บทที่ 7

ปริภูมิผลคูณภายใน

ในบทนี้จะศึกษาเกี่ยวกับผลคูณภายในของปริภูมิเวกเตอร์ V บนฟีลด์ของจำนวนจริง เพื่อขยายแนวคิดในเรื่องค่าประจำของเวกเตอร์ใน V ระยะทางและมุมระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ใน V นอกจากนี้ เราจะกล่าวถึงการตั้งฉากของเวกเตอร์ใน V บนฟีลด์ของจำนวนจริงและจะหาฐานหลักเชิงตั้งฉากและฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติโดยใช้ขบวนการกราม-ชมิดท์ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

7.1 ปริภูมิผลคูณภายใน (Inner Product Space)

นิยาม 7.1 ในปริภูมิเวกเตอร์ V บนเซตของจำนวนจริง **ผลคูณภายใน** (Inner Product) **บนปริภูมิเวกเตอร์** V คือ ฟังก์ชันซึ่งส่งแต่ละคู่ของเวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ ใด ๆ ใน V ไปยังจำนวนจริง

เขียนแทนค่าของฟังก์ชันที่ $(\underline{u},\underline{v})$ ด้วย $\langle\underline{u},\underline{v}\rangle$ และมีสมบัติต่อไปนี้

สำหรับเวกเตอร์ $\underline{u},\underline{v}$ และ $\underline{w}$ ใด ๆ ใน V และจำนวนจริง k ใด ๆ

1. $\langle\underline{u},\underline{v}\rangle=\langle\underline{v},\underline{u}\rangle$ สมบัติสมมาตร (Symmetry)
2. $\langle\underline{u}+\underline{v},\underline{w}\rangle=\langle\underline{u},\underline{w}\rangle+\langle\underline{v},\underline{w}\rangle$ สมบัติการบวก (additivity)
3. $\langle k\underline{u},\underline{v}\rangle=k\langle\underline{u},\underline{v}\rangle$ สมบัติเอกพันธุ์ (homogeneity)
4. $\langle\underline{u},\underline{u}\rangle\geq 0$ และ $\langle\underline{u},\underline{u}\rangle=0$ ก็ต่อเมื่อ $\underline{u}=\underline{0}$ สมบัติมากกว่าศูนย์

ปริภูมิเวกเตอร์พร้อมด้วยผลคูณภายใน จะเรียกว่า **ปริภูมิผลคูณภายใน** (Inner Product Space)

จากสมบัติ 4 ข้อข้างต้น จะได้สมบัติผลคูณภายในเพิ่มอีก ดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.1 ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนเซตของจำนวนจริง และ $\langle\underline{u},\underline{v}\rangle$ เป็นผลคูณภายในบนปริภูมิเวกเตอร์ V แล้วสำหรับทุกเวกเตอร์ $\underline{u},\underline{v}$ และ $\underline{w}$ ใด ๆ ใน V และจำนวนจริง k ใด ๆ จะได้

1. $\langle\underline{0},\underline{v}\rangle=0$
2. $\langle\underline{u},\underline{v}+\underline{w}\rangle=\langle\underline{u},\underline{v}\rangle+\langle\underline{u},\underline{w}\rangle$
3. $\langle\underline{u},k\underline{v}\rangle=k\langle\underline{u},\underline{v}\rangle$

พิสูจน์ 1. $$\begin{aligned}\langle\underline{0},\underline{v}\rangle&=\langle 0\underline{u},\underline{v}\rangle\\&=0\langle\underline{u},\underline{v}\rangle\\&=0\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\langle\underline{u},\underline{v}+\underline{w}\rangle&=\langle\underline{v}+\underline{w},\underline{u}\rangle\\&=\langle\underline{v},\underline{u}\rangle+\langle\underline{w},\underline{u}\rangle\\&=\langle\underline{u},\underline{v}\rangle+\langle\underline{u},\underline{w}\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.\ \langle \underline{u}, k\underline{v} \rangle &= \langle k\underline{v}, \underline{u} \rangle \\ &= k\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle \\ &= k\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \end{aligned}$$

ตัวอย่างเช่น ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^n$ ถ้าให้ $\underline{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ และ $\underline{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ นิยาม

ผลคูณภายในแบบยุคลิด (Euclidean Inner Product) โดย

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u} \cdot \underline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

แล้วการนิยามผลคูณภายในเช่นนี้ จะสอดคล้องกับสมบัติ 4 ข้อ

ดังนั้น $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายใน

<u>ตัวอย่าง 7.1</u> ให้ $\underline{u} = (u_1, u_2)$ และ $\underline{v} = (v_1, v_2)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$ นิยามโดย

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

จงแสดงว่า $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ เป็นผลคูณภายในบน $\mathbb{R}^2$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\underline{u} = (u_1, u_2), \underline{v} = (v_1, v_2)$ และ $\underline{w} = (w_1, w_2)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\begin{aligned} 1.\ \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle &= 3u_1v_1 + 2u_2v_2 \\ &= 3v_1u_1 + 2v_2u_2 \\ &= \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.\ \langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{w} \rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\ &= 3u_1w_1 + 3v_1w_1 + 2u_2w_2 + 2v_2w_2 \\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\ &= \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.\ \langle k\underline{u}, \underline{v} \rangle &= 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2 \\ &= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2) \\ &= k\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.\ \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle &= 3v_1v_1 + 2v_2v_2 \\ &= 3v_1^2 + 2v_2^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

และ $3v_1^2 + 2v_2^2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $v_1 = v_2 = 0$

นั่นคือ $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\underline{v} = (0,0)$

จาก 1 – 4 สรุปว่า $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ เป็นผลคูณภายในบน $\mathbb{R}^2$

ข้อสังเกต ผลคูณภายในจากตัวอย่าง 7.1 จะแตกต่างจากผลคูณภายในแบบยุคลิดบน $\mathbb{R}^2$ นั่นคือ ปริภูมิเวกเตอร์จะสามารถมีผลคูณภายในได้มากกว่าหนึ่งผลคูณ

ตัวอย่าง 7.2 ให้ $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ และ $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 และนิยาม

$$\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

จงแสดงว่า $\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle$ เป็นผลคูณภายในบน $M_{2\times2}$

พิสูจน์ ให้ $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$ และ $\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ใน $M_{2\times2}$ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $$\begin{aligned} \left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 + v_4u_4 \\ &= \left\langle \underline{v}, \underline{u} \right\rangle \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \left\langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{w} \right\rangle &= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + (u_3 + v_3)w_3 + (u_4 + v_4)w_4 \\ &= u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + u_3w_3 + v_3w_3 + u_4w_4 + v_4w_4 \\ &= (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4) + (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4) \\ &= \left\langle \underline{u}, \underline{w} \right\rangle + \left\langle \underline{v}, \underline{w} \right\rangle \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \left\langle k\underline{u}, \underline{v} \right\rangle &= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + (ku_3)v_3 + (ku_4)v_4 \\ &= k(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4) \\ &= k\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \left\langle \underline{v}, \underline{v} \right\rangle &= v_1v_1 + v_2v_2 + v_3v_3 + v_4v_4 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

และ $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$

นั่นคือ $\left\langle \underline{v}, \underline{v} \right\rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จาก 1 – 4 สรุปว่า $\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle$ เป็นผลคูณภายในบน $M_{2\times2}$

ตัวอย่าง 7.3 ให้ $\underline{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ และ $\underline{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ P_2 และนิยาม

$$\left\langle \underline{p}, \underline{q} \right\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

จงแสดงว่า $\left\langle \underline{p}, \underline{q} \right\rangle$ เป็นผลคูณภายในบน P_2

พิสูจน์ ให้ $\underline{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2, \underline{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$ และ $\underline{r} = c_0 + c_1x + c_2x^2$ เป็นเวกเตอร์ใน P_2 และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $$\begin{aligned} \left\langle \underline{p}, \underline{q} \right\rangle &= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 \\ &= b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 \\ &= \left\langle \underline{q}, \underline{p} \right\rangle \end{aligned}$$

2. $\left\langle \underline{p}+\underline{q},\underline{r}\right\rangle = (a_0+b_0)c_0+(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2$
$= a_0c_0+b_0c_0+a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2$
$= (a_0c_0+a_1c_1+a_2c_2)+(b_0c_0+b_1c_1+b_2c_2)$
$= \left\langle \underline{p},\underline{r}\right\rangle + \left\langle \underline{q},\underline{r}\right\rangle$

3. $\left\langle k\underline{p},\underline{q}\right\rangle = (ka_0)b_0+(ka_1)b_1+(ka_2)b_2$
$= k(a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2)$
$= k\left\langle \underline{p},\underline{q}\right\rangle$

4. $\left\langle \underline{p},\underline{p}\right\rangle = a_0a_0+a_1a_1+a_2a_2$
$= a_0^{\,2}+a_1^{\,2}+a_2^{\,2}$
≥ 0

และ $a_0^{\,2}+a_1^{\,2}+a_2^{\,2}=0$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=a_2=a_3=0$

นั่นคือ $\left\langle \underline{v},\underline{v}\right\rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\underline{v}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

จาก 1 – 4 สรุปว่า $\left\langle \underline{p},\underline{q}\right\rangle$ เป็นผลคูณภายในบน P_2

ตัวอย่าง 7.4 ให้ $\underline{p}=p(x)$ และ $\underline{q}=q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามในปริภูมิเวกเตอร์ P_n และนิยาม

$$\left\langle \underline{p},\underline{q}\right\rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx$$

โดย a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $a<b$

จงแสดงว่า $\left\langle \underline{p},\underline{q}\right\rangle$ เป็นผลคูณภายในบน P_n

