บทที่ 4

ฐานหลักและมิติของปริภูมิเวกเตอร์

ฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์เป็นโครงสร้างที่สำคัญในการอธิบายสมบัติต่าง ๆ ของปริภูมิเวกเตอร์ใน บทนี้จะกล่าวถึงนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับฐานหลัก การหาฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ และฐานหลักของปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ จากบทที่แล้ว ได้ศึกษาเกี่ยวกับเซตที่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ และเซตที่เป็นหรือไม่เป็นอิสระเชิงเส้น โดยทราบว่า ถ้าเซตใดแผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ แล้วหมายความว่า เซตนั้นจะมีเวกเตอร์มากพอที่จะทำให้เกิดปริภูมิเวกเตอร์ และเซตใดเป็นอิสระเชิงเส้นในปริภูมิเวกเตอร์ แล้วแสดงว่าเซตนั้นมีเวกเตอร์ชนิดที่ไม่เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่น แต่ถ้าเซตของเวกเตอร์ใดมีสมบัติทั้ง 2 อย่างนี้ แล้วจะได้ว่า เซตนั้นมีเวกเตอร์เฉพาะที่จำเป็นที่จะแผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์เท่านั้น

4.1 ฐานหลัก (Basis)

นิยาม 4.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F และ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน V จะเรียก S ว่าเป็น **ฐานหลัก (Basis)** ของ V ก็ต่อเมื่อ

1. S เป็นอิสระเชิงเส้น
2. S แผ่ทั่ว V

<u>**ตัวอย่าง 4.1**</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^2$ ให้ $S_1=\{(1,0),(0,1)\}$, $S_2=\{(1,1),(0,1)\}$ และ $S_3=\{(1,2),(2,0)\}$ จงพิจารณาว่า S_1,S_2 และ S_3 เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$ หรือไม่

<u>**วิธีทำ**</u> 1. พิจารณา $S_1=\{(1,0),(0,1)\}$

i) ถ้า $a_1(1,0)+a_2(0,1)=(0,0)$

$$(a_1,a_2)=(0,0)$$

แล้วจะได้ $a_1=a_2=0$

ดังนั้น S_1 เป็นอิสระเชิงเส้น

ii) $\forall\underline{v}\in\mathbb{R}^2, \underline{v}=(v_1,v_2)$

ถ้า $(v_1,v_2)=a_1(1,0)+a_2(0,1)$

$$=(a_1,a_2)$$

แล้วจะได้ $a_1 = v_1, a_2 = v_2$

นั่นคือ $(v_1, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1)$

ดังนั้น S_1 แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^2$

จาก i) และ ii) สรุปว่า S_1 เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$

2. พิจารณา $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$

i) ถ้า $a_1(1,1) + a_2(0,1) = (0,0)$

$$(a_1, a_1 + a_2) = (0,0)$$

แล้วจะได้ $a_1 = 0$ และ $a_1 + a_2 = 0$

กล่าวคือ $a_1 = a_2 = 0$

ดังนั้น S_2 เป็นอิสระเชิงเส้น

ii) $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2, \underline{v} = (v_1, v_2)$

ถ้า $(v_1, v_2) = a_1(1,1) + a_2(0,1)$

$$= (a_1, a_1 + a_2)$$

แล้วจะได้ $a_1 = v_1, a_2 = v_2, -a_1 = v_2 - v_1$

นั่นคือ $(v_1, v_2) = v_1(1,1) + (v_2 - v_1)(0,1)$

ดังนั้น S_2 แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^2$

จาก i) และ ii) สรุปว่า S_2 เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$

3. พิจารณา $S_3 = \{(1,2),(2,0)\}$

i) ถ้า $a_1(1,2) + a_2(2,0) = (0,0)$

$$(a_1 + 2a_2, 2a_1) = (0,0)$$

แล้วจะได้ $2a_1 = 0$ และ $a_1 + 2a_2 = 0$

กล่าวคือ $a_1 = a_2 = 0$

ดังนั้น S_3 เป็นอิสระเชิงเส้น

ii) $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2, \underline{v} = (v_1, v_2)$

ถ้า $(v_1, v_2) = a_1(1,2) + a_2(2,0)$

$= (a_1 + 2a_2, 2a_1)$

แล้วจะได้ $a_1 + 2a_2 = v_1$ และ $2a_1 = v_2$

กล่าวคือ $a_1 = \dfrac{v_2}{2}$ และ $a_2 = \dfrac{v_1 - a_1}{2} = \dfrac{2v_1 - v_2}{4}$

นั่นคือ $(v_1, v_2) = \dfrac{v_2}{2}(1,2) + \left(\dfrac{2v_1 - v_2}{4}\right)(2,0)$

ดังนั้น S_3 แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^2$

จาก i) และ ii) สรุปว่า S_3 เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$ ▲

จากตัวอย่าง 4.1 สรุปได้ว่า S_1, S_2 และ S_3 เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$ ซึ่งจะเห็นว่าฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$ มีหลายเซตด้วยกัน แต่เราจะเรียกฐานหลัก $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ ว่าเป็นฐานหลักมาตรฐาน (Standard Basis) ของ $\mathbb{R}^2$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ว่า $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ เป็นฐานหลักมาตรฐานของ $\mathbb{R}^3$ และ $\{(1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,0,...,1)\}$ เป็นฐานหลักมาตรฐานของ $\mathbb{R}^n$

<u>ตัวอย่าง 4.2</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ P_2 ให้ $S = \{1, x, x^2\}$ จงแสดงว่า S เป็นฐานหลักของ P_2

<u>พิสูจน์</u> i) จะแสดงว่า S เป็นอิสระเชิงเส้น

สมมติ $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$

แล้วจะได้ว่า $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

ดังนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น

ii) จะแสดงว่า S แผ่ทั่ว P_2

$\forall p \in P_2, p = c_0 + c_1x + c_2x^2$

ถ้า $c_0 + c_1x + c_2x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2$

แล้ว $a_0 = c_0, a_1 = c_1, a_2 = c_2$

ดังนั้น S แผ่ทั่ว P_2

ฉะนั้น S เป็นฐานหลักของ P_2 ▲

เราจะเรียก $S=\{1,x,x^2\}$ เป็นฐานหลักมาตรฐานของ P_2 และ $S=\{1,x,x^2,...,x^n\}$ เป็นฐานหลักมาตรฐานของ P_2

ตัวอย่าง 4.3 ในปริภูมิเวกเตอร์ $M_{2\times 2}$ ให้ $S=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ จงแสดงว่า S เป็นฐานหลักของ $M_{2\times 2}$

พิสูจน์ i) จะแสดงว่า S เป็นอิสระเชิงเส้น

สมมติ $a_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+a_4\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

แล้วจะได้ $a_1=a_2=a_3=a_4=0$

ดังนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น

ii) จะแสดงว่า S แผ่ทั่ว $M_{2\times 2}$

$\forall\begin{bmatrix}s&t\\u&v\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$

ถ้า $\begin{bmatrix}s&t\\u&v\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+a_4\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

แล้ว $a_1=s,a_2=t,a_3=u,a_4=v$

ดังนั้น S แผ่ทั่ว $M_{2\times 2}$

ฉะนั้น S เป็นฐานหลักของ $M_{2\times 2}$ ▲

เรียก S ในตัวอย่าง 4.3 ว่า ฐานหลักมาตรฐานของ $M_{2\times 2}$

ตัวอย่าง 4.4 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ของเมทริกซ์มิติ 2×2 และ $S=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$ จงพิจารณาว่า S เป็นฐานหลักของ V หรือไม่

วิธีทำ i) ถ้า $a_1\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\end{Bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}a_1&a_2\\a_2&a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

แล้วจะได้ $a_1=a_2=0$

ดังนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น

ii) $\forall \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$

ถ้า $\begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}$

แล้วจะได้ว่า $a_1 = s$ และ $a_1 = v$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

หรือ $a_2 = t$ และ $a_2 = u$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น S ไม่แผ่ทั่ว $M_{2\times 2}$

ฉะนั้น S ไม่เป็นฐานหลักของ $M_{2\times 2}$ ▲

ตัวอย่าง 4.5 ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ ให้ $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ จงพิจารณาว่า S เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$ หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า S ไม่เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$ เพราะว่า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

กล่าวว่า $(1,1,1)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$

หรือ $(1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1)$

แม้ว่า S จะแผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ เพราะว่า ถ้า $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

จะได้ว่า $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$ ▲

ตัวอย่าง 4.6 จงแสดงว่า $S = \{x^2 + x, x^2, x^2 + 1\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ P_2

พิสูจน์ i) จะแสดงว่า S เป็นอิสระเชิงเส้น

สมมติ $a_1(x^2 + x), a_2 x^2, a_3(x^2 + 1) = 0$

จะได้ $(a_1 + a_2 + a_3)x^2 + a_1 x + a_3 = 0$

ดังนั้น $a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$a_1 = 0$

และ $a_3 = 0$

ฉะนั้น $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

ดังนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น

ii) จะแสดงว่า S แผ่ทั่ว P_2

$p \in P_2, p = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

ถ้า $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = a_1\left(x^2 + x\right), a_2 x^2, a_3\left(x^2 + 1\right)$

$$= \left(a_1 + a_2 + a_3\right)x^2 + a_1 x + a_3$$

จะได้ว่า $a_1 + a_2 + a_3 = c_2$

$$a_1 = c_1$$

และ $a_3 = c_0$

ฉะนั้น $a_2 = c_2 - a_1 - a_3 = c_2 - c_1 - c_0$

ดังนั้น S แผ่ทั่ว P_2

นั่นคือ S เป็นฐานหลักของ P_2 ▲

ทฤษฎีบท 4.1 ถ้า $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ V แล้วแต่ละเวกเตอร์ใน V จะสามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S ได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น

