3 $A(-3,1)$ และ $B(-2,5)$

    1.4 $A(6,1)$ และ $B(-2,6)$

    1.5 $A(-2,-3)$ และ $B(2,-6)$

2. จงหา $\left|AB\right|$ เมื่อกำหนดจุด A และ B ดังต่อไปนี้

    2.1 $A(3,2)$ และ $B(8,2)$

    2.2 $A(-2,2)$ และ $B(4,2)$

    2.3 $A(-3,1)$ และ $B(-8,1)$

    2.4 $A(-2,1)$ และ $B(-2,6)$

    2.5 $A(2,-3)$ และ $B(2,-6)$

3. จงหาจุดกึ่งกลางของระยะทางระหว่างจุด $A(-8,\ 9)$ และ $B(4,\ 1)$

4. จุด A เป็นจุดบนแกน Y ซึ่งห่างจากจุด $(1,1)$ กับ $(-4,6)$ เป็นระยะเท่ากัน จงหาพิกัดจุด A

5. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,\ 5)$ และ $(7,\ 7)$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

6. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

    6.1 $A(3,4)$ และ $B(5,-4)$

    6.2 $A(-2,-2)$ และ $B(3,9)$

    6.3 $A(-3,2)$ และ $B(-2,\ 3)$

    6.4 $A(6,1)$ และ $B(-2,6)$

    6.5 $A(-2,-3)$ และ $B(2,-6)$

7. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งมีความเอียงเท่ากับ 45° และอยู่ห่างจากจุด $(3, 4)$ เป็นระยะทาง $2\sqrt{2}$ หน่วย

8. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งมีความเอียงเท่ากับ 60° และอยู่ห่างจากจุด $(5, 3)$ เป็นระยะทาง $3\sqrt{3}$ หน่วย

9. จงหาสมการเส้นตรงที่มีจุดตัดแกนคือ $(3,0)$ และ $(0,-7)$

10. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,3)$ และมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{3}$

บรรณานุกรม

ภานุมาศ แสวงทอง และ ดิน ประทุมวรรณ์, **หน่วยที่ 8 เส้นตรง**, สถานที่พิมพ์ : สำนักพิมพ์เอพันธ์, 2551, หน้า 65 – 79.

คณะอาจารย์สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา, **ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์**, สถานที่พิมพ์ : มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา.

อาจารย์เบญจภรณ์ จันทรกองกุล และอาจารย์อุรีรัฐ สุขสวัสดิ์ชน, **คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาการสารสนเทศ**, หน้า 1-11.

Supanaree. (2565). **เรขาคณิตวิเคราะห์ (เส้นตรง)**, สืบค้นเมื่อ 28 กรกฎาคม 2565. จาก https://nockacademy.com/math/math