พิสูจน์ ให้ $\underline{p}=p(x),\underline{q}=q(x)$ และ $\underline{r}=r(x)$ เป็นเวกเตอร์ใน P_n และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $\left\langle \underline{p},\underline{q}\right\rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx$
$= \int_a^b q(x)p(x)dx$
$= \left\langle \underline{q},\underline{p}\right\rangle$

2. $\left\langle \underline{p}+\underline{q},\underline{r}\right\rangle = \int_a^b \left(\left\{p(x)+q(x)\right\}r(x)\right)dx$
$= \int_a^b \left(p(x)r(x)+q(x)r(x)\right)dx$
$= \int_a^b p(x)r(x)dx + \int_a^b q(x)r(x)dx$
$= \left\langle \underline{p},\underline{r}\right\rangle + \left\langle \underline{q},\underline{r}\right\rangle$

3. $\left\langle k\underline{p},\underline{q}\right\rangle = \int\limits_a^b kp(x)q(x)dx$
$$= k\int\limits_a^b p(x)q(x)dx$$
$$= k\left\langle \underline{p},\underline{q}\right\rangle$$

4. เนื่องจาก $(p(x))^2 \geq 0$ สำหรับทุกค่า x จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left\langle \underline{p},\underline{p}\right\rangle &= a_0a_0 + a_1a_1 + a_2a_2 \\ &= {a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

และ $\int\limits_a^b (p(x))^2 dx = 0$ ก็ต่อเมื่อ $p(x) = 0$ สำหรับทุกค่า $x \in [a,b]$

นั่นคือ $\left\langle \underline{p},\underline{p}\right\rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\underline{p} = 0$

จาก 1 – 4 สรุปว่า $\left\langle \underline{p},\underline{q}\right\rangle$ เป็นผลคูณภายในบน P_n

ทฤษฎีบท 7.2 (**อสมการโคชี-ชวาร์ซ**(Cauchy-Sehwarz Inequality))

ให้ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิผลคูณภายใน แล้ว $\left\langle \underline{u},\underline{v}\right\rangle^2 \leq \left\langle \underline{u},\underline{u}\right\rangle\left\langle \underline{v},\underline{v}\right\rangle$

พิสูจน์ กรณี $\underline{u} = \underline{0}$ จะได้ $\left\langle \underline{u},\underline{v}\right\rangle = 0$ และ $\left\langle \underline{u},\underline{u}\right\rangle = 0$

ดังนั้น $\left\langle \underline{u},\underline{v}\right\rangle^2 = \left\langle \underline{u},\underline{u}\right\rangle\left\langle \underline{v},\underline{v}\right\rangle = 0$

นั่นคือ $\left\langle \underline{u},\underline{v}\right\rangle^2 \leq \left\langle \underline{u},\underline{u}\right\rangle\left\langle \underline{v},\underline{v}\right\rangle$

กรณี $\underline{u} \neq \underline{0}$ สมมติ $a = \left\langle \underline{u},\underline{u}\right\rangle, b = \left\langle \underline{u},\underline{v}\right\rangle$ และ $c = \left\langle \underline{v},\underline{v}\right\rangle$

ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(t) = at^2 + 2bt + c$ เมื่อ $a > 0$

ดังนั้น $f(t) = \left\langle \underline{u},\underline{u}\right\rangle t^2 + 2\left\langle \underline{u},\underline{v}\right\rangle t + \left\langle \underline{v},\underline{v}\right\rangle$

$$\begin{aligned}&= \left\langle \underline{u}t,\underline{u}t\right\rangle + \left\langle \underline{u}t,\underline{v}\right\rangle + \left\langle \underline{u}t,\underline{v}\right\rangle + \left\langle \underline{v},\underline{v}\right\rangle \\ &= \left\langle \underline{u}t,\underline{u}t+\underline{v}\right\rangle + \left\langle \underline{u}t+\underline{v},\underline{v}\right\rangle \\ &= \left\langle \underline{u}t+\underline{v},\underline{u}t\right\rangle + \left\langle \underline{u}t+\underline{v},\underline{v}\right\rangle \\ &= \left\langle \underline{u}t+\underline{v},\underline{u}t+\underline{v}\right\rangle\end{aligned}$$

จากสมบัติของปริภูมิผลคูณภายในข้อ 4 จะได้ว่า ผลคูณภายในของเวกเตอร์ใด ๆ กับตัวมันเองจะป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ

ฉะนั้น $\left\langle \underline{u}t+\underline{v},\underline{u}t+\underline{v}\right\rangle \geq 0$

นั่นคือ $f(t) = at^2 + 2bt + c \geq 0$

ซึ่ง $f(t) > 0$ ก็ต่อเมื่อ $(2b)^2 - 4ac < 0$ และ $f(t) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $(2b)^2 - 4ac = 0$

ดังนั้น $f(t) \geq 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$(2b)^2 - 4ac \leq 0$$

หรือ $4b^2 - 4ac \le 0$

หรือ $4\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle^2 - 4\left\langle \underline{u}, \underline{u} \right\rangle \left\langle \underline{v}, \underline{v} \right\rangle \le 0$

หรือ $\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle^2 \le \left\langle \underline{u}, \underline{u} \right\rangle \left\langle \underline{v}, \underline{v} \right\rangle$

ตัวอย่างเช่น ให้ $\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ โดยอสมการโคชี-ชวาร์ซจะได้

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n)^2 \le ({u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2)({v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots + {v_n}^2)$$

ซึ่งเรียกว่า **อสมการโคชี** (Cauchy's Inequality)

7.2 ระยะทางและมุมในปริภูมิผลคูณภายใน

นิยาม 7.2 ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายในและ $\underline{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน V **นอร์มหรือค่าประจำ**ของเวกเตอร์ $\underline{u}$ (norm of vector $\underline{u}$) เขียนแทนด้วย $\|\underline{u}\|$ นิยามโดย $\|\underline{u}\| = \left\langle \underline{u}, \underline{u} \right\rangle^{\frac{1}{2}}$ และ**ระยะทาง** (distance) ระหว่างจุดสองจุด (เวกเตอร์) $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ ใน V เขียนแทนด้วย $d(\underline{u}, \underline{v})$ นิยามโดย $d(\underline{u}, \underline{v}) = \|\underline{u} - \underline{v}\|$ จากอสมการของโคชี-ชวาร์ซจะได้ว่า $\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle^2 \le \|\underline{u}\|^2 \|\underline{v}\|^2$ นั่นคือ $\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle \le \|\underline{u}\| \|\underline{v}\|$

ตัวอย่าง 7.5 ให้ $\underline{u} = (0,1,2)$ และ $\underline{v} = (-1,0,2)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ พร้อมผลคูณภายในแบบยุคลิด จงแสดงว่าอสมการโคชี-ชวาร์ซเป็นจริงสำหรับตัวอย่างนี้

พิสูจน์ จากผลคูณภายในแบบยุคลิดใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle = (0)(-1) + (1)(0) + (2)(2) = 4 \\
&\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle^2 = 16 \\
&\|\underline{u}\| = \sqrt{\left\langle \underline{u}, \underline{u} \right\rangle} = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5} \\
&\|\underline{v}\| = \sqrt{\left\langle \underline{v}, \underline{v} \right\rangle} = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5} \\
&\|\underline{u}\| \|\underline{v}\| = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5 \\
&\|\underline{u}\|^2 \|\underline{v}\|^2 = 5 \times 5 = 25
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle^2 \le \|\underline{u}\|^2 \|\underline{v}\|^2$

หรือ $\left\langle \underline{u}, \underline{v} \right\rangle \le \|\underline{u}\| \|\underline{v}\|$

ตัวอย่าง 7.6 ให้ $\underline{u} = (-1,2,3)$ และ $\underline{v} = (0,4,3)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ พร้อมผลคูณภายในแบบยุคลิด จงหาค่าประจำของเวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ และระยะทางระหว่างเวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\underline{u} = (-1,2,3)$ และ $\underline{v} = (0,4,3)$

จะได้ ค่าประจำของเวกเตอร์ $\underline{u}$ คือ $\|\underline{u}\| = \sqrt{\left\langle \underline{u}, \underline{u} \right\rangle} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

ค่าประจำของเวกเตอร์ $\underline{v}$ คือ $\|\underline{v}\| = \sqrt{\left\langle \underline{v}, \underline{v} \right\rangle} = \sqrt{0+16+9} = 5$

และระยะทางระหว่างเวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ คือ $d(\underline{u},\underline{v}) = \left\|\underline{u}-\underline{v}\right\|$

$$\begin{aligned} &= \left\|(-1,2,3)-(0,4,3)\right\| \\ &= \left\|(-1,-2,0)\right\| \\ &= \sqrt{1+4+0} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.7 ให้ $\underline{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ และ $\underline{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ พร้อมผลคูณภายในแบบยุคลิด จงหาค่าประจำของเวกเตอร์ $\underline{u}$ และระยะทางระหว่างเวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\underline{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ และ $\underline{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$

จะได้ ค่าประจำของเวกเตอร์ $\underline{u}$ คือ $\left\|\underline{u}\right\| = \sqrt{\left\langle \underline{u},\underline{u}\right\rangle} = \sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+\cdots+u_n^{\,2}}$

และระยะทางระหว่างเวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ คือ $d(\underline{u},\underline{v}) = \left\|\underline{u}-\underline{v}\right\|$

$$\begin{aligned} &= \left\|(u_1,u_2,\dots,u_n)-(v_1,v_2,\dots,v_n)\right\| \\ &= \left\|(u_1-v_1,u_2-v_2,\dots,u_n-v_n)\right\| \\ &= \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.8 กำหนดปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^2$ จงหาค่าประจำของเวกเตอร์ $\underline{u}$ และหาระยะทางระหว่างเวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เมื่อนิยามผลคูณภายในดังนี้