<u>**พิสูจน์**</u> ให้ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V

เนื่องจาก S เป็นฐานหลักของ V

ดังนั้น S แผ่ทั่ว V

หรือกล่าวคือ $\underline{v}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$

สมมติ $a_1, a_2, ..., a_n$ และ $b_1, b_2, ..., b_n$ เป็นสเกลาร์ ที่ทำให้

$$\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \cdots + a_n \underline{v}_n \qquad (4.1)$$

และ $$\underline{v} = b_1 \underline{v}_1 + b_2 \underline{v}_2 + \cdots + b_n \underline{v}_n \qquad (4.2)$$

$(4.1)-(4.2):\quad \underline{0} = \left(a_1 + b_1\right)v_1 + \left(a_2 - b_2\right)v_2 + \cdots + \left(a_n - b_n\right)v_n$

แต่ S เป็นอิสระเชิงเส้น จะได้ว่า สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$

$$a_i - b_i = 0$$

นั่นคือ $a_i - b_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, ..., n$

ดังนั้น สามารถเขียนแต่ละเวกเตอร์ใน V ในรูปการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S ได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น ▲

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดให้ $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ที่ไม่มีสมาชิกใดเป็นเวกเตอร์ศูนย์ ถ้า S แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ V แล้วจะมีเซตย่อยของ S เป็นฐานหลักของ V

<u>พิสูจน์</u> 1. ถ้า S เป็นอิสระเชิงเส้น จะได้ว่า S เป็นฐานหลักของ V เพราะว่า S แผ่ทั่ว V ตามที่กำหนดให้

2. ถ้า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น จะมีเวกเตอร์ $\underline{v}_i$ ซึ่งสามารถเขียนในรูปการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{i-1}$ สำหรับ i บางตัวที่มากกว่า 1

นั่นคือ $\underline{v}_i = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\underline{v}_{i-1}$

ให้ $S_1 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n\}$

ถ้า $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V

แต่ S แผ่ทั่ว V จะได้ว่า มี $b_1, b_2, \ldots, b_n$ เป็นสเกลาร์ ซึ่ง

$$\underline{v} = b_1\underline{v}_1 + b_2\underline{v}_2 + \cdots + b_{i-1}\underline{v}_{i-1} + b_i\underline{v}_i + b_{i+1}\underline{v}_{i+1} + \cdots + b_n\underline{v}_n$$

ดังนั้น $\underline{v} = b_1\underline{v}_1 + b_2\underline{v}_2 + \cdots + b_{i-1}\underline{v}_{i-1} + b_i\left(a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\underline{v}_{i-1}\right) +_{i+1}\underline{v}_{i+1} + \cdots + b_n\underline{v}_n$

$$= \left(b_1 + b_i a_1\right)\underline{v}_1 + \cdots + \left(b_{i-1} + b_i a_{i-1}\right)\underline{v}_{i-1} + b_{i+1}\underline{v}_{i+1} + \cdots + b_n\underline{v}_n$$

ฉะนั้น $\underline{v}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ S_1

ดังนั้น S_1 แผ่ทั่ว V

ถ้า S_1 เป็นอิสระเชิงเส้น แล้ว S_1 เป็นฐานหลักของ V

ถ้า S_1 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น แล้วต้องสร้าง S_2 โดยจัดเวกเตอร์ $\underline{v}_k$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \ldots, \underline{v}_{k-1}$ สำหรับ k บางตัวที่มากกว่า 1

ทำเช่นนี้ต่อไปนี้ เนื่องจาก S เป็นเซตจำกัด จึงสามารถหาเซต T ซึ่ง T เป็นเซตย่อยของ S และ T เป็นฐานหลักของ V ▲

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $S = \{(1,0,0), (0,1,1), (1,1,1), (1,0,1), (2,1,2)\}$

จะเห็นว่า $S \subset \mathbb{R}^3$

และ S แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ เพราะว่าถ้าให้ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

$$(x, y, z) = a(1,0,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1)$$

$$= (a + c, b, b + c)$$

ดังนั้น $$x = a + c \qquad (4.3)$$

$$y = b \qquad (4.4)$$

และ $$z = b + c \qquad (4.5)$$

นั่นคือจาก (4.4) จะได้ $b = y$

เมื่อแทน $b = y$ ใน (4.5) จะได้ $c = z - y$

และแทน $c = z - y$ ใน (4.3) จะได้ $a = x - z + y$

ฉะนั้น $(x, y, z) = (x - z + y)(1,0,0) + y(0,1,1) + (z - y)(1,0,1)$

แต่ S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น เพราะว่า $(1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,1)$

ให้ $S_1 = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1),(1,0,1),(2,1,2)\}$

จะเห็นว่า S_1 แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ เช่นเดียวกัน แต่ S_1 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นเพราะว่า

$$(2,1,2) = (1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)$$

ให้ $$S_2 = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$$

จะได้ว่า S_2 แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ และ S_2 เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น S_2 เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$

นิยาม 4.2 ปริภูมิเวกเตอร์ V ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียกว่าเป็น **ปริภูมิมิติจำกัด** (finite-dimensional space) เมื่อมีเซตจำกัด $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นฐานหลักของ V และจะเรียก V ว่าเป็น **ปริภูมิมิติอนันต์** (infinite-dimensional space) เมื่อไม่มีเซตจำกัดของเวกเตอร์เป็นฐานหลักของ V สำหรับกรณี $V = \{\underline{0}\}$ จะกล่าวว่า V เป็นปริภูมิจำกัด ถึงแม้ว่า $\{\underline{0}\}$ จะไม่มีฐานหลักก็ตาม

ตัวอย่างเช่น ปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^n, P_n, M_{m\times n}$ เป็นปริภูมิมิติจำกัด

ทฤษฎีบท 4.3 ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด และมี $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นฐานหลักใด ๆ ของ V แล้วเซตย่อยจำกัดใด ๆ ของ V ที่มีสมาชิกมากกว่า n ตัว จะเป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

<u>**พิสูจน์**</u> ให้ $S' = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, ..., \underline{u}_m\} \subset V$ โดยที่ $m > n$

จะแสดงว่า S' เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

ให้ $a_1, a_2, ..., a_m$ เป็นสเกลาร์ ที่ทำให้

$$a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2 + \cdots + a_m\underline{u}_m = \underline{0} \qquad (4.6)$$

เนื่องจาก $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นฐานหลักของ V

และ $\underline{u}_i \in V$ สำหรับทุก $i = 1, 2, ..., m$

ดังนั้น $\underline{u}_1 = c_{11}\underline{v}_1 + c_{21}\underline{v}_2 + \cdots + c_{n1}\underline{v}_n$

$$\underline{u}_2 = c_{12}\underline{v}_1 + c_{22}\underline{v}_2 + \cdots + c_{n2}\underline{v}_n$$

$$\vdots$$

$$\underline{u}_m = c_{1m}\underline{v}_1 + c_{2m}\underline{v}_2 + \cdots + c_{nm}\underline{v}_n$$

แทน $\underline{u}_1, \underline{u}_2, ..., \underline{u}_m$ ใน (4.6) จะได้

$$a_1\left(c_{11}\underline{v}_1 + c_{21}\underline{v}_2 + \cdots + c_{n1}\underline{v}_n\right) + a_2\left(c_{12}\underline{v}_1 + c_{22}\underline{v}_2 + \cdots + c_{n2}\underline{v}_n\right)$$

$$+ \cdots + a_m\left(c_{1m}\underline{v}_1 + c_{2m}\underline{v}_2 + \cdots + c_{nm}\underline{v}_n\right) = \underline{0}$$

$$\left(a_1c_{11} + a_2c_{12} + \cdots + a_mc_{1m}\right)\underline{v}_1 + \left(a_1c_{21} + a_2c_{22} + \cdots + a_mc_{2m}\right)\underline{v}_2$$

$$+ \cdots + \left(a_1c_{n1} + a_2c_{n2} + \cdots + a_mc_{nm}\right)\underline{v}_n = \underline{0}$$

เนื่องจาก S เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น $c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + \cdots + c_{1m}a_m = 0$

$$c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + \cdots + c_{2m}a_m = 0$$

$$\vdots$$

$$c_{n1}a_1 + c_{n2}a_2 + \cdots + c_{nm}a_m = 0$$

หรือ $$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

ซึ่งระบบสมการนี้เป็นระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ที่มี n สมการ m ตัวแปร และ $m > n$

ฉะนั้น ระบบสมการมีผลเฉลยมากมาย

นั่นคือ จะมี $a_1, a_2, ..., a_m$ บางตัวไม่เท่ากับศูนย์

ดังนั้น S' เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น ▲

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 4.3 กำหนดให้ $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ และ $T = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, ..., \underline{w}_m\}$ ถ้า S เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ V และ $T \subset V$ และ T เป็นอิสระเชิงเส้น แล้ว $m \le n$

ทฤษฎีบท 4.4 ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มี $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นฐานหลัก แล้วฐานหลักอื่น ๆ ของ V จะต้องมีสมาชิก n ตัว

<u>พิสูจน์</u> ให้ $T = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, ..., \underline{w}_m\}$ เป็นฐานหลักอื่น ๆ ของ V

จะแสดงว่า $m = n$

เนื่องจาก T เป็นฐานหลักของ V

ดังนั้น T เป็นอิสระเชิงเส้น

จากทฤษฎีบท 4.3 จะได้ว่า $m \le n$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า S เป็นอิสระเชิงเส้น

จากทฤษฎีบท 4.3 จะได้ $n \le m$

ดังนั้น $m = n$ ▲

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 4.4 ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด แล้วทุก ๆ ฐานหลักของ V จะต้องมีจำนวนเวกเตอร์เท่ากัน หรือกล่าวคือ ถ้า $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ และ $T = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, ..., \underline{w}_m\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ V แล้ว $m = n$

นิยาม 4.3 กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด มิติ (dimension) ของ V เขียนแทนด้วย $\dim(V)$ หมายถึง จำนวนเวกเตอร์ที่อยู่ในฐานหลักของ V สำหรับกรณี $V = \{\underline{0}\}$ จะนิยาม $\dim(V) = 0$

ปริภูมิเวกเตอร์ใดมีฐานหลักเป็นเซตจำกัด จะเรียกมิติของปริภูมิเวกเตอร์นั้นว่า **มิติจำกัด** และ ปริภูมิเวกเตอร์ใดมีฐานหลักเป็นเซตอนันต์ จะเรียกมิติของปริภูมิเวกเตอร์นั้นว่า มิติอนันต์

ตัวอย่างเช่น ปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^n, P_n, M_{m\times n}$ เป็นปริภูมิมิติจำกัด จะมีมิติดังต่อไปนี้

1) เนื่องจากฐานหลักของ $\mathbb{R}^n$ เช่น ฐานหลักมาตรฐานมีเวกเตอร์จำนวน n ตัว
   ดังนั้น $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
2) เนื่องจากฐานหลักของ P_n เช่น ฐานหลักมาตรฐานมีเวกเตอร์จำนวน $n+1$ ตัว
   ดังนั้น $\dim(P_n) = n+1$
3) เนื่องจากฐานหลักของ $M_{m\times n}$ เช่น ฐานหลักมาตรฐานมีเวกเตอร์จำนวน mn ตัว
   ดังนั้น $\dim(M_{m\times n}) = mn$

<u>ตัวอย่าง 4.7</u> กำหนดให้ $S \subset \mathbb{R}^3$ โดย $S = \{(x, y, z) | x - y + z = 0\}$ จงหา $\dim(S)$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่าง 3.10 จะได้ว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

ให้ $T = \{(1,1,0), (1,0,-1)\}$

จะแสดงว่า T เป็นฐานหลักของ S

i) จะแสดงว่า T เป็นอิสระเชิงเส้น

สมมติ $a_1(1,1,0) + a_2(1,0,-1) = (0,0,0)$

จะได้ว่า $(a_1 + a_2, a_1, -a_2) = (0,0,0)$

ดังนั้น $a_1 + a_2 = 0$

$a_1 = 0$

และ $-a_2 = 0$

ฉะนั้น $a_1 = a_2 = 0$

ดังนั้น T เป็นอิสระเชิงเส้น

ii) จะแสดงว่า T แผ่ทั่ว S

$\forall \underline{v} \in S, \underline{v} = (x, y, z)$ โดยที่ $x - y + z = 0$

ถ้า $(x, y, z) = a_1(1,1,0) + a_2(1,0,-1)$

$= (a_1 + a_2, a_1, -a_2)$

แล้วจะได้ $a_1 + a_2 = x, a_1 = y, -a_2 = z$

หรือ $a_1 = y, a_2 = -z = x - y$

นั่นคือ $(x, y, z) = y(1,1,0) - z(1,0,-1)$

ดังนั้น T แผ่ทั่ว S

จาก i) และ ii) สรุปว่า T เป็นฐานหลักของ S

เพราะฉะนั้น $\dim(S) = 2$

▲

ข้อสังเกต ปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ อาจมีมิติน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\mathbb{R}^3$ ก็ได้

ตัวอย่าง 4.8 จงหาฐานหลักและมิติของปริภูมิของผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-x_3 \qquad\quad +x_5&=0\\ -x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5&=0\\ x_1+x_2-2x_3 \qquad\quad -x_5&=0\\ x_3+x_4+x_5&=0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

$$\because [A]=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \to R_2+R_1\\ \sim\\ R_3 \to R_3-2R_1 \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_2 \leftrightarrow R_4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_3 \to R_3-3R_2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_3 \to \frac{R_3}{-3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_4 \to R_4+3R_3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า rank $A=3$

และ จำนวนตัวแปร $=5$

นั่นคือ rank $A <$ จำนวนตัวแปรในระบบ

ดังนั้น ระบบสมการมีผลเฉลยมากมาย

จากเมทริกซ์สุดท้าย จะได้

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 \qquad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

ถ้าให้ $x_2 = s$ โดยที่ s เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ หรือ $s \in \mathbb{R}$

และ $x_5 = t$ โดยที่ t เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ หรือ $t \in \mathbb{R}$

จะได้ $x_3 = -x_4 - x_5 = -0 - t = -t$

และ $x_1 = -x_2 + 2x_3 + x_5 = -s + 2(-t) + t = -s - t$

นั่นคือ $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; s, t \in \mathbb{R}$$

ให้ $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

โดย $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

จะพบว่าทุกผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นนี้ จะเป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ กล่าวคือ ถ้าให้ W เป็นเซตของผลเฉลย แล้ว W ถูกแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ หรือ B แผ่ทั่ว W หรือ $W = span(B)$

และ $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ ไม่เป็นผลคูณสเกลาร์ซึ่งกันและกัน

ดังนั้น B เป็นอิสระเชิงเส้น

นั่นคือ B เป็นฐานหลักของ W

ฉะนั้น $\dim(W) = 2$ ▲

ข้อสังเกต การที่จะแสดงว่า $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นฐานหลักของ V จะต้องแสดงว่า $V = span(S)$ และ S เป็นอิสระเชิงเส้น แต่ถ้าทราบว่า $\dim(V) = n$ ซึ่งเท่ากับจำนวนเวกเตอร์ใน S ก็จะสามารถหาฐานหลักของ V ได้สะดวกขึ้น นั่นคือ เพียงแสดงว่า $V = span(S)$ หรือ S เป็นเซตอิสระเชิงเส้นอย่างใดอย่างหนึ่ง

ก็เพียงพอ กล่าวคือ ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด มี $\dim(V)=n$ และ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน V ถ้า $V=span(S)$ หรือ S เป็นเซตอิสระเชิงเส้น แล้ว S เป็นฐานหลักของ V ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 4.9</u> กำหนด $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ โดยที่ $\underline{v}_1=(2,0,-1),\underline{v}_2=(4,0,7),\underline{v}_3=(-1,1,4)$ จงแสดงว่า S เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\dim(\mathbb{R}^n)=3$ จะเหลือเพียงแสดงว่า S เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

พิจารณา $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+a_3\underline{v}_3=0$ เมื่อ a_1,a_2,a_3 เป็นสเกลาร์ จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}=0+0+1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$

$$=(-1)(14+4)$$
$$=-18\neq 0$$

ดังนั้น ระบบสมการจะมีผลเฉลยเพียงชุดเดียว คือ $a_1=a_2=a_3=0$

นั่นคือ S เป็นอิสระเชิงเส้น

ฉะนั้น S เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$ ▲

ทฤษฎีบท 4.5 กำหนดให้ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n\}$ เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V ถ้า S เป็นอิสระเชิงเส้น และ $\dim(V)=m$ แล้วจะมีเวกเตอร์ $\underline{w}_1,\underline{w}_2,...,\underline{w}_{m-n}$ ใน V ที่

$$T=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n,\underline{w}_1,\underline{w}_2,...,\underline{w}_{m-n}\}$$

เป็นฐานหลักของ V

<u>พิสูจน์</u> ให้ $B=\{\underline{w}_1,\underline{w}_2,...,\underline{w}_m\}$ เป็นฐานหลักของ V

และให้ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n,\underline{w}_1,\underline{w}_2,...,\underline{w}_{m-n}\}$

เพราะว่า $B\subset S_1$ และ B แผ่ทั่ว V

ดังนั้น S_1 แผ่ทั่ว V และ $\underline{0}\notin S_1$

โดยทฤษฎีบท 4.2 จะมีฐานหลัก T โดยที่ $T\subset S_1$

สำหรับการหา T นั้นเรามีวิธีหาโดยการตัดเวกเตอร์ใน S_1 ที่เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ข้างหน้าออก แต่เนื่องจาก S เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น จะไม่มี $\underline{v}_i$ ใดเป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่น ๆ

นั่นคือ เวกเตอร์ $\underline{v}_i$ ทั้งหมดจึงไม่ถูกตัดออก จะได้ว่า $S \subset T$

ฉะนั้น $T = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n, \underline{w}_1, \underline{w}_2, ..., \underline{w}_{m-n}\}$ ▲

ข้อสังเกต 1. ถ้า $\dim(V) = n$ แล้วฐานหลักของ V จะเป็นเซตที่ใหญ่ที่สุดที่เป็นอิสระเชิงเส้น และเซตนี้จะมีสมาชิก n เวกเตอร์ และฐานหลักของ V เป็นเซตที่เล็กที่สุดที่แผ่ทั่ว V

2. ถ้า $\dim(V) = n$ แล้วเซตย่อยของ V ที่มีจำนวนสมาชิกมากกว่า n จะไม่เป็นอิสระเชิงเส้น และเซตย่อยของ V ที่มีจำนวนสมาชิกน้อยกว่า n จะไม่แผ่ทั่ว V

<u>**ตัวอย่าง 4.10**</u> จงหาฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$ โดยที่ฐานหลักนี้มี $\underline{v} = (0,1,1)$ เป็นสมาชิก

<u>**วิธีทำ**</u> ให้ $\underline{v}_1 = (1,0,0), \underline{v}_2 = (0,1,0), \underline{v}_3 = (0,0,1)$

เนื่องจาก $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ เป็นฐานหลักมาตรฐานของ $\mathbb{R}^3$

ต่อไปจะพิจารณาว่า $(1,0,0)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(0,1,1)$ หรือไม่

เนื่องจาก $(1,0,0) = a_1(0,1,1)$

นั่นคือ $(1,0,0) = (0, a_1, a_1)$

ดังนั้น $a_1 = 0$

และ $0 = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ฉะนั้น $(1,0,0)$ ไม่เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(0,1,1)$