1) $\left\langle \underline{u},\underline{v}\right\rangle = 3u_1v_1+2u_2v_2$

2) ผลคูณภายในแบบยุคลิด

วิธีทำ ให้ $\underline{u}=(1,0)$ และ $\underline{v}=(0,1)$

1) ค่าประจำของเวกเตอร์ $\underline{u}$ คือ $\left\|\underline{u}\right\| = \sqrt{\left\langle \underline{u},\underline{u}\right\rangle} = \sqrt{3(1)(1)+2(0)(0)} = \sqrt{3}$

และระยะทางระหว่างเวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ คือ $d(\underline{u},\underline{v}) = \left\|\underline{u}-\underline{v}\right\|$

$$\begin{aligned} &= \left\|(1,0)-(0,1)\right\| \\ &= \left\|(1,-1)\right\| \\ &= \sqrt{3(1)(1)+2(-1)(-1)} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

2) ค่าประจำของเวกเตอร์ $\underline{u}$ คือ $\left\|\underline{u}\right\| = \sqrt{\left\langle \underline{u},\underline{u}\right\rangle} = \sqrt{(1)(1)+(0)(0)} = 1$

และระยะทางระหว่างเวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ คือ $d(\underline{u},\underline{v}) = \left\|\underline{u}-\underline{v}\right\|$

$$\begin{aligned} &= \left\|(1,0)-(0,1)\right\| \\ &= \left\|(1,-1)\right\| \\ &= \sqrt{(1)(1)+(-1)(-1)} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

ข้อสังเกต ค่าประจำและระยะทางจะเปลี่ยนตามผลคูณภายในที่กำหนด นั่นคือ ถ้าผลคูณภายในเปลี่ยน แล้วค่าประจำของและระยะทางของเวกเตอร์จะเปลี่ยนด้วย

ทฤษฎีบท 7.3 ถ้า V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน $\underline{u}, \underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน V และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วค่าประจำของ $\underline{u}$ จะมีสมบัติต่อไปนี้

1. $\|\underline{u}\| \geq 0$
2. $\|\underline{u}\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\underline{u} = \underline{0}$
3. $\|k\underline{u}\| = |k|\|\underline{u}\|$
4. $\|\underline{u}+\underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$

พิสูจน์ 1. เนื่องจาก $\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle} \geq 0$ ดังนั้น

2. เนื่องจาก $\|\underline{u}\| = 0 \leftrightarrow \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle} = 0$

$$\leftrightarrow \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = 0$$
$$\leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$$

นั่นคือ $\|\underline{u}\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\underline{u} = \underline{0}$

3. เนื่องจาก $\|k\underline{u}\| = \sqrt{\langle k\underline{u}, k\underline{u} \rangle}$

หรือ $\|k\underline{u}\|^2 = \langle k\underline{u}, k\underline{u} \rangle$

หรือ $\|k\underline{u}\|^2 = k^2 \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle$

ฉะนั้น $\|k\underline{u}\|^2 = |k| \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}$

หรือ $\|k\underline{u}\| = |k|\|\underline{u}\|$

4. เนื่องจาก $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = \langle \underline{u}+\underline{v}, \underline{u}+\underline{v} \rangle$

$$\begin{aligned}
&= \langle \underline{u}, \underline{u}+\underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{u}+\underline{v} \rangle \\
&= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \\
&= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \\
&= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \\
&\leq \|\underline{u}\|^2 + 2\|\underline{u}\|\|\underline{v}\| + \|\underline{v}\|^2 \\
&\leq \left(\|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|\right)^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\|\underline{u}+\underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$

ทฤษฎีบท 7.4 ถ้า V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน และ $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ เป็นเวกเตอร์ใน V แล้วระยะทางระหว่างเวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ จะมีสมบัติต่อไปนี้

1. $d(\underline{u},\underline{v}) \geq 0$
2. $d(\underline{u},\underline{v}) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\underline{u} = \underline{v}$
3. $d(\underline{u},\underline{v}) = d(\underline{v},\underline{u})$
4. $d(\underline{u},\underline{v}) \leq d(\underline{u},\underline{w}) + d(\underline{w},\underline{v})$

พิสูจน์ 1. เนื่องจาก $d(\underline{u},\underline{v}) = \left\|\underline{u}-\underline{v}\right\|$

$$= \sqrt{\left\langle \underline{u}-\underline{v}, \underline{u}-\underline{v} \right\rangle}$$

และเนื่องจาก $\left\langle \underline{u}-\underline{v}, \underline{u}-\underline{v} \right\rangle \geq 0$

ดังนั้น $d(\underline{u},\underline{v}) \geq 0$

2. เนื่องจาก $d(\underline{u},\underline{v}) = 0 \leftrightarrow \sqrt{\left\langle \underline{u}-\underline{v}, \underline{u}-\underline{v} \right\rangle} = 0$

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow \left\langle \underline{u}-\underline{v}, \underline{u}-\underline{v} \right\rangle = 0 \\ &\leftrightarrow \underline{u}-\underline{v} = \underline{0} \\ &\leftrightarrow \underline{u} = \underline{v} \end{aligned}$$

นั่นคือ $d(\underline{u},\underline{v}) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\underline{u} = \underline{v}$

3. เนื่องจาก $d(\underline{u},\underline{v}) = \left\|\underline{u}-\underline{v}\right\|$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left\langle \underline{u}-\underline{v}, \underline{u}-\underline{v} \right\rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle (-1)(\underline{v}-\underline{u}), (-1)(\underline{v}-\underline{u}) \right\rangle} \\ &= \sqrt{(-1)^2 \left\langle \underline{v}-\underline{u}, \underline{v}-\underline{u} \right\rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \underline{v}-\underline{u}, \underline{v}-\underline{u} \right\rangle} \\ &= \left\|\underline{v}-\underline{u}\right\| \\ &= d(\underline{v},\underline{u}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(\underline{u},\underline{v}) = d(\underline{v},\underline{u})$

4. เนื่องจาก $d(\underline{u},\underline{v}) = \left\|\underline{u}-\underline{v}\right\|$

$$\begin{aligned} &= \left\|\underline{u}-\underline{w}+\underline{w}-\underline{v}\right\| \\ &= \left\|(\underline{u}-\underline{w})+(\underline{w}-\underline{v})\right\| \\ &\leq \left\|\underline{u}-\underline{w}\right\| + \left\|\underline{w}-\underline{v}\right\| \\ &\leq d(\underline{u},\underline{w}) + d(\underline{w},\underline{v}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(\underline{u},\underline{v}) \leq d(\underline{u},\underline{w}) + d(\underline{w},\underline{v})$

นิยาม 7.3 ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน และ $\underline{u}, \underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ใน V เรียกมุม θ ที่ทำให้ $\cos\theta = \dfrac{\left\langle \underline{u},\underline{v} \right\rangle}{\left\|\underline{u}\right\|\left\|\underline{v}\right\|}, 0 \leq \theta \leq \pi$ ว่า **มุมระหว่างเวกเตอร์** $\underline{u}$ และ $\underline{v}$

<u>ตัวอย่าง 7.9</u> จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\underline{u}=(-1,2,3)$ และ $\underline{v}=(0,-2,1)$ ในปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งมีผลคูณภายในแบบยุคลิด

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\langle \underline{u},\underline{v}\rangle = (-1)(0)+(2)(-2)+(3)(1) = 0-4+3 = -1$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$
$$\|\underline{v}\| = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$$

และ $\cos\theta = \dfrac{\langle \underline{u},\underline{v}\rangle}{\|\underline{u}\|\|\underline{v}\|}$

จะได้ $\cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{14}\sqrt{5}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{70}}$$

ดังนั้น $\theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{70}}\right)$

<u>ตัวอย่าง 7.10</u> ให้ $\underline{u}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}, \underline{v}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ใน $M_{2\times 2}$ ซึ่งเป็นปริภูมิผลคูณภายในที่นิยามผลคูณภายในโดย

$$\langle \underline{u},\underline{v}\rangle = u_{11}v_{11} + u_{12}v_{12} + u_{21}v_{21} + u_{22}v_{22}$$

จงหามุมระหว่างเมทริกซ์ $\underline{u}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$ และ $\underline{v}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\langle \underline{u},\underline{v}\rangle = (1)(0)+(0)(2)+(1)(0)+(1)(0) = 0$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{1+0+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{0+4+0+0} = 2$$

และ $\cos\theta = \dfrac{\langle \underline{u},\underline{v}\rangle}{\|\underline{u}\|\|\underline{v}\|}$

จะได้ $\cos\theta = \dfrac{0}{\left(\sqrt{3}\right)\left(2\right)}$

$$= 0$$

ดังนั้น $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

ข้อสังเกต ถ้า $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และ $\langle \underline{u},\underline{v}\rangle = 0$ แล้ว $\cos\theta = \dfrac{\langle \underline{u},\underline{v}\rangle}{\|\underline{u}\|\|\underline{v}\|}$ และ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

7.3 เซตของเวกเตอร์เชิงตั้งฉากและเชิงตั้งฉากปรกติ

นิยาม 7.4 ในปริภูมิผลคูณภายใน เวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ จะเรียกว่าเป็น เวกเตอร์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal Vectors) ถ้า $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$ และถ้า $\underline{u}$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกับแต่ละเวกเตอร์ในเซต W แล้ว $\underline{u}$ จะเป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกับ W

ตัวอย่างเช่น 1) ให้ $\mathbb{R}^4$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายในแบบยุคลิด

ถ้า $\underline{u} = (2,-1,0,2)$ และ $\underline{v} = (0,6,2,3)$

แล้ว $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = (2)(0)+(-1)(6)+(0)(2)+(2)(3)$