นั่นคือ $\{(0,1,1),(1,0,0)\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ถัดไปจะพิจารณาว่า $(0,1,0)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(0,1,1)$ และ $(1,0,0)$ หรือไม่

เนื่องจาก $(0,1,0) = a_1(0,1,1) + a_2(1,0,0)$

นั่นคือ $(0,1,0) = (a_1, a_2, a_3)$

ดังนั้น $a_2 = 0$

$a_1 = 1$

และ $a_1 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ฉะนั้น $(0,1,0)$ ไม่เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(0,1,1)$ และ $(1,0,0)$

นั่นคือ $\{(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

สุดท้ายจะพิจารณาว่า $(0,0,1)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(0,1,1),(1,0,0)$ และ $(0,1,0)$ หรือไม่ เนื่องจาก $(0,0,1) = a_1(0,1,1) + a_2(1,0,0) + a_3(0,1,0)$

นั่นคือ $(0,0,1) = (a_2, a_1 + a_3, a_1)$

ดังนั้น $a_1 = 1$

$a_2 = 0$

และ $a_3 = -1$

ฉะนั้น $(0,0,1)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(0,1,1),(1,0,0)$ และ $(0,1,0)$

นั่นคือ $(0,0,1)$ จึงไม่อยู่ในฐานหลัก

ให้ $S_1 = \{(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$

จะได้ว่า S_1 แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ และเป็นอิสระเชิงเส้น

นั่นคือ S_1 เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$ ▲

ข้อสังเกต หลักในการหาฐานหลัก S ของ V ที่ง่ายและสะดวกที่สุด คือ กาเริ่มจากฐานหลักมาตรฐานโดยเพิ่มเวกเตอร์จากฐานหลักมาตรฐานนี้เข้าไปใน S และจำนวนเวกเตอร์ที่จะเป็นฐานหลักนี้ เราทราบจากมิติของ V กล่าวคือ $\dim(V)$ จะต้องเท่ากับจำนวนสมาชิกของ S ที่เป็นฐานหลักของ V

4.2 ปริภูมิเวกเตอร์แถวและปริภูมิเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์

(Row Vector Space and Column Vector Space of a Matrix)

นิยาม 4.4 ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $m\times n$ ซึ่ง $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ $\underline{v}_1=(a_{11},a_{12},...,a_{1n}),\underline{v}_2=(a_{21},a_{22},...,a_{2n}),...,\underline{v}_m=(a_{m1},a_{m2},...,a_{mn})$ ซึ่งเป็นสมาชิกในแถวที่ 1 ถึงแถวที่ m ของ A จะเรียกว่า เวกเตอร์แถว (Row Vectors) ของ A และเวกเตอร์

$\underline{c}_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\underline{c}_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},...,\underline{c}_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นสมาชิกในหลักที่ 1 ถึงแถวที่ n ของ A จะเรียก **เวกเตอร์หลัก** (Columa Vectors)

ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A (Row Vectors Space of A) คือ ปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ ซึ่งแผ่ทั่วโดย $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_m\}$ และ**ปริภูมิเวกเตอร์หลัก**ของ A (Columa Vectors Space of A) คือ ปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ ซึ่งแผ่ทั่วโดย $\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,...,\underline{c}_n\}$

ตัวอย่างเช่น ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

เวกเตอร์แถวของ A คือ $\underline{v}_1=(1,3),\underline{v}_2=(2,-1),\underline{v}_3=(5,0)$ และ $\underline{v}_4=(1,2)$

เวกเตอร์หลักของ A คือ $\underline{c}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\underline{c}_2=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A คือ ปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$ ซึ่งแผ่ทั่วโดย $\{(1,3),(2,-1),(5,0),(1,2)\}$

ปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A คือ ปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^4$ ซึ่งแผ่ทั่วโดย $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

ทฤษฎีบท 4.6 ถ้าเมทริกซ์ A สมมูลตามแถวกับ B แล้วปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A เท่ากับปริภูมิเวกเตอร์แถวของ B

<u>พิสูจน์</u> ให้ A สมมูลตามแถวกับ B

ดังนั้น แต่ละแถวของ B เกิดจากเมทริกซ์ A โดยการดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน จะได้ว่า แต่ละแถวของ B เป็นการรวมเชิงเส้นของแถวของ A

นั่นคือ ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ B เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A

และถ้าใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานผกผันที่ใช้ข้างต้นในลำดับย้อนกลับกระทำกับแถวของเมทริกซ์ B จะได้เมทริกซ์ A

ฉะนั้น ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์แถวของ B

สรุปได้ว่า ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A เท่ากับปริภูมิเวกเตอร์แถวของ B ▲

ในทำนองเดียวกัน จากทฤษฎีบท 4.6 ถ้าเมทริกซ์ A สมมูลตามหลักกับ B แล้วปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A เท่ากับปริภูมิเวกเตอร์หลักของ B

และผลจากทฤษฎีบทนี้ จะใช้ในการหาฐานหลักของปริภูมิย่อยซึ่งแผ่ทั่วโดยเซตของเวกเตอร์ นั่นคือ เวกเตอร์แถวที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ในเมทริกซ์ขั้นบันไดของเมทริกซ์ A จะเป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A ดังนี้ตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 4.11</u> ให้ V เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^4$ ซึ่งแผ่ทั่วโดย $S=\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3,\underline{a}_4,\underline{a}_5\}$
เมื่อ $\underline{a}_1=(1,1,0,2),\underline{a}_2=(0,1,4,1),\underline{a}_3=(2,2,1,-1),\underline{a}_4=(1,1,1,-3)$ และ $\underline{a}_5=(0,1,5,-4)$
จงหาฐานหลักของ V

<u>วิธีทำ</u> ให้ V ปริภูมิเวกเตอร์แถวของเมทริกซ์ A ซึ่ง

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&2\\0&1&4&1\\2&2&1&-1\\1&1&1&-3\\0&1&5&-4\end{bmatrix}\begin{matrix}R_3\to R_3-2R_1\\ \sim\\ R_4\to R_4-R_1\end{matrix}\begin{bmatrix}1&1&0&2\\0&1&4&1\\0&0&1&-5\\0&0&1&-5\\0&1&5&-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_1\to R_1-R_2\\ \sim\\ R_5\to R_5-R_2\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&-4&1\\0&1&4&1\\0&0&1&-5\\0&0&1&-5\\0&0&1&-5\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \to R_1 + 4R_3 \\ R_2 \to R_2 - 4R_3 \\ \sim \\ R_4 \to R_4 - R_3 \\ R_5 \to R_5 - R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A และปริภูมิเวกเตอร์แถวของ B เป็นปริภูมิเดียวกัน แต่ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ B มี $\{(1,0,0,-19),(0,1,0,21),(0,0,1,-5)\}$ เป็นฐานหลัก

ดังนั้น ฐานหลักของ V คือ $(1,0,0,-19),(0,1,0,21),(0,0,1,-5)$ ▲

จากตัวอย่างนี้ จะพบว่า สามารถใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานเพื่อหาฐานหลักของปริภูมิย่อยที่แผ่ทั่วโดยเซตของเวกเตอร์ที่กำหนดให้

นอกจากนี้ การเขียนเวกเตอร์แถวจะนิยามเขียนในแนวนอน และเวกเตอร์หลักจะนิยามเขียนในแนวตั้ง ซึ่งเวกเตอร์แถวอาจจะเขียนในแนวตั้ง และเวกเตอร์หลักอาจจะเขียนในแนวนอนก็ได้ และจากข้อสังเกตนี้จะเห็นว่า การเปลี่ยนจากแนวตั้งมาเป็นแนวนอน ปริภูมิเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์ก็ยังคงเหมือนกับปริภูมิเวกเตอร์แถวของเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์นั้น ดังนั้น จะสามารถหาฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์ A โดยการหาฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A^t และเขียนกลับในแนวตั้ง

<u>ตัวอย่าง 4.12</u> จงหาฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} R_3 \to R_3 - R_1 \\ \sim \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c} R_2 \to \dfrac{R_2}{2} \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \to R_1 - 3R_2 \\ R_3 \to R_3 - 2R_2 \\ \sim \\ R_4 \to R_4 + 2R_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(1,0,-6)$ และ $(0,1,2)$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A^t หรือ $\underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ และ

$\underline{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ จะเป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A ▲

ทฤษฎีบท 4.7 ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ ใด ๆ แล้วปริภูมิเวกเตอร์แถวและปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A จะมีมิติเดียวกัน

<u>พิสูจน์</u> ให้เวกเตอร์แถวของ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ แทนด้วย $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_m$ โดย

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \\ \underline{v}_2 &= (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}) \\ &\vdots \\ \underline{v}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}) \end{aligned}$$

สมมติว่าปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A มีมิติเป็น k และ $S = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, ..., \underline{b}_k\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์แถว โดยที่ $\underline{b}_i = \{\underline{b}_{i1}, \underline{b}_{i2}, ..., \underline{b}_{in}\}$

เนื่องจาก S เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์แถว

ดังนั้น จะได้ว่า สมาชิกทุกตัวของปริภูมิเวกเตอร์แถวจะเป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{b}_1, \underline{b}_2, ..., \underline{b}_k$ ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \underline{r}_1 &= c_{11}\underline{b}_1 + c_{12}\underline{b}_2 + \cdots + c_{1k}\underline{b}_k \\ \underline{r}_2 &= c_{21}\underline{b}_1 + c_{22}\underline{b}_2 + \cdots + c_{2k}\underline{b}_k \\ &\vdots \\ \underline{r}_m &= c_{m1}\underline{b}_1 + c_{m2}\underline{b}_2 + \cdots + c_{mk}\underline{b}_k \end{aligned}\right\}$$