$= 0-6+0+6$

$= 0$

ดังนั้น $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกัน

2) ให้ P_n เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายในแบบเดียวกับตัวอย่าง 7.4

ถ้า $\underline{p} = 2x^2 - 1$ และ $\underline{q} = 2x$

แล้ว $\langle \underline{p}, \underline{q} \rangle = \int_0^1 \left((2x^2-1)(2x)\right)dx$

$= \int_0^1 (4x^3 - 2x)dx$

$= (x^4 - x^2)\Big|_0^1$

$= (1^4 - 1^2) - (0^4 - 0^2)$

$= 0$

ดังนั้น $\underline{p}$ และ $\underline{q}$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิผลคูณภายในที่กำหนด

ข้อสังเกต การเป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากจะขึ้นอยู่กับผลคูณภายในที่กำหนด เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์อาจเป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากสำหรับผลคูณภายในแบบหนึ่ง แต่อาจไม่เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากสำหรับผลคูณภายในอีกแบบหนึ่ง

ทฤษฎีบท 7.5 ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V จะได้ว่า $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อ $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2$

พิสูจน์ $(\rightarrow)$ ให้ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกัน

จะได้ว่า $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$

เนื่องจาก $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = \langle \underline{u}+\underline{v}, \underline{u}+\underline{v} \rangle$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} + \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{u} + \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + 2(0) + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2$$

ดังนั้น $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2$

$(\leftarrow)$ ให้ $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2$

เนื่องจาก $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{u} + \underline{v} \rangle$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \|\underline{u}\|^2 + 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \|\underline{v}\|^2$$

ดังนั้น $\|\underline{u}\|^2 + 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2$

จะได้ว่า $2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$

หรือ $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$

นั่นคือ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกัน

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบทนี้สามารถกล่าวได้ว่า ให้ $\underline{u}, \underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในปริภูมิผลคูณภายใน จะได้ว่า $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อ $\|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = \|\underline{u} + \underline{v}\|^2$

เพราะว่า $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{u} + \underline{v} \rangle$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + 2(0) + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle - 2(0) + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle - 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle - \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle - \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u}, \underline{u} - \underline{v} \rangle - \langle \underline{v}, \underline{u} - \underline{v} \rangle$$

$$= \langle \underline{u} - \underline{v}, \underline{u} - \underline{v} \rangle$$

$$= \|\underline{u} - \underline{v}\|^2$$

หรือในทฤษฎีบท 7.5 เราอาจเขียนได้อีกแบบหนึ่งดังนี้

ให้ $\underline{u}, \underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในปริภูมิผลคูณภายใน จะได้ว่า $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกัน ก็ต่อมื่อ $\|\underline{u} + \underline{v}\| = \|\underline{u} - \underline{v}\|$

ปัญหาหลายปัญหาที่เกี่ยวกับการเลือกฐานหลักในปริภูมิเวกเตอร์มีจุดประสงค์ที่จะทำให้การหาผลเฉลย ของปัญหาง่ายขึ้น สำหรับปริภูมิผลคูณภายใน การเลือกฐานหลักที่ดีที่สุด คือ ฐานหลักซึ่งทุกเวกเตอร์เป็น เวกเตอร์เชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน

นิยาม 7.5 เซตของเวกเตอร์ในปริภูมิผลคูณภายใน จะเรียกว่า **เซตเชิงตั้งฉาก** (Orthogonal Set) ถ้าทุกคู่ของเวกเตอร์ที่แตกต่างกันในเซตเป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉาก และเซตเชิงตั้งฉากที่แต่ละเวกเตอร์มีค่าประจำเวกเตอร์เท่ากับ 1 เรียกว่า **เซตเชิงตั้งฉากปรกติ** (Orthonormal Set)

ตัวอย่างเช่น ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ ที่มีผลคูณภายในแบบยุคลิด

ถ้าให้ $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

จะได้ว่า $\langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle = 0$

$\langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle = 0$

$\langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle = 0$

ดังนั้น ทุกเวกเตอร์ใน S ตั้งฉากกัน

หรือกล่าวว่า S เป็นเซตเชิงตั้งฉาก

และ $\|(1,0,0)\| = 1$

$\|(0,1,0)\| = 1$

$\|(0,0,1)\| = 1$

ฉะนั้น S เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

ถ้าพิจารณาเวกเตอร์ $\underline{v}$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิผลคูณภายใน แล้วจะสามารถหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (เวกเตอร์ที่มีค่าประจำเป็น 1) ที่มีทิศทางเดียวกับ $\underline{v}$ ได้โดยให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือ $\dfrac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$

จากทฤษฎีบท 7.3 สมบัติของค่าประจำข้อ 3 จะได้ว่า

$$\left\|\frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}\right\| = \frac{1}{\|\underline{v}\|}\|\underline{v}\| = 1$$

โดยเรียกการกระทำที่นำเอาส่วนกลับของความยาวของเวกเตอร์มาคูณเวกเตอร์ ทำให้ได้เวกเตอร์ที่มีค่าประจำเป็น 1 นี้ ว่า **การทำเวกเตอร์ $\underline{v}$ ให้เป็นบรรทัดฐาน** (Normalizing $\underline{v}$)

และถ้าให้ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\underline{v}$ และ $\frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\left\langle \underline{v}, \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} \right\rangle}{\|\underline{v}\| \left\| \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} \right\|} \\
&= \frac{\left\langle \underline{v}, \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} \right\rangle}{\|\underline{v}\|} \\
&= \frac{\frac{1}{\|\underline{v}\|}\left\langle \underline{v}, \underline{v} \right\rangle}{\|\underline{v}\|} \\
&= \frac{\|\underline{v}\|^2}{\|\underline{v}\|^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\theta = 0$

สรุปได้ว่า $\frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\underline{v}$

7.4 ฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติและขบวนการกราม-ชมิดท์

ทฤษฎีบท 7.6 ถ้า $S = \left\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\right\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิผลคูณภายใน แล้ว S จะเป็นเซตอิสระเชิงเส้น

พิสูจน์ ให้ $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \cdots + a_n\underline{v}_n = \underline{0}$ โดยที่ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

ดังนั้น สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, n$ จะได้ว่า

$$\left\langle a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \cdots + a_n\underline{v}_n, \underline{v}_i \right\rangle = \underline{0}$$

หรือ $\left\langle a_1\underline{v}_1, \underline{v}_i \right\rangle + \left\langle a_2\underline{v}_2, \underline{v}_i \right\rangle + \cdots + \left\langle a_n\underline{v}_n, \underline{v}_i \right\rangle = \underline{0}$

หรือ $a_1\left\langle \underline{v}_1, \underline{v}_i \right\rangle + a_2\left\langle \underline{v}_2, \underline{v}_i \right\rangle + \cdots + a_n\left\langle \underline{v}_n, \underline{v}_i \right\rangle = \underline{0}$

เนื่องจาก S เป็นเซตเชิงตั้งฉาก

จะได้ว่า $\left\langle \underline{v}_j, \underline{v}_i \right\rangle = 0$ โดยที่ $j \neq i$

แล้ว $a_1(0) + a_2(0) + \cdots + a_i \left\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \right\rangle + \cdots + a_n(0) = 0$

หรือ $a_i \left\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \right\rangle = 0$

แต่ $\underline{v}_i \neq 0$

ดังนั้น $\left\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \right\rangle \neq 0$

จะได้ว่า $a_i = 0$

นั่นคือ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

สรุปได้ว่า $S = \left\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \right\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่างเช่น ให้ $\underline{v}_1 = (0,1,0), \underline{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \underline{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

จะได้ว่า $\left\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \right\rangle = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1(0) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$

$$\left\langle \underline{v}_2, \underline{v}_3 \right\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + (0)(0) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$\left\langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \right\rangle = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1(0) + 0\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

และ $\left\| \underline{v}_1 \right\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$

$$\left\| \underline{v}_2 \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = 1$$

$$\left\| \underline{v}_3 \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = 1$$

ดังนั้น $S = \left\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \right\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับผลคูณภายในแบบยุคลิดใน $\mathbb{R}^3$

จากทฤษฎีบท 7.6 สรุปได้ว่า S เป็นอิสระเชิงเส้น

นิยาม 7.6 ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน S เป็นฐานหลักของ V จะเรียก S ว่าเป็น **ฐานหลักเชิงตั้งฉาก** (Orthogonal Basis) ถ้า S เป็นเซตเชิงตั้งฉาก และเรียก S ว่าเป็น **ฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ** (Orthonormal Basis) ถ้า S เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

จากตัวอย่างก่อนหน้านี้ จะได้ว่า

$$S = \left\{ \underline{v}_1 = (0,1,0), \underline{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \underline{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$ เป็นอิสระเชิงเส้น

และเนื่องจาก $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

จะได้ว่า S เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$

นอกจากนี้ จะเห็นว่า S เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับผลคูณภายในแบบยุคลิดใน $\mathbb{R}^3$

ดังนั้น S จะเป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\mathbb{R}^3$

ทฤษฎีบท 7.7 ให้ $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ สำหรับปริภูมิผลคูณภายใน V และ $\underline{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V แล้ว

$$\underline{u} = \langle \underline{u}, \underline{v}_1 \rangle \underline{v}_1 + \langle \underline{u}, \underline{v}_2 \rangle \underline{v}_2 + \cdots + \langle \underline{u}, \underline{v}_n \rangle \underline{v}_n$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นฐานหลักของ V

ดังนั้น $\underline{u} \in V$ สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของสมาชิกใน S ได้

นั่นคือ $\underline{u} = \underline{k}_1 \underline{v}_1 + \underline{k}_2 \underline{v}_2 + \cdots + \underline{k}_n \underline{v}_n$

จะพิสูจน์ว่า $k_i = \langle \underline{u}, \underline{v}_i \rangle$ สำหรับ $i = 1, 2, ..., n$

สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\underline{v}_i \in S$ จะได้

$$\begin{aligned} \langle \underline{u}, \underline{v}_i \rangle &= \langle \underline{k}_1 \underline{v}_1 + \underline{k}_2 \underline{v}_2 + \cdots + \underline{k}_n \underline{v}_n, \underline{v}_i \rangle \\ &= \underline{k}_1 \langle \underline{v}_1, \underline{v}_i \rangle + \underline{k}_2 \langle \underline{v}_2, \underline{v}_i \rangle + \cdots + \underline{k}_n \langle \underline{v}_n, \underline{v}_i \rangle \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

จะได้ว่า $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0$ และ $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \rangle = \|\underline{v}_i\|^2 = 1$ โดยที่ $j \neq i$

นั่นคือ $\langle \underline{u}, \underline{v}_i \rangle = \underline{k}_i$

__ตัวอย่าง 7.11__ ให้ $\underline{v}_1 = (0,1,0), \underline{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \underline{v}_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$

จงแสดงว่า $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\mathbb{R}^3$ พร้อมผลคูณภายในแบบยุคลิด และถ้าให้ $\underline{u} = (1,1,1)$ จงเขียน $\underline{u} = (1,1,1)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S

__วิธีทำ__ จะแสดงว่า S เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$

1) ถ้า $a_1(0,1,0) + a_2\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + a_3\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) = (0,0,0)$

$$\left(-\frac{4}{5}a_2 + \frac{3}{5}a_3, a_1, \frac{3}{5}a_2 + \frac{4}{5}a_3\right) = (0,0,0)$$

แล้วจะได้ $-\frac{4}{5}a_2 + \frac{3}{5}a_3 = 0$

$$a_1 = 0$$

และ $\frac{3}{5}a_2 + \frac{4}{5}a_3 = 0$

กล่าวคือ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

ดังนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น

2) $\forall \underline{u} \in \mathbb{R}^3, \underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$

ถ้า $(u_1, u_2, u_3) = a_1(0,1,0) + a_2\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + a_3\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$

$$= \left(-\frac{4}{5}a_2 + \frac{3}{5}a_3, a_1, \frac{3}{5}a_2 + \frac{4}{5}a_3\right)$$

แล้วจะได้ $-\frac{4}{5}a_2 + \frac{3}{5}a_3 = u_1$

$a_1 = u_2$

และ $\frac{3}{5}a_2 + \frac{4}{5}a_3 = u_3$

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1, a_2, a_3 โดยจะได้ผลเฉลย

$a_1 = u_2$

$a_2 = -\frac{4}{5}u_1 + \frac{3}{5}u_3$

และ $a_3 = \frac{3}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_3$

นั่นคือ $(u_1, u_2, u_3) = u_2(0,1,0) + \left(-\frac{4}{5}u_1 + \frac{3}{5}u_3\right)\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_3\right)\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$

ดังนั้น S แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$

จาก 1) และ 2) สรุปว่า $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$

ต่อไปจะแสดงว่า S เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ

เนื่องจาก $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = 0\left(-\frac{4}{5}\right) + 1(0) + 0\left(\frac{3}{5}\right) = 0$

$$\langle \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + (0)(0) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle = 0\left(\frac{3}{5}\right) + 1(0) + 0\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

และ $\|\underline{v}_1\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$

$$\|\underline{v}_2\| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1$$

$$\|\underline{v}_3\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$$

ดังนั้น S เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ

นอกจากนี้ $\langle \underline{u}, \underline{v}_1 \rangle = 1(0) + 1(1) + 1(0) = 1$

$$\langle \underline{u}, \underline{v}_2 \rangle = 1\left(-\frac{4}{5}\right) + 1(0) + 1\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$

$$\langle \underline{u}, \underline{v}_3 \rangle = 1\left(\frac{3}{5}\right) + 1(0) + 1\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{7}{5}$$

โดยทฤษฎีบท 7.7 จะได้ว่า $\underline{u} = \underline{v}_1 - \frac{1}{5}\underline{v}_2 + \frac{7}{5}\underline{v}_3$

นั่นคือ $(1,1,1) = (0,1,0) - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$

ฉะนั้น $\underline{u} = (1,1,1)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S

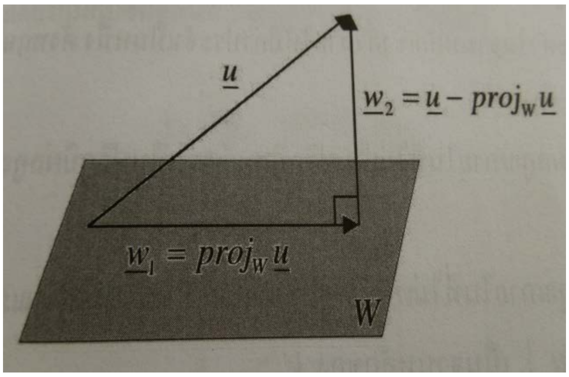
นิยาม 7.7 ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน และ $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติใน V ถ้า W เป็นปริภูมิที่แผ่ทั่วโดย $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r$ แล้วทุกเวกเตอร์ $\underline{u} \in V$ จะเขียนได้ในรูป

$$\underline{u} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$$

เมื่อ $\underline{w}_1 \in W$ และ $\underline{w}_2$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกับ W โดยให้

$$\underline{w}_1 = \langle \underline{u}, \underline{v}_1 \rangle \underline{v}_1 + \langle \underline{u}, \underline{v}_2 \rangle \underline{v}_2 + \cdots + \langle \underline{u}, \underline{v}_r \rangle \underline{v}_r$$
$$\underline{w}_2 = \underline{u} - \langle \underline{u}, \underline{v}_1 \rangle \underline{v}_1 - \langle \underline{u}, \underline{v}_2 \rangle \underline{v}_2 - \cdots - \langle \underline{u}, \underline{v}_r \rangle \underline{v}_r$$

เรียก $\underline{w}_1$ เป็น **ภาพฉายเชิงตั้งฉาก** (Orthogonal Projection) ของ $\underline{u}$ บน W และเขียนแทนด้วย $proj_W \underline{u}$ และเวกเตอร์ $\underline{w}_2 = \underline{u} - proj_W \underline{u}$ จะเรียกว่า **ส่วนประกอบของ** $\underline{u}$ (component of $\underline{u}$) ที่ตั้งฉากกับ W และเขียนแทนด้วย $comp_W \underline{u}$ ฉะนั้น $\underline{u} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = proj_W \underline{u} + comp_W \underline{u}$ ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นจริงใน $\mathbb{R}^3$ ดังรูป



ตัวอย่าง 7.12 ให้ $\mathbb{R}^3$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในยุคลิด และ W เป็นปริภูมิย่อยที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์เชิงตั้งฉากปรกติ (Orthonormal Vectors) $\underline{v}_1 = (0,1,0), \underline{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$ จงหาภาพฉายเชิงตั้งฉากของ $\underline{u} = (1,1,1)$ บน W และส่วนประกอบของ $\underline{u}$ ที่ตั้งฉากกับ W

วิธีทำ ให้ $\underline{u} = (1,1,1)$ จะได้ว่า

ภาพฉายเชิงตั้งฉากของ $\underline{u}$ บน W คือ

$$\begin{aligned} proj_W\underline{u} &= \left\langle \underline{u}, \underline{v}_1 \right\rangle \underline{v}_1 + \left\langle \underline{u}, \underline{v}_2 \right\rangle \underline{v}_2 \\ &= \left\langle (1,1,1),(0,1,0) \right\rangle (0,1,0) + \left\langle (1,1,1), \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \right\rangle \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \\ &= 1(0,1,0) + \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \\ &= \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) \end{aligned}$$

และส่วนประกอบของ $\underline{u}$ ที่ตั้งฉากกับ W คือ

$$\begin{aligned} \underline{u} - proj_W\underline{u} &= (1,1,1) - \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) \\ &= \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\right) \end{aligned}$$

ข้อสังเกต $\underline{u} - proj_W\underline{u}$ จะตั้งฉากกับทั้ง $\underline{v}_1$ และ $\underline{v}_2$ นั่นคือ เวกเตอร์นี้จะตั้งฉากกับแต่ละเวกเตอร์ในปริภูมิ W ที่แผ่ทั่วโดย $\underline{v}_1$ และ $\underline{v}_2$

ถัดไป จะแสดงว่าสำหรับทุก ๆ ปริภูมิผลคูณภายใน สามารถสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติได้โดยใช้ **ขบวนการกราม-ชมิดท์** (Gram-Schmidt Process) ซึ่งเริ่มจากฐานหลักใดฐานหลักหนึ่งของปริภูมิผลคูณภายในที่ไม่จำเป็นต้องเป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากก็ได้ แล้วเปลี่ยนฐานหลักที่กำหนดให้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉาก สุดท้าย เปลี่ยนสมาชิกแต่ละตัวในฐานหลักเชิงตั้งฉากให้มีค่าประจำเป็นหนึ่ง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.8 ทุก ๆ ปริภูมิผลคูณภายในที่ไม่เป็นปริภูมิศูนย์และเป็นปริภูมิผลคูณภายในที่มีมิติจำกัด จะมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ

พิสูจน์ ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายในที่ไม่เป็นปริภูมิศูนย์และเป็นปริภูมิผลคูณภายในที่มีมิติจำกัดเป็น n

ให้ $S = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, ..., \underline{u}_n\}$ เป็นฐานหลักของ V

ขั้นตอนต่อไปนี้ จะเป็นวิธีหาฐานหลักเชิงตั้งฉาก $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ ของ V