และเวกเตอร์สองเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^n$ เท่ากันก็ต่อเมื่อส่วนประกอบที่สมนัยกันจะต้องเท่ากัน นั่นคือ ส่วนประกอบที่ j ของ (4.7) จะเท่ากัน ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + c_{12}b_{2j} + \cdots + c_{1k}b_{kj} \\ a_{2j} &= c_{21}b_{1j} + c_{22}b_{2j} + \cdots + c_{2k}b_{kj} \\ &\vdots \\ a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + c_{m2}b_{2j} + \cdots + c_{mk}b_{kj} \end{aligned}$$

หรือ $$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = b_{1j}\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + b_{2j}\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + b_{kj}\begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

ซึ่งทางซ้ายของ (4.8) จะเป็นหลักที่ j ของ A และ $j = 1, 2, \ldots, n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ
ดังนั้น แต่ละเวกเตอร์หลักของ A จะอยู่ในปริภูมิที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ทางขวาของ (4.8)
ฉะนั้น ปริภูมิเวกเตอร์หลักจะมีมิติน้อยกว่าหรือเท่ากับ k

เนื่องจาก $k = \dim$ (ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A) จะได้

$\dim$ (ปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A) $\le \dim$ (ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A) $\quad (4.9)$

ในทำนองเดียวกัน

$\dim$ (ปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A^t) $\le \dim$ (ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A^t) $\quad (4.10)$

แต่การสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ คือ การเปลี่ยนหลักของเมทริกซ์ให้เป็นแถว และเปลี่ยนแถวให้เป็นหลัก
ดังนั้น ปริภูมิเวกเตอร์หลักของ $A^t =$ ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A
และ ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ $A^t =$ ปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A
ซึ่งสามารถเขียน (4.10) ได้ดังนี้

$\dim$ (ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A) $\le \dim$ (ปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A) $\quad (4.11)$

จาก (4.9) และ (4.11) สรุปได้ว่า

$\dim$ (ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A) $= \dim$ (ปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A) ▲

<u>ตัวอย่าง 4.13</u> จงหามิติของปริภูมิเวกเตอร์หลักและปริภูมิเวกเตอร์แถวของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

$$\underset{\sim}{R_2 \to \frac{R_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - 4R_2 \underset{\sim}{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(1,0,1,1)$ และ $(0,1,1,-1)$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A

ฉะนั้น มิติของปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A เท่ากับ 2

และจากทฤษฎีบท 4.7 จะได้ว่า มิติของปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A เป็น 2 ▲

จากตัวอย่างนี้ จะพบว่า เมื่อใช่การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานกระทำกับเมทริกซ์ A จนเป็นเมริกซ์ขั้นบันได จะได้ว่า มีจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์หมด 2 แถว ดังนั้น มิติของปริภูมิเวกเตอร์แถว จะเป็น 2 ซึ่งจะทำให้นิยามค่าลำดับขั้นของเมทริกซ์ A ได้ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 4.5 มิติของปริภูมิเวกเตอร์แถวและปริภูมิเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์ A จะเรียกว่า **ค่าลำดับขั้น**ของ A

นั่นคือ rank $A = \dim$ (ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A) $= \dim$(ปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A)

ทฤษฎีบท 4.8 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n แล้วข้อความต่อไปนี้จะสมมูลกัน

1. A จะหาตัวผกผันได้
2. $AX = \underline{0}$ จะมีผลเฉลยชัด
3. A จะสมมูลตามแถวกับ I_n
4. $AX = B$ เป็นระบบที่มีผลเฉลย เมื่อ B เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times 1$
5. $\det A \neq 0$
6. A มีค่าลำดับขั้นเท่ากับ n
7. เวกเตอร์แถวของ A จะเป็นอิสระเชิงเส้น
8. เวกเตอร์แถวของ A จะเป็นอิสระเชิงเส้น

<u>**พิสูจน์**</u> เห็นชัดว่า 3 สมมูลกับ 1,2,4 และ 5

จะแสดงว่า 3,6,7 และ 8 สมมูลกัน

เริ่มจาก จะพิสูจน์ว่า $3 \to 6$

ให้ A สมมูลตามแถวกับ I_n และเนื่องจาก I_n มีจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์หมด n แถว จะได้ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A จะมีมิติเท่ากับ n

ดังนั้น A มีค่าลำดับขั้นเป็น n

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $6 \to 7$

ให้ A มีลำดับขั้นเป็น n

จะได้ว่า ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A จะมีมิติเท่ากับ n

และเวกเตอร์แถว n เวกเตอร์ของ A ทั่วปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A

ดังนั้น เวกเตอร์หลักของ A จะเป็นอิสระเชิงเส้น

ถัดไป จะพิสูจน์ว่า $7 \to 8$

ให้เวกเตอร์แถวของ A เป็นอิสระเชิงเส้น

จะได้ว่า ปริภูมิเวกเตอร์แถวและปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A จะมีมิติเท่ากับ n

และเนื่องจากเวกเตอร์หลักของ A แผ่ทั่วริภูมิเวกเตอร์หลัก

ดังนั้น เวกเตอร์หลักของ A จะเป็นอิสระเชิงเส้น

สุดท้าย จะพิสูจน์ว่า $8 \to 3$

ให้เวกเตอร์หลักของ A เป็นอิสระเชิงเส้น

จะได้ว่า ปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A จะมีมิติ n และปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A จะมีมิติ n ด้วย

นั่นคือ เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถวของ A จะมีจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์หมด n แถว

กล่าวคือ เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถวของ A จะเป็น I_n

ดังนั้น A จะสมมูลตามแถวกับ I_n ▲

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$AX = B$$

โดยที่ A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของตัวแรในระบบสมการ

B เป็นเมทริกซ์ของค่าคงที่ในระบบสมการ

และ X เป็นเมทริกซ์ของตัวแปรในระบบสมการ

หรือเขียนแทนด้วย

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

หรือ $x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

นั่นคือ $AX = x_1 \underline{c}_1 + x_2 \underline{c}_2 + \cdots + x_m \underline{c}_m$

เมื่อ $\underline{c}_1, \underline{c}_2, ..., \underline{c}_m$ ปริภูมิเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์ A

และ $x_i;\ i = 1, 2, ..., m$ เป็นตัวแปรในระบบสมการ

จากสมการข้างต้น จะได้ว่าผลคูณ AX เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์หลักของ A ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.9 ระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะมีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ B เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์หลักของ A

<u>พิสูจน์</u> ให้ $AX = B$ เป็นระบบสมการ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

1. ให้ $AX = B$ มีผลเฉลย

และสมมติ $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_m' \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของ $AX = B$

จะได้ว่า $AX' = B$

หรือ $B = x_1'\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2'\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m'\begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$

ดังนั้น B เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์หลักของ A

2. ให้ B เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์หลักของ A

ฉะนั้น จะมีสเกลาร์ $x_1', x_2', ..., x_m'$ ที่ทำให้

$$B = x_1'\underline{c}_1 + x_2'\underline{c}_2 + \cdots + x_m'\underline{c}_m$$

เมื่อ $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \cdots + \underline{c}_m$ เป็นเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์ A

นั่นคือ $B = x_1'\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2'\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m'\begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ มีผลเฉลย ▲

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -9$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3$$

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $AX = B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

จากการแก้ระบบสมการ จะได้ว่า ผลเฉลยเป็น $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$

ดังนั้น ผลคูณของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์หลักของ A ได้ดังนี้

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

4.3 เวกเตอร์พิกัดและเมทริกซ์พิกัด (Coordinate Vector and Coordinate Matrix)

นิยาม 4.6 ถ้า $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ V และ $\underline{v}\in V$ สมมติ $\underline{c}_1,\underline{c}_2,...,\underline{c}_n$ เป็นสเกลาร์ที่ทำให้ $\underline{v}=c_1\underline{v}_1+c_2\underline{v}_2+...+c_n\underline{v}_n$ **เวกเตอร์พิกัดของ $\underline{v}$ เทียบกับฐานหลัก** S (Coordinate Vector of $\underline{v}$ with respect to the ordered basis S) จะเขียนแทนด้วย $(\underline{v})_S$ ซึ่งนิยาม $(\underline{v})_S=(\underline{c}_1,\underline{c}_2,...,\underline{c}_n)$ โดยเรียกสมาชิกของ $(\underline{v})_S$ ว่า **พิกัดของ $\underline{v}$ เมื่อเทียบกับ** S (Coordinates of $\underline{v}$ with respect to S) และ **เมทริกซ์พิกัด** (Coordinate matrix) ของ $\underline{v}$ เทียบกับฐานหลัก S จะเขียนแทนด้วย $(\underline{v})_S$ จะเป็นเมทริกซ์ $n\times 1$ ซึ่งเท่ากับ $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

<u>**ตัวอย่าง 4.14**</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ กำหนดให้ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ เป็นฐานหลัก โดยที่ $(\underline{v})_1=(1,2,1),(\underline{v})_2=(2,9,0),(\underline{v})_3=(3,3,4)$

1) จงหาเวกเตอร์พิกัดและเมทริกซ์พิกัดของ $\underline{v}=(5,-1,9)$ เทียบกับฐานหลัก S

2) จงหาเวกเตอร์ $\underline{v}$ ใน $\mathbb{R}^3$ ที่มีเวกเตอร์พิกัดเท่ากับฐานหลัก S คือ $(\underline{v})_S=(-1,3,2)$

<u>**วิธีทำ**</u> 1) พิจารณา $\underline{v}=c_1\underline{v}_1+c_2\underline{v}_2+c_3\underline{v}_3$ เมื่อ $\underline{c}_1,\underline{c}_2,\underline{c}_3$ เป็นสเกลาร์ จะได้

$$(5,-1,9)=c_1(1,2,1)+c_2(2,9,0)+c_3(3,3,4)$$

หรือ $$c_1+2c_2+3c_3=5$$

$$2c_1+9c_2+3c_3=-1$$

และ $$c_1+4c_3=9$$

แก้ระบบสมการเชิงเส้นหาค่าของ $\underline{c}_1,\underline{c}_2,\underline{c}_3$ โดยจะได้ผลเฉลย $c_1=1,c_2=-1,c_3=2$