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ให้ $\underline{v}_1 = \underline{u}_1$

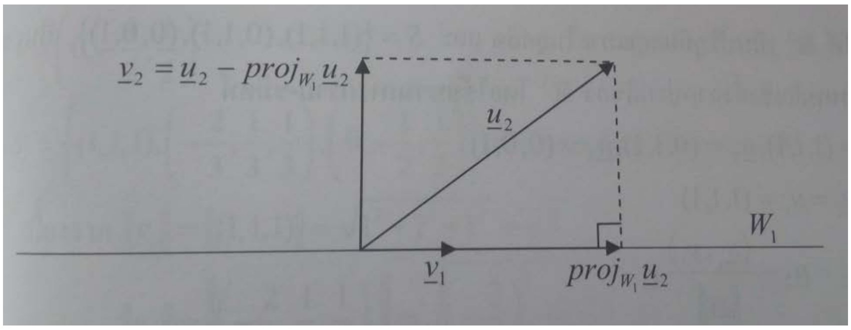
<u>ขั้นตอนที่ 2</u> ให้ W_1 เป็นปริภูมิที่แผ่ทั่วโดย $\underline{v}_1$

สร้างเวกเตอร์ $\underline{v}_2$ ซึ่งตั้งฉากกับ $\underline{v}_1$ โดยหาส่วนประกอบของ $\underline{u}_2$ ที่ตั้งฉากกับ W_1

ให้ $\underline{v}_2 = \underline{u}_2 - proj_{W_1}\underline{u}_2 = \underline{u}_2 - \dfrac{\langle \underline{u}_2, \underline{v}_1 \rangle}{\|\underline{v}_1\|^2}\underline{v}_1$

จะได้ว่า $\underline{v}_2 \neq 0$ เพราะว่าถ้า $\underline{v}_2 = 0$ แล้ว $\underline{u}_2 - \dfrac{\langle \underline{u}_2, \underline{v}_1 \rangle}{\|\underline{v}_1\|^2}\underline{v}_1 = \dfrac{\langle \underline{u}_2, \underline{v}_1 \rangle}{\|\underline{u}_1\|^2}\underline{u}_1$

นั่นคือ $\underline{u}_2$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{u}_1$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ S เป็นอิสระเชิงเส้น ดังรูป

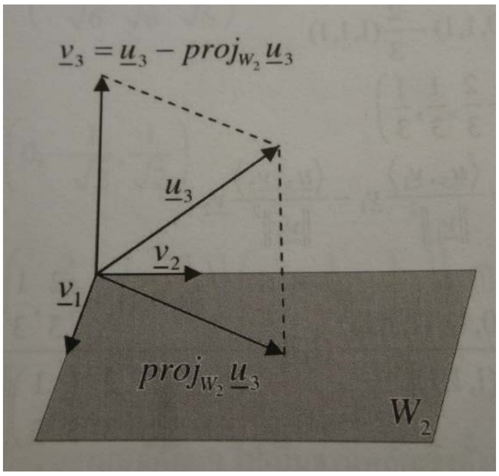


<u>ขั้นตอนที่ 3</u> ให้ W_2 เป็นปริภูมิที่แผ่ทั่วโดย $\underline{v}_1$ และ $\underline{v}_2$

สร้างเวกเตอร์ $\underline{v}_3$ ซึ่งตั้งฉากกับ $\underline{v}_1$ และ $\underline{v}_2$ โดยหาส่วนประกอบของ $\underline{u}_3$ ที่ตั้งฉากกับ W_2

ให้ $\underline{v}_3 = \underline{u}_3 - proj_{W_2}\underline{u}_3 = \underline{u}_3 - \dfrac{\langle \underline{u}_3, \underline{v}_1 \rangle}{\|\underline{v}_1\|^2}\underline{v}_1 - \dfrac{\langle \underline{u}_3, \underline{v}_2 \rangle}{\|\underline{v}_2\|^2}\underline{v}_2$

ในทำนองเดียวกันกับขั้นตอนที่ 2 จะได้ว่า $\underline{v}_3 \neq 0$ ดังรูป



ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงขั้นตอนที่ n จะได้เซตของเวกเตอร์เชิงตั้งฉาก $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$

เนื่องจาก V มีมิติเป็น n และทุกเซตของเวกเตอร์เชิงตั้งฉากเป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้น $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ V และจะได้ $\left\{\frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|}, \frac{\underline{v}_2}{\|\underline{v}_2\|}, \ldots, \frac{\underline{v}_n}{\|\underline{v}_n\|}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ V

<u>**ตัวอย่าง 7.13**</u> ให้ $\mathbb{R}^3$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในยุคลิด และ $S = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$ จงหาฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\mathbb{R}^3$ โดยใช้ขบวนการกราม-ชมิดท์

<u>**วิธีทำ**</u> ให้ $\underline{u}_1 = (1,1,1), \underline{u}_2 = (0,1,1), \underline{u}_3 = (0,0,1)$

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ให้ $\underline{v}_1 = \underline{u}_1 = (1,1,1)$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> ให้ $\underline{v}_2 = \underline{u}_2 - \frac{\langle \underline{u}_2, \underline{v}_1 \rangle}{\|\underline{v}_1\|^2}\underline{v}_1$

$$
\begin{aligned}
&= (0,1,1) - \frac{\langle (0,1,1), (1,1,1) \rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) \\
&= (0,1,1) - \frac{(0)(1) + (1)(1) + (1)(1)}{\left(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\right)^2}(1,1,1) \\
&= (0,1,1) - \frac{2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}(1,1,1) \\
&= (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) \\
&= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

ขั้นตอนที่ 3 ให้ $\underline{v}_3 = \underline{u}_3 - \dfrac{\left\langle \underline{u}_3, \underline{v}_1 \right\rangle}{\left\| \underline{v}_1 \right\|^2} \underline{v}_1 - \dfrac{\left\langle \underline{u}_3, \underline{v}_2 \right\rangle}{\left\| \underline{v}_2 \right\|^2} \underline{v}_2$

$$= (0,0,1) - \frac{\left\langle (0,0,1),(1,1,1) \right\rangle}{\left\| (1,1,1) \right\|^2}(1,1,1) - \frac{\left\langle (0,0,1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\rangle}{\left\| \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\|^2} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$= (0,0,1) - \frac{(0)(1)+(0)(1)+(1)(1)}{\left(\sqrt{1^2+1^2+1^2} \right)^2}(1,1,1) - \frac{(0)\left(-\frac{2}{3} \right) + (0)\left(\frac{1}{3} \right) + (1)\left(\frac{1}{3} \right)}{\left(\sqrt{\left(-\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} \right)^2} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$= (0,1,1) - \frac{1}{\left(\sqrt{3} \right)^2}(1,1,1) - \frac{\frac{1}{3}}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$= (0,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

ดังนั้น $S_1 = \left\{ (1,1,1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$

เนื่องจาก $\left\| \underline{v}_1 \right\| = \left\| (1,1,1) \right\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$$\left\| \underline{v}_2 \right\| = \left\| \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\left\| \underline{v}_3 \right\| = \left\| \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\| = \sqrt{(0)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

จะได้ว่า $\dfrac{\underline{v}_1}{\left\| \underline{v}_1 \right\|} = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}} \right)$

$$\frac{\underline{v}_2}{\left\| \underline{v}_2 \right\|} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\frac{\underline{v}_3}{\left\| \underline{v}_3 \right\|} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

นั่นคือ $S_2 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$

จากทฤษฎีบท 7.8 ในการเปลี่ยนฐานหลักใด ๆ ให้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติอาจทำได้ง่ายขึ้น ถ้าเราทำให้แต่ละเวกเตอร์ในฐานหลักมีค่าประจำเป็น 1 ก่อนที่จะหา $\underline{v}$ ตัวต่อไป นั่นคือ

$$\underline{w}_1 = \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|} = \frac{\underline{u}_1}{\|\underline{u}_1\|}$$

$\underline{w}_2 = \dfrac{\underline{v}_2}{\|\underline{v}_2\|}$ โดยที่ $\underline{v}_2 = \underline{u}_2 - \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1$

$\underline{w}_3 = \dfrac{\underline{v}_3}{\|\underline{v}_3\|}$ โดยที่ $\underline{v}_3 = \underline{u}_3 - \langle \underline{u}_3, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1 - \langle \underline{u}_3, \underline{w}_2 \rangle \underline{w}_2$

$\vdots$

$\underline{w}_n = \dfrac{\underline{v}_n}{\|\underline{v}_n\|}$ โดยที่ $\underline{v}_n = \underline{u}_n - \langle \underline{u}_n, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1 - \langle \underline{u}_n, \underline{w}_2 \rangle \underline{w}_2 - \cdots - \langle \underline{u}_n, \underline{w}_{n-1} \rangle \underline{w}_{n-1}$

จะได้ว่า $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, ..., \underline{w}_n\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติโดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

เนื่องจาก $\langle \underline{w}_2, \underline{w}_1 \rangle = \left\langle \dfrac{\underline{u}_2 - \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1}{\|\underline{u}_2 - \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1\|}, \underline{w}_1 \right\rangle$

$$= \frac{1}{\|\underline{u}_2 - \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1\|} \langle \underline{u}_2 - \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle$$

$$= \frac{1}{\|\underline{u}_2 - \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1\|} \langle \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle - \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle \langle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle \rangle =$$

$$= \frac{1}{\|\underline{u}_2 - \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1\|} \left\langle \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle - \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle \|\underline{w}_1\|^2 \right\rangle$$

ดังนั้น $\underline{w}_1$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกับ $\underline{w}_2$

สมมติว่า $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, ..., \underline{w}_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

แล้วจะแสดงว่า $\underline{w}_{k+1}$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกับ $\underline{w}_1, \underline{w}_2, ..., \underline{w}_k$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\langle \underline{w}_{k+1}, \underline{w}_i \rangle &= \left\langle \frac{\underline{u}_{k+1} - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1 - \cdots - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_{k-1} \rangle \underline{w}_{k-1} - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_k \rangle \underline{w}_k}{\|\underline{u}_{k+1} - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1 - \cdots - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_{k-1} \rangle \underline{w}_{k-1} - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_k \rangle \underline{w}_k\|}, \underline{w}_i \right\rangle \\
&= \frac{\langle \underline{u}_{k+1} - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1 - \cdots - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_{k-1} \rangle \underline{w}_{k-1} - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_k \rangle \underline{w}_k, \underline{w}_i \rangle}{\|\underline{u}_{k+1} - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1 - \cdots - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_{k-1} \rangle \underline{w}_{k-1} - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_k \rangle \underline{w}_k\|} \\
&= \frac{\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_i \rangle - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_1 \rangle \langle \underline{w}_1, \underline{w}_i \rangle - \cdots - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_k \rangle \langle \underline{w}_k, \underline{w}_i \rangle - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_{k-1} \rangle \langle \underline{w}_{k-1}, \underline{w}_i \rangle}{\|\underline{u}_{k+1} - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1 - \cdots - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_{k-1} \rangle \underline{w}_{k-1} - \langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_k \rangle \underline{w}_k\|}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\left\langle \underline{w}_j, \underline{w}_i \right\rangle = 0$ สำหรับทุก $j \neq i$ และ $j \neq k+1$

ดังนั้น $\left\langle \underline{w}_{k+1}, \underline{w}_i \right\rangle = \dfrac{\left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_i \right\rangle - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_i \right\rangle \left\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \right\rangle}{\left\| \underline{u}_{k+1} - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_1 \right\rangle \underline{w}_1 - \cdots - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_{k-1} \right\rangle \underline{w}_{k-1} - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_k \right\rangle \underline{w}_k \right\|}$

$$= \frac{\left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_i \right\rangle - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_i \right\rangle \left\| \underline{w}_i \right\|^2}{\left\| \underline{u}_{k+1} - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_1 \right\rangle \underline{w}_1 - \cdots - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_{k-1} \right\rangle \underline{w}_{k-1} - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_k \right\rangle \underline{w}_k \right\|}$$

$$= \frac{\left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_i \right\rangle - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_i \right\rangle (1)}{\left\| \underline{u}_{k+1} - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_1 \right\rangle \underline{w}_1 - \cdots - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_{k-1} \right\rangle \underline{w}_{k-1} - \left\langle \underline{u}_{k+1}, \underline{w}_k \right\rangle \underline{w}_k \right\|}$$

$= 0$ โดยที่ $i = 1, 2, 3, \ldots, k$

นั่นคือ $\underline{w}_{k+1}$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกับ $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k$

หรือกล่าวได้ว่า $\left\{ \underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k, \underline{w}_{k+1} \right\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

สรุปได้ว่า $\left\{ \underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n \right\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติของ V

โดยทฤษฎีบท 7.6 จะได้ว่า $\left\{ \underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n \right\}$ เป็นเซตที่เป็นอิสระเชิงเส้น และเนื่องจาก V มีมิติเท่ากับ n

ฉะนั้น $\left\{ \underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ V

จากตัวอย่างที่ 7.13 ถ้าทำให้แต่ละเวกเตอร์ในฐานหลักมีค่าประจำเป็น 1 ก่อนที่จะหา $\underline{v}$ ตัวต่อไป จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \underline{w}_1 &= \frac{\underline{u}_1}{\left\| \underline{u}_1 \right\|} \\ &= \frac{(1,1,1)}{\left\| (1,1,1) \right\|} \\ &= \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

$$\underline{w}_2 = \frac{\underline{u}_2 - \left\langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \right\rangle \underline{w}_1}{\left\| \underline{u}_2 - \left\langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \right\rangle \underline{w}_1 \right\|}$$

$$= \frac{(0,1,1) - \left\langle (0,1,1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{\left\| (0,1,1) - \left\langle (0,1,1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\|}$$

$$= \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)}{\left\| \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\|}$$

$$= \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)}{\sqrt{\left(-\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2}}$$

$$= \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\underline{w}_3 = \frac{\underline{u}_3 - \left\langle \underline{u}_3, \underline{w}_1 \right\rangle \underline{w}_1 - \left\langle \underline{u}_3, \underline{w}_2 \right\rangle \underline{w}_2}{\left\| \underline{u}_3 - \left\langle \underline{u}_3, \underline{w}_1 \right\rangle \underline{w}_1 - \left\langle \underline{u}_3, \underline{w}_2 \right\rangle \underline{w}_2 \right\|}$$

$$= \frac{(0,0,1) - \left\langle (0,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left\langle (0,0,1), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\rangle \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)}{\left\| (0,0,1) - \left\langle (0,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left\langle (0,0,1), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\rangle \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\|}$$

$$= \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)}{\left\| \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\|}$$

$$= \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{(0)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2}}$$

$$= \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

ดังนั้น ฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\mathbb{R}^3$ คือ $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

ตัวอย่าง 7.14 ใน P_2 ภายใต้ผลคูณภายในนิยามโดย $\left\langle \underline{p}, \underline{q} \right\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ เมื่อ $\underline{p} = p(x)$ และ $\underline{q} = q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามใน P_2 มี $S = \left\{ 1, x, x^2 \right\}$ เป็นฐานหลัก จงใช้ขบวนการกราม-ชมิดท์ สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ P_2

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\underline{u}_1 = 1, \underline{u}_2 = x, \underline{u}_3 = x^2$

เพราะว่า $\langle 1,1 \rangle = \int_{-1}^{1} dx$

$$= [x]_{-1}^{1}$$
$$= 1-(-1)$$
$$= 2$$

และ $\|1\| = \langle 1,1 \rangle^{\frac{1}{2}}$

$$= \sqrt{2}$$

จะได้ว่า $\underline{w}_1 = \dfrac{\underline{u}_1}{\|\underline{u}_1\|}$

$$= \frac{1}{\|1\|}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

เพราะว่า $x - \left\langle x, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \dfrac{1}{\sqrt{2}} = x - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_{-1}^{1} x dx \right) \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$= x - \left(\frac{[x^2]_{-1}^{1}}{2\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= x - (0)\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= x$$

$$\langle x,x \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx$$
$$= \frac{[x^3]_{-1}^{1}}{3}$$
$$= \frac{1-(-1)}{3}$$
$$= \frac{2}{3}$$

และ $\left\| x - \left\langle x, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right\| = \|x\|$

$$= \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}}$$

จะได้ว่า $\underline{w}_2 = \dfrac{\underline{u}_2 - \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1}{\|\underline{u}_2 - \langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1\|}$

$$= \frac{x - \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}}{\left\| x - \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \right\|}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

เพราะว่า $x^2 - \left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle x^2, \sqrt{\frac{3}{2}} x \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}} x = x^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^2 dx \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x^3 dx \right) \sqrt{\frac{3}{2}} x$

$$= x^2 - \left(\frac{\left[x^3 \right]_{-1}^{1}}{3\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{\left[x^4 \right]_{-1}^{1}}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} - 0$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\left\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3} \right\rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{9} x^3 + \frac{1}{9} x \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}$$

$$= \frac{8}{45}$$

และ $\left\| x^2 - \left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle x^2, \sqrt{\frac{3}{2}} x \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}} x \right\| = \left\| x^2 - \frac{1}{3} \right\|$

$$= \left\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3} \right\rangle^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{45}}$$

จะได้ว่า $\underline{w}_3 = \frac{\underline{u}_3 - \left\langle \underline{u}_3, \underline{w}_1 \right\rangle \underline{w}_1 - \left\langle \underline{u}_3, \underline{w}_2 \right\rangle \underline{w}_2}{\left\| \underline{u}_3 - \left\langle \underline{u}_3, \underline{w}_1 \right\rangle \underline{w}_1 - \left\langle \underline{u}_3, \underline{w}_2 \right\rangle \underline{w}_2 \right\|}$

$$= \frac{x^2 - \left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}x}{\left\| x^2 - \left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\|}$$

$$= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1)$$

นั่นคือ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1) \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ P_2

<u>ตัวอย่าง 7.15</u> จงหาฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของปริภูมิของผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

<u>วิธีทำ</u> $\because [A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

$$\underset{\sim}{R_2 \to -R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $\operatorname{rank} A = 2$

และจำนวนตัวแปร = 4

นั่นคือ $\operatorname{rank} A <$ จำนวนตัวแปรในระบบ

ดังนั้น ระบบสมการมีผลเฉลยมากมาย

จากเมทริกซ์สุดท้าย จะได้

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 7x_4 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}$$

ถ้าให้ $x_3 = s$ โดยที่ s เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ หรือ $s \in \mathbb{R}$

และ $x_4 = t$ โดยที่ t เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ หรือ $t \in \mathbb{R}$

จะได้ $x_2 = 2x_3 - 8x_4 = 2s - 8t$

และ $x_1 = -x_2 - 7x_4 = -(2s - 8t) - 7t = -2s + t$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s + t \\ 2s - 8t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s \\ 2s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -8t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$