ดังนั้น เวกเตอร์พิกัดของ $\underline{v}=(5,-1,9)$ เทียบกับฐานหลัก S คือ $(\underline{v})_S=(1,-1,2)$

และเมทริกซ์พิกัดของ $\underline{v}=(5,-1,9)$ เทียบกับฐานหลัก S คือ $[\underline{v}]_S=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2) เนื่องจากเวกเตอร์พิกัดของ $\underline{v}$ เทียบกับฐานหลัก S คือ $(\underline{v})_S=(-1,3,2)$ จะได้

$$\begin{aligned}\underline{v}&=(-1)\underline{v}_1+3\underline{v}_2+2\underline{v}_3\\&=(-1)(1,2,1)+3(2,9,0)+2(3,3,4)\\&=(11,31,7)\end{aligned}$$

▲

<u>ตัวอย่าง 4.15</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ P_2 กำหนดให้ $S=\{1,x,x^2\}$ เป็นฐานหลัก จงหาเวกเตอร์พิกัดและเมทริกซ์พิกัดของ $\underline{P}=a_0+a_1x+a_2x^2$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $S=\{1,x,x^2\}$ เป็นฐานหลักมาตรฐานหลักของ P_2

และกำหนดให้ $\underline{P}=a_0+a_1x+a_2x^2$ จะได้ เวกเตอร์พิกัดและเมทริกซ์พิกัดของ $\underline{P}$ เทียบกับฐานหลัก S คือ

$\left(\underline{p}\right)_S=\left(a_0,a_1,a_2\right)$ และ $\left[\underline{p}\right]_S=\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}$ ตามลำดับ ▲

<u>ตัวอย่าง 4.16</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ ให้ $S_1=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ และ $S_2=\{(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ จงหาเมทริกซ์พิกัดของ $\underline{v}=(2,3,4)$ เทียบกับ S_1 และ S_2

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า S_1 เป็นฐานหลักมาตรฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$

พิจารณา $(2,3,4)=c_1(1,0,0)+c_2(0,1,0)+c_3(0,0,1)$ เมื่อ $\underline{c}_1,\underline{c}_2,\underline{c}_3$ เป็นสเกลาร์

จะได้ $c_1=2,c_2=3,c_3=4$

นั่นคือ $(2,3,4)=2(1,0,0)+3(0,1,0)+4(0,0,1)$

ดังนั้น $[\underline{v}]_{S_1}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$

จากตัวอย่าง 4.10 จะเห็นว่า S_2 เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$

พิจารณา $(2,3,4)=c_1(0,1,1)+c_2(1,0,0)+c_3(0,1,0)$ เมื่อ $\underline{c}_1,\underline{c}_2,\underline{c}_3$ เป็นสเกลาร์

จะได้ $c_1=4,c_2=2,c_3=-1$

ดังนั้น $[\underline{v}]_{S_2}=\begin{bmatrix}4\\2\\-1\end{bmatrix}$ ▲

จากตัวอย่างที่ 4.16 จะเห็นว่า เวกเตอร์ $\underline{v}$ เดียวกันแต่คนละฐานหลักจะมีพิกัดที่แตกต่างกัน

4.4 การเปลี่ยนฐานหลัก (Change of Basis)

เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจในเรื่องการเปลี่ยนฐานหลัก จะเริ่มต้นจาก ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ โดยมี $B=\{\underline{u}_1,\underline{u}_2\}$ และ $B'=\{\underline{u}'_1,\underline{u}'_2\}$ เป็นฐานหลัก

สมมติว่า $[\underline{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $[\underline{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

จะได้ $\underline{u}'_1 = a\underline{u}_1 + b\underline{u}_2$ และ $\underline{u}'_2 = c\underline{u}_1 + d\underline{u}_2$

กำหนดให้ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V โดย $[\underline{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์พิกัดเทียบกับฐานหลักใหม่

จะได้
$$\begin{aligned}
\underline{v} &= k_1\underline{u}'_1 + k_2\underline{u}'_2 \\
&= k_1\left(a\underline{u}_1 + b\underline{u}_2\right) + k_2\left(c\underline{u}_1 + d\underline{u}_2\right) \\
&= \left(k_1a + k_2c\right)\underline{u}_1 + \left(k_1b + k_2d\right)\underline{u}_2
\end{aligned}$$

ดังนั้น เมทริกซ์พิกัดเทียบกับฐานหลักเก่า B ของ $\underline{v}$ คือ

$$\begin{aligned}
[\underline{v}]_B &= \begin{bmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}[\underline{v}]_{B'} \\
&= \left[[\underline{u}'_1]_B, [\underline{u}'_2]_B\right][\underline{v}]_{B'} \\
&= P[\underline{v}]_{B'}
\end{aligned}$$

โดยที่
$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\
&= \left[[\underline{u}'_1]_B, [\underline{u}'_2]_B\right]
\end{aligned}$$

ซึ่งที่กล่าวมาข้างต้นนี้ เป็นวิธีการหาเมทริกซ์พิกัดสำหรับฐานหลักใหม่ B' เทียบกับฐานหลักเก่า B เมื่อปริภูมิเวกเตอร์ V มีมิติ 2 แล้วจึงพัฒนาแนวคิดไปสู่กรณีทั่วไป สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ V ที่มีมิติ n ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่าเมทริกซ์พิกัดเทียบกับฐานหลักเก่า $B' = \{\underline{u}'_1, \underline{u}'_2, ..., \underline{u}'_n\}$ กับเมทริกซ์ P กล่าวคือ $[\underline{v}]_B = P[\underline{v}]_{B'}$ โดยหลักของเมทริกซ์ P เป็นเมทริกซ์พิกัดของเวกเตอร์ในฐานหลักใหม่เทียบกับฐานหลักเก่า นั่นคือ เวกเตอร์หลักของ P คือ $\left[\underline{u}_1'\right]_B, \left[\underline{u}_2'\right]_B, ..., \left[\underline{u}_n'\right]_B$ หรือ $P = \left[\left[\underline{u}_1'\right]_B, \left[\underline{u}_2'\right]_B, ..., \left[\underline{u}_n'\right]_B\right]$ เรียกเมทริกซ์ P ว่า **เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ** (Transition Matrix) จาก B' ไป B เขียนแทนด้วย ${}_{B'}A_B$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.10 ให้ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในปริภูมิเวกเตอร์ V ถ้า P เป็นเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจากฐานหลัก $B=\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,...,\underline{u}_n\}$ ไป $B'=\{\underline{u'}_1,\underline{u'}_2,...,\underline{u'}_n\}$ แล้ว $[\underline{v}]_B = P[\underline{v}]_{B'}$

พิสูจน์ ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ โดยมี $B=\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,...,\underline{u}_n\}$ และ $B'=\{\underline{u'}_1,\underline{u'}_2,...,\underline{u'}_n\}$ เป็นฐานหลัก

สมมติ $[\underline{u'}_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, [\underline{u'}_2]_B = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, ..., [\underline{u'}_n]_B = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$

จะได้ $\underline{u'}_1 = a_{11}\underline{u}_1 + a_{12}\underline{u}_2 + \cdots + a_{1n}\underline{u}_n$

$\underline{u'}_2 = a_{21}\underline{u}_1 + a_{22}\underline{u}_2 + \cdots + a_{2n}\underline{u}_n$

$\vdots$

และ $\underline{u'}_n = a_{n1}\underline{u}_1 + a_{n2}\underline{u}_2 + \cdots + a_{nn}\underline{u}_n$

กำหนดให้ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V โดย $[\underline{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์พิกัดเทียบกับฐานหลัก B'

จะได้
$$\begin{aligned}
\underline{v} &= k_1\underline{u'}_1 + k_2\underline{u'}_2 + \cdots + k_n\underline{u'}_n \\
&= k_1\left(a_{11}\underline{u}_1 + a_{12}\underline{u}_2 + \cdots + a_{1n}\underline{u}_n\right) + k_2\left(a_{21}\underline{u}_1 + a_{22}\underline{u}_2 + \cdots + a_{2n}\underline{u}_n\right) \\
&\quad + \cdots + k_n\left(a_{n1}\underline{u}_1 + a_{n2}\underline{u}_2 + \cdots + a_{nn}\underline{u}_n\right) \\
&= \left(k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_na_{n1}\right)\underline{u}_1 + \left(k_1a_{12} + k_2a_{22} + \cdots + k_na_{n2}\right)\underline{u}_2 \\
&\quad + \cdots + \left(k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \cdots + k_na_{nn}\right)\underline{u}_n
\end{aligned}$$

ดังนั้น เมทริกซ์พิกัดเทียบกับฐานหลัก B ของ $\underline{v}$ คือ

$$\begin{aligned}
[\underline{v}]_B &= \begin{bmatrix} k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_na_{n1} \\ k_1a_{12} + k_2a_{22} + \cdots + k_na_{n2} \\ \vdots \\ k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \cdots + k_na_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} [\underline{v}]_{B'}
\end{aligned}$$

$$=\left[\left[\underline{u}_1'\right]_B,\left[\underline{u}_2'\right]_B,\ldots,\left[\underline{u}_n'\right]_B\right]\left[\underline{v}\right]_{B'}$$

$$=P\left[\underline{v}\right]_{B'}$$

โดยที่ $$P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\left[\left[\underline{u}_1'\right]_B,\left[\underline{u}_2'\right]_B,\ldots,\left[\underline{u}_n'\right]_B\right]$$ ▲

<u>ตัวอย่าง 4.17</u> กำหนดปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^2$ มี $B=\{\underline{u}_1,\underline{u}_2\}$ และ $B'=\{\underline{u}'_1,\underline{u}'_2\}$ เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$ โดยที่ $\underline{u}_1=(1,0),\underline{u}_2=(0,1),\underline{u}_1'=(1,1),\underline{u}_2'=(2,1)$