ต่อไปจะหาฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ

ให้ $\underline{u}_1 = (-2,2,1,0), \underline{u}_2 = (1,-8,0,1)$

จะได้ว่า $\underline{w}_1 = \dfrac{\underline{u}_1}{\left\|\underline{u}_1\right\|}$

$$= \frac{(-2,2,1,0)}{\left\|(-2,2,1,0)\right\|}$$

$$= \frac{(-2,2,1,0)}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2}}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$\underline{w}_2 = \frac{\underline{u}_2 - \left\langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \right\rangle \underline{w}_1}{\left\|\underline{u}_2 - \left\langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \right\rangle \underline{w}_1\right\|}$$

$$= \frac{(1,-8,0,1) - \left\langle (1,-8,0,1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \right\rangle \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)}{\left\|(1,-8,0,1) - \left\langle (1,-8,0,1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \right\rangle \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)\right\|}$$

$$= \frac{(1,-8,0,1) - (-6)\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)}{\left\|(1,-8,0,1) - (-6)\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)\right\|}$$

$$= \frac{(1,-8,0,1) - (4,-4,-2,0)}{\left\|(1,-8,0,1) - (4,-4,-2,0)\right\|}$$

$$= \frac{(-3,-4,2,1)}{\left\|(-3,-4,2,1)\right\|}$$

$$= \frac{(-3,-4,2,1)}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (2)^2 + (1)^2}}$$

$$= \left(-\frac{3}{\sqrt{30}}, -\frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$$

ดังนั้น ฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ คือ $\left\{\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{30}}, -\frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)\right\}$

แบบฝึกหัดบทที่ 7

1. ให้ $\underline{u}=\begin{bmatrix}u_1 & u_2\\ u_3 & u_4\end{bmatrix}$ และ $\underline{v}=\begin{bmatrix}v_1 & v_2\\ v_3 & v_4\end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $\langle \underline{u},\underline{v}\rangle = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+u_4v_4$

เป็นผลคูณภายในบน $M_{2\times 2}$

2. กำหนดให้ $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ จงคำนวณหา $\langle f,g\rangle$ สำหรับเวกเตอร์ $f=f(x)$ และ $g=g(x)$

ในช่วง $[0,1]$

2.1 $f=\cos(2\pi x), g=\sin(2\pi x)$

2.2 $f=x, g=e^x$

2.3 $f=\tan\dfrac{\pi x}{4}, g=1$

3. กำหนดให้ $\mathbb{R}^2$ มีผลคูณภายในนิยาม $\langle \underline{u},\underline{v}\rangle = 3u_1v_1+2u_2v_2$ โดยที่ $\underline{u}=(u_1,u_2)$ และ $\underline{v}=(v_1,v_2)$

จงหา $\|\underline{u}\|$ เมื่อกำหนด $\underline{u}$ สอดคล้องแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1 $(-1,3)$ 3.2 $(6,7)$

3.3 $(0,1)$ 3.4 $(0,0)$

4. จงหา $\|\underline{u}\|$ เมื่อกำหนด $\underline{u}$ สอดคล้องกับแต่ละข้อในโจทย์ข้อ 3 โดยใช้ผลคูณภายในแบบยุคลิดบน $\mathbb{R}^2$

5. กำหนดให้ $M_{2\times 2}$ มีผลคูณภายในนิยามโดย $\langle \underline{u},\underline{v}\rangle = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+u_4v_4$ ขณะที่ $\underline{u}=\begin{bmatrix}u_1 & u_2\\ u_3 & u_4\end{bmatrix}$

และ $\underline{v}=\begin{bmatrix}v_1 & v_2\\ v_3 & v_4\end{bmatrix}$ จงหา $d(A,B)$ ที่สอดคล้องแต่ละข้อต่อไปนี้

5.1 $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 8 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 7 & -3\end{bmatrix}$

5.2 $A=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

6. กำหนดให้ $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ และ $\mathbb{R}^4$ มีผลคูณภายในแบบยุคลิด จงหา $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

6.1 $\underline{u}=(1,-3), \underline{v}=(2,4)$ 6.2 $\underline{u}=(-1,0), \underline{v}=(3,8)$

6.3 $\underline{u}=(-1,5,2), \underline{v}=(2,4,-9)$ 6.4 $\underline{u}=(4,1,8), \underline{v}=(1,0,-3)$

6.5 $\underline{u}=(1,0,1,0), \underline{v}=(-3,-3,-3,-3)$ 6.6 $\underline{u}=(2,1,7,-1), \underline{v}=(4,0,0,0)$

7. ให้ $M_{2\times 2}$ มีผลคูณภายในแบบยุคลิด ซึ่งนิยามโดย $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$ จงหา $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ A และ B ในแต่ละข้อต่อไปนี้

7.1 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

7.2 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

8. ให้ $\mathbb{R}^3$ มีผลคูณภายในแบบยุคลิด จงหาค่า k ที่ทำให้แต่ละข้อต่อไปนี้ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกัน

8.1 $\underline{u} = (2,1,3), \underline{v} = (1,7,k)$

8.2 $\underline{u} = (k,k,1), \underline{v} = (k,5,6)$

9. ให้ P_2 มีผลคูณภายในนิยามโดย $\langle \underline{p}, \underline{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ เมื่อ $\underline{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2, \underline{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$ จงพิสูจน์ว่า $\underline{p} = 1 - x + 2x^2$ เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\underline{q} = 2x + x^2$

10. กำหนด $\underline{u} = (2,1,0,3), \underline{v} = (1,-1,-2,3)$ และ $\underline{w} = (3,1,0,4)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^4$ จงหา

10.1 $\|\underline{u} + \underline{v}\|$

10.2 $\|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$

10.3 $\|-3\underline{u}\| + 3\|\underline{v}\|$

10.4 $\dfrac{1}{\|\underline{w}\|} \cdot \underline{w}$

11. ให้ $\mathbb{R}^2$ มีผลคูณภายในแบบยุคลิดและให้ $S = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ เมื่อ $\underline{w}_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \underline{w}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ กำหนด $\underline{u}, \underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่งมี $(\underline{u})_s = (1,1)$ และ $(\underline{v})_s = (-1,4)$ จงหา $\|\underline{u}\|, d(\underline{u}, \underline{v})$ และ $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$

12. ให้ $\mathbb{R}^2$ มีผลคูณภายในแบบยุคลิด จงหาว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

12.1 $(1,0), (0,2)$

12.2 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

12.3 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

12.4 $(1,0), (0,0)$

13. ให้ $M_{2\times 2}$ มีผลคูณภายในนิยามโดย $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$ เมื่อ $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ และ $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$ จงหาว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

13.1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

13.2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

14. จงแสดงว่า $u_1 = (1,0,0,1), u_2 = (-1,0,2,1), u_3 = (2,3,2,-2), u_4 = (-1,2,-1,1)$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากใน $\mathbb{R}^4$ พร้อมด้วยผลคูณภายในแบบยุคลิด นอกจากนี้จงพิสูจน์ด้วยว่า ถ้าใช้วิธีการทำแต่ละเวกเตอร์ให้เป็นบรรทัดฐาน แล้วผลที่ได้จะเป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

15. ให้ $\mathbb{R}^3$ มีผลคูณภายในแบบยุคลิด จงใช้ขบวนการกราม-ชมิดท์แปลงฐานหลัก $\{u_1, u_2, u_3\}$ ต่อไปนี้ให้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ

15.1 $u_1 = (1,1,1), u_2 = (-1,1,0), u_3 = (1,2,1)$

15.2 $u_1 = (1,0,0), u_2 = (3,7,-2), u_3 = (0,4,1)$

16. กำหนดให้ $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ เป็นผลคูณภายในบน $\mathbb{R}^3$ จงใช้ขบวนการกราม-ชมิดท์หาฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติจากฐานหลัก $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

17. ให้ปริภูมิเวกเตอร์ P_2 มีผลคูณภายในนิยามโดย $\langle \underline{p}, \underline{q} \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ เมื่อ $\underline{p} = p(x)$ และ $\underline{q} = q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามใน P_2 มี $S = \{1, x, x^2\}$ เป็นฐานหลัก จงหาฐานหลักเชิงตั้งฉากของ P_2

ผลเฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 7

2. 2.1 0 2.2 1 2.3 $-\frac{4}{\pi}\ln\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3. 3.1 $\sqrt{2}$ 3.2 $\sqrt{206}$ 3.3 $\sqrt{2}$ 3.4 0

4. 4.1 $\sqrt{10}$ 4.2 $\sqrt{85}$ 4.3 1 4.4 0

5. 5.1 $\sqrt{98}$ 5.2 0

6. 6.1 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 6.2 $-\frac{3}{\sqrt{73}}$ 6.3 0

   6.4 $-\frac{20}{9\sqrt{10}}$ 6.5 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 6.6 $\frac{2}{\sqrt{35}}$

7. 7.1 $\frac{19}{10\sqrt{7}}$ 7.2 0

8. 8.1 $k=-3$ 8.2 $k=-2, k=-3$

10. 10.1 $\left\|\underline{u}+\underline{v}\right\|=7$

    10.2 $\left\|\underline{u}\right\|+\left\|\underline{v}\right\|=\sqrt{14}+\sqrt{15}$

    10.3 $\left\|-3\underline{u}\right\|+\left\|3\underline{v}\right\|=3\sqrt{14}+3\sqrt{15}$

    10.4 $\frac{1}{\left\|\underline{w}\right\|}\cdot\underline{w}=\left(\frac{3}{\sqrt{26}},\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$

11. $\left\|\underline{u}\right\|=\sqrt{2}\,, d(\underline{u},\underline{v})=\sqrt{13}\,, \left\langle\underline{u},\underline{v}\right\rangle=3$

12. 12.2

13. 13.1

15. 15.1 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

    15.2 $(1,0,0),\left(0,\frac{7}{\sqrt{53}},-\frac{2}{\sqrt{53}}\right),\left(0,\frac{30}{\sqrt{11925}},\frac{105}{\sqrt{11925}}\right)$

16. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},0\right)$

17. $1, x-\frac{1}{2}, x^2-x-\frac{1}{6}$