จงหา 1) เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B' ไป B

2) $[\underline{v}]_B$ เมื่อ $[\underline{v}]_{B'}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ โดยใช้เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ

<u>วิธีทำ</u> 1) เพราะว่า $(1,1)=1(1,0)+1(0,1)$

หรือ $\underline{u}_1'=\underline{u}_1+\underline{u}_2$

ดังนั้น $\left[\underline{u}_1'\right]_B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

และเพราะว่า $(2,1)=2(1,0)+(0,1)$

หรือ $\underline{u}_2'=2\underline{u}_1+\underline{u}_2$

ดังนั้น $\left[\underline{u}_2'\right]_B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

ฉะนั้น เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B' ไป ${}_{B'}A_B=\left[\left[\underline{u}_1'\right]_B,\left[\underline{u}_2'\right]_B\right]=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$

2) ให้ $[\underline{v}_2]_{B'}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$

จาก $[\underline{v}]_B={}_{B'}A_B[\underline{v}]_{B'}$

จะได้ $[\underline{v}]_B=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$ ▲

จากตัวอย่าง 4.17 ข้อ 2) เราสามารที่จะหา $[\underline{v}]_B$ ได้โดยตรง ดังนี้

$$\begin{aligned}\underline{v} &= -3\underline{u}_1{}' + 5\underline{u}_2{}' \\ &= -3(1,1) + 5(2,1) \\ &= (7,2)\end{aligned}$$

ดังนั้น $[\underline{v}]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

นอกจากนี้ เราสามารถหาเมทริกซ์พิกัดของสมาชิกในฐานหลักเก่า $\underline{u}_1$ และ $\underline{u}_2$ เทียบกับฐานหลักใหม่ได้ ดังนี้

เนื่องจาก $(1,0) = -(1,1) + (2,1)$

หรือ $\underline{u}_1 = -\underline{u}_1{}' + \underline{u}_2{}'$

ดังนั้น $[\underline{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

และเพราะว่า $(0,1) = 2(1,1) - (2,1)$

หรือ $\underline{u}_2 = 2\underline{u}_1{}' - \underline{u}_2{}'$

ดังนั้น $[\underline{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

ฉะนั้น เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B ไป B' คือ ${}_BA_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

โดยเมื่อนำเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B' ไป B มาคูณกับเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B ไป B' จะได้เมทริกซ์เอกลักษณ์

$${}_BA_B\ {}_BA_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

นั่นคือ ${}_BA_{B'} = {}_BA_B^{-1}$

<u>ตัวอย่าง 4.18</u> ให้ $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ และ $B' = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ จงหาเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B ไป B'

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,0,1)$

ดังนั้น $\left[(1,0,0)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

เพราะว่า $(0,1,0)=\frac{1}{2}(1,1,0)+\frac{1}{2}(0,1,1)-\frac{1}{2}(1,0,1)$

ดังนั้น $\left[(0,1,0)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

เพราะว่า $(0,0,1)=-\frac{1}{2}(1,1,0)+\frac{1}{2}(0,1,1)+\frac{1}{2}(1,0,1)$

ดังนั้น $\left[(0,0,1)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

ฉะนั้น เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B ไป B' คือ

$${}_{B}A_{B'}=\left[\left[(1,0,0)\right]_{B'},\left[(0,1,0)\right]_{B'},\left[(0,0,1)\right]_{B'}\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$ ▲

ทฤษฎีบท 4.11 ให้ P เป็นเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจากฐานหลัก B' ไปฐานหลัก B แล้ว

1. P จะมีตัวผกผัน P^{-1}
2. P^{-1} เป็นเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจากฐานหลัก B ไป B'

<u>พิสูจน์</u> ให้ Q เป็นเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B ไป B'

จะแสดงว่า $PQ=I_n$

ให้ $B=\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,...,\underline{u}_n\}$ และ $\underline{x}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในปริภูมิเวกเตอร์ V

สมมติ $PQ=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$

จะได้ $[\underline{x}]_B = P[\underline{x}]_{B'}$

และ $[\underline{x}]_{B'} = Q[\underline{x}]_B$

นั่นคือ $P[\underline{x}]_{B'} = PQ[\underline{x}]_B$

หรือ $[\underline{x}]_B = PQ[\underline{x}]_B$

ให้ $\underline{x}=\underline{u}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

หรือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $\underline{x}$ แทนด้วย $\underline{u}_1,\underline{u}_2,...,\underline{u}_n$ จะได้

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $PQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n$

สรุปได้ว่า $Q = P^{-1}$ ▲

<u>ตัวอย่าง 4.19</u> กำหนดปริภูมิเวกเตอร์ P_2 และกำหนดฐานหลัก B_1 และ B_2 ของ P_2 ดังนี้

$B_1 = \{\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3\}$ โดย $\underline{p}_1 = x^2 + x + 1, \underline{p}_2 = x^2 + 2x + 3, \underline{p}_3 = x^2 + 1$

$B_2 = \{\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{q}_3\}$ โดย $\underline{q}_1 = x + 1, \underline{q}_2 = x^2, \underline{q}_3 = x^2 + 1$

1) จงหาเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B_1 ไป B_2

2) จงหาเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B_2 ไป B_1

<u>วิธีทำ</u> 1) เนื่องจาก $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$

$$\underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_3 \to R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_2 \to R_2 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

ดังนั้น เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B_1 ไป B_2 คือ

$$_{B_1}A_{B_2} = \left[[\underline{p}_1]_{B_2}, [\underline{p}_2]_{B_2}, [\underline{p}_3]_{B_2} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) เนื่องจาก $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ \sim \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$$
\begin{array}{c}
R_1 \to R_1 - R_2 \\
\sim \\
R_3 \to R_3 - 2R_2
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\
0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2
\end{array}\right]
$$

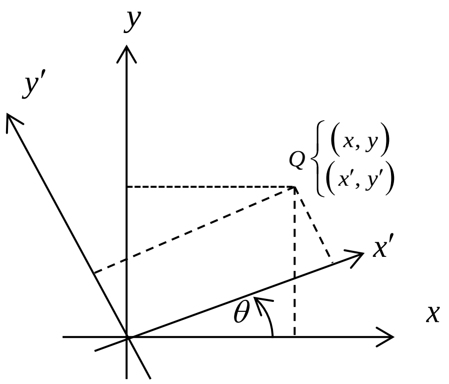
$$
\begin{array}{c}
R_3 \to \dfrac{R_3}{2} \\
\sim
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\
0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1
\end{array}\right]
$$

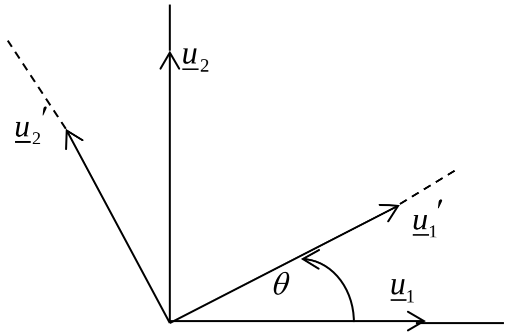
$$
\begin{array}{c}
R_1 \to R_1 - 2R_3 \\
\sim \\
R_2 \to R_2 + R_3
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1
\end{array}\right]
$$

ดังนั้น เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B_2 ไป B_1 คือ

$$
{}_{B_2}A_{B_1} = \left[\left[\underline{q}_1\right]_{B_1}, \left[\underline{q}_2\right]_{B_1}, \left[\underline{q}_3\right]_{B_1}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}
$$ ▲

นอกจากนี้ การเปลี่ยนฐานหลักสามารถนำมาประยุกต์กับการหมุนแกนได้อีกด้วย ซึ่งในหลาย ๆ ปัญหาของระบบพิกัดฉาก xy จะสามารถเปลี่ยนเป็นให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก $x'y'$ ได้โดยการหมุนแกนทวนเข็มนาฬิกาที่จุดกำเนิดด้วยมุม θ เมื่อทำสำเร็จได้จุด Q ใหม่ มีพิกัดเทียบกับระนาบ xy และระนาบ $x'y'$ โดยอาศัยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน (Standard Unit Vector) เข้ามาช่วย ทั้งนี้นิยามของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน คือ เวกเตอร์ซึ่งมีขนาดหนึ่งหน่วย ในระนาบพิกัดฉากนิยามใช้ $\underline{i} = (1,0)$ และ $\underline{j} = (0,1)$ แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน x และ y ทางบวก ตามลำดับ และ ให้ $\underline{u}_1{}'$ และ $\underline{u}_2{}'$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานตามแกน x' และ y' ทางบวก ตามลำดับ เราเทียบการหมุนเท่ากับการเปลี่ยนฐานหลักเก่า $B = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ และฐานหลักใหม่ $B' = \left\{\underline{u}_1{}', \underline{u}_2{}'\right\}$ ดังรูป



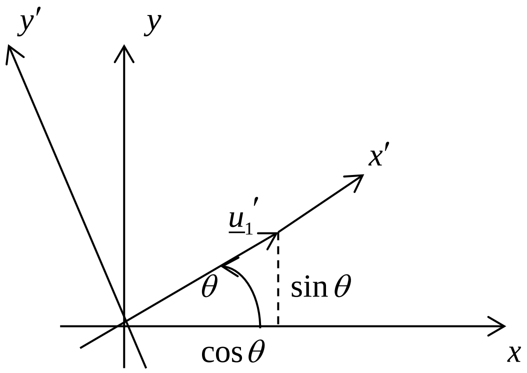


โดยจะได้ความสัมพันธ์ว่า $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

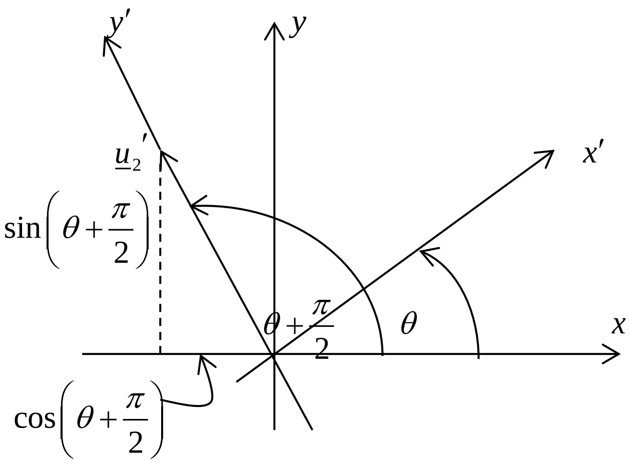
ซึ่ง P เป็นเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B' ไป B สามารถหาได้จากเมทริกซ์พิกัดของฐานหลักใหม่ $\underline{u}_1{}'$ และ $\underline{u}_2{}'$ เทียบกับฐานหลักเก่า มีหลักการดังนี้

กำหนดให้ส่วนประกอบของ $\underline{u}_1{}'$ เทียบกับฐานหลักเก่าเป็น $\cos\theta$ และ $\sin\theta$

กล่าวคือ $\left[\underline{u}_1{}'\right]_B = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ ดังรูป



และ $\left[\underline{u}_2{}'\right]_B = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ ดังรูป



ดังนั้น เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก B' ไป B คือ

$$P = {}_{B'}A_B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

โดยมีตัวผกผันของ P คือ

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

หรือ $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

และ $y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้หมุนแกนไปเป็นมุม $\theta = 45^\circ$

จะได้ว่า $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

และ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ถ้าพิกัดเก่าของจุด Q คือ $(x, y) = (2, -1)$

แล้ว $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ นั่นคือ พิกัดใหม่ของ Q คือ $(x', y') = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. จงพิจารณาว่า เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$

1.1 $\{(1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\}$ 1.2 $\{(3,1,-4),(2,5,6),(1,4,8)\}$

1.3 $\{(2,-1,1),(4,1,1),(0,-7,1)\}$ 1.4 $\{(1,6,4),(2,4,-1),(-1,2,5)\}$

2. จงพิจารณาว่า เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นฐานหลักของ P_2

2.1 $\{1-3x+2x^2, 1+x+4x^2, 1-7x\}$

2.2 $\{4+6x+x^2, -1+4x+2x^2, 5-2x-x^2\}$

2.3 $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$

3. ในปริภูมิเวกเตอร์ $M_{2\times 2}$ ให้ $S=\left\{\begin{bmatrix}3 & 6\\ 3 & -6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -8\\ -12 & -4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\right\}$

จงพิสูจน์ว่า S เป็นฐานหลักของ $M_{2\times 2}$

4. จงหาฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$ โดยที่ฐานหลักนี้มีเวกเตอร์ที่กำหนดเป็นสมาชิก

4.1 $\underline{v}=(1,0,1)$ 4.2 $\underline{v}_1=(2,3,-1), \underline{v}_2=(4,-2,1)$

5. จงหาฐานหลักและมิติของปริภูมิของผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ต่อไปนี้

5.1
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=0\\ -2x_1-x_2+2x_3&=0\\ -x_1+x_3&=0 \end{aligned}$$

5.2
$$\begin{aligned} 3x_1+x_2+x_3+x_4&=0\\ 5x_1-x_2+x_3-x_4&=0 \end{aligned}$$

5.3
$$\begin{aligned} x_1-4x_2+3x_3-x_4&=0\\ 2x_1-8x_2+6x_3-2x_4&=0 \end{aligned}$$

5.4
$$\begin{aligned} x_1-3x_2+x_3&=0\\ 2x_1-6x_2+2x_3&=0\\ 3x_1-9x_2+3x_3&=0 \end{aligned}$$

5.5
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3&=0\\ x_1+5x_3&=0\\ x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

5.6
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0\\ 3x_1+3x_2-2x_3&=0\\ 4x_1+3x_2-x_3&=0\\ 6x_1+5x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

5.7
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3&=0\\ x_1+5x_2+x_3&=0\\ 3x_1+5x_2+8x_3&=0 \end{aligned}$$

5.8
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+7x_3&=0\\ 2x_1+3x_2-2x_3&=0\\ 2x_1-x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

5.9
$$\begin{aligned} x_1+4x_2+2x_3&=0\\ 2x_1+x_2+5x_3&=0 \end{aligned}$$

5.10
$$\begin{aligned} x_1+2x_2-2x_3+2x_4-x_5&=0\\ x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5&=0\\ 2x_1+4x_2-7x_3+x_4+x_5&=0 \end{aligned}$$

5.11
$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+3x_4-4x_5&=0\\ 2x_1+4x_2-2x_3-x_4+5x_5&=0\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-2x_5&=0 \end{aligned}$$

5.12
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-x_3+x_5&=0\\ -x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5&=0\\ x_1+x_2-2x_3-x_5&=0\\ x_3+x_4+x_5&=0 \end{aligned}$$

5.13
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0\\ x_1+x_3&=0\\ 2x_1+x_2+3x_3&=0 \end{aligned}$$

5.14
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3&=0\\ x_1+5x_2+x_3&=0\\ 3x_1+5x_2+8x_3&=0 \end{aligned}$$

5.15
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+7x_3&=0\\ 2x_1+3x_2-2x_3&=0\\ 2x_1-x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

5.16
$$\begin{aligned} x_1+2x_2-2x_3+2x_4-x_5&=0\\ x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5&=0\\ 2x_1+4x_2-7x_3+x_4+x_5&=0 \end{aligned}$$

6. จงหาฐานหลักของเซตของผลเฉลยซึ่งเป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ ที่กำหนด

6.1 ระนาบ $3x-2y+5z=0$

6.2 เส้นตรง $x=2t, y=-1, z=4t$

7. กำหนด V เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^4$ จงหามิติของ V ที่กำหนด

7.1 $V=\{(a,b,c,0)\,|\,a,b,c\in\mathbb{R}\}$

7.2 $V=\{(a,b,c,d)\,|\,d=a+b, c=a-b\}$

7.3 $V=\{(a,b,c,d,e)\,|\,a=c=e\}$

8. จงหาเมทริกซ์พิกัดและเวกเตอร์พิกัดของ $\underline{v}$ เทียบกับฐานหลัก $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\}$

8.1 $\underline{v}_1=(1,0), \underline{v}_2=(0,1), \underline{v}=(3,-7)$

8.2 $\underline{v}_1=(2,-4), \underline{v}_2=(3,8), \underline{v}=(1,1)$

8.3 $\underline{v}_1=(1,1), \underline{v}_2=(0,2), \underline{v}=(a,b)$

9. จงหาเวกเตอร์พิกัดและเมทริกซ์พิกัดของ $\underline{v}$ เทียบกับ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_4\}$ เมื่อ

$$\underline{v}=\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}, \underline{v}_1=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}, \underline{v}_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \underline{v}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \underline{v}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

ผลเฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 4

1. 1.1, 1.2, 1.3

2. 2.2, 2.3

4. 4.1 $\{(1,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ 4.2 $\{(2,3,-1),(4,-2,1),(1,0,0)\}$

5. 5.1 ฐานหลัก = (1,0,1); มิติ =1

   5.2 ฐานหลัก = (1, 0, -1/2, 0), (0, 1, 1/2, 1); มิติ =2

   5.3 ฐานหลัก = (4, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1); มิติ =3

   5.4 ฐานหลัก = (3, 1, 0), (-1, 0, 1); มิติ =2

   5.5 ไม่มีฐานหลัก; มิติ =0

   5.6 ฐานหลัก = (4, -5, 1); มิติ =1

   5.7 ฐานหลัก = (7, -1, -2); มิติ =1

   5.8 ไม่มีฐานหลัก; มิติ =0

   5.9 ฐานหลัก = (18, -1, -7); มิติ =1

   5.10 ฐานหลัก = (2, -1, 0, 0, 0), (4, 0, 1, -1, 0), (3, 0, 1, 0, 1); มิติ =3

   5.11 ฐานหลัก = (2, -1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0); มิติ =2

   5.12 ฐานหลัก = (-1, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, -1, 0, 1) ; มิติ =2

   5.13 ฐานหลัก = (-1, -1, 1); มิติ =1

   5.14 ฐานหลัก = (-7/2, 1/2, 1); มิติ =1

   5.15 ไม่ฐานหลัก; มิติ =0

   5.16 ฐานหลัก = (-2, 1, 0, 0, 0), (-4, 0, -1, 1, 0), (3, 0, 1, 0, 1); มิติ =3

6. 6.1 (1, 0, -3/5), (0, 1, 2/5) หรือ (2/3, 1, 0), (-5/3, 0, 1) หรือ (1, 3/2, 0), (0, 5/2, 1)

7. 7.1 มิติ =3 7.2 มิติ =2 7.3 มิติ =3

8. 8.1 $\left(\underline{v}\right)_s = \left(3,7\right), \left[\underline{v}\right]_s = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ 8.2 $\left(\underline{v}\right)_s = \left(\frac{5}{28}, \frac{3}{14}\right), \left[\underline{v}\right]_s = \begin{bmatrix} \frac{5}{28} \\ \frac{3}{14} \end{bmatrix}$

8.3 $\left(\underline{v}\right)_s = \left(a, \frac{b-a}{2}\right), \left[\underline{v}\right]_s = \begin{bmatrix} a \\ \frac{b-a}{2} \end{bmatrix}$

9. $\left(\underline{v}\right)_s = \left(-1,1,-1,3\right), \left[\underline{v}\right]_s = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$