บทที่ 2

เลขยกกำลังและราก

2.1 เลขยกกำลัง

การยกกำลังคือการดำเนินการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่ง เขียนอยู่ในรูป a^n ซึ่งประกอบด้วยสองจำนวนคือ **ฐาน** (a) และ**เลขชี้กำลัง** (n) การยกกำลังมีความหมายเหมือนการคูณซ้ำ ๆ กัน นั่นเอง และสำหรับเนื้อหาในเรื่องนี้นั่นคือต้องการทราบถึงเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งจะต้องค่อย ๆ ทำความเข้าใจโดยเริ่มศึกษาตามลำดับดังนี้

1. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม
2. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน
3. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ
4. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนอตรรกยะ
5. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริงใดๆ

ก่อนที่จะศึกษาเรื่องต่าง ๆที่กล่าวมาข้างต้นนั้นก่อนอื่นต้องมาทำความเข้าใจเกี่ยวกับบทนิยามต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเลขยกกำลังดังต่อไปนี้ (สุชิน ทำมาหากิน, 2540 : 1)

บทนิยาม 2.1

ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
a^n อ่านว่า a ยกกำลัง n หมายถึง a คูณกัน n ตัว เรียก a ว่าฐาน
เรียก n ว่าเลขชี้กำลัง

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ ตัว}}$$

ตัวอย่าง 2.1

$$2^3 = 2\times 2\times 2$$

$$5^4 = 5\times 5\times 5\times 5$$

$$(-3)^2 = (-3)\times(-3)$$

$$(-4)^3 = (-4)\times(-4)\times(-4)$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^4 = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$$

บทนิยาม 2.2

$a^0 = 1$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a \neq 0$

บทนิยาม 2.3

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อสังเกต 2.1

1. จากทั้ง 3 บทนิยามที่กล่าวมาข้างต้นนั้นได้แสดงให้เห็นถึงเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ และ ศูนย์

2. 0^0 ไม่ถูกกำหนดให้เกิดขึ้น(ไม่นิยาม)

3. ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะสามารถหา a^n ได้เสมอ

ทฤษฎีบท 2.1

ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a \neq 0$ และ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะได้ว่า $a^m \times a^n = a^{m+n}$

พิสูจน์

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m\ \text{ตัว}} \times \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\ \text{ตัว}}$$

$$= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m+n\ \text{ตัว}}$$

$$= a^{m+n}$$

ตัวอย่าง 2.2

$$2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$(-3)^2 \times (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6$$

ทฤษฎีบท 2.2

ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก

แล้วจะได้ว่า $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

พิสูจน์

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}_{n\ \text{ตัว}}$$

$$= a^{\overbrace{m+m+m+\cdots+m}^{n\ \text{ตัว}}}$$

$$= a^{mn}$$

ตัวอย่าง 2.3

$$\left(2^3\right)^5 = 2^{3\times5} = 2^{15}$$

$$\left(-3^2\right)^4 = (-3)^{2\times4} = (-3)^8$$

ทฤษฎีบท 2.3

ให้ a,b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะได้ว่า $(ab)^n = a^n \times b^n$

พิสูจน์

$$(ab)^n = \underbrace{ab \times ab \times ab \times \cdots \times ab}_{n \text{ ตัว}}$$

$$= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ ตัว}} \times \underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ ตัว}}$$

$$= a^n \times b^n$$

ตัวอย่าง 2.4

$$(2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$$

$$(-3 \times 6)^4 = (-3)^4 \times 6^4$$

ทฤษฎีบท 2.4

เมื่อ a,b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $b \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะได้ว่า $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

พิสูจน์

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(ab^{-1}\right)^n$$

$$= a^n b^{-n}$$

$$= \frac{a^n}{b^n}$$

ตัวอย่าง 2.5

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$$

$$\left(\frac{-3}{6}\right)^4 = \frac{(-3)^4}{6^4}$$

ทฤษฎีบท 2.5

ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a \neq 0$ และ m,n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว แล้วจะได้ว่า $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

พิสูจน์

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n}$$

$$= a^{m+(-n)}$$

$$= a^{m-n}$$

ตัวอย่าง 2.6

$$\frac{2^4}{2^5} = 2^{4-5} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(-3)^6}{(-3)^2} = (-3)^{6-2} = (-3)^4$$

จากบทนิยามและทฤษฎีที่ผ่านมาสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

ถ้า a,b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ m,n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว (จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง, 2551 : 193)

1. $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ ตัว}}$

2. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

3. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

4. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$. เมื่อ $b \neq 0$

6. $a^0 = 1$ เมื่อ $a \neq 0$

7. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ เมื่อ $a \neq 0$

8. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $a \neq 0$

ตัวอย่าง 2.7 จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อกำหนดให้ $x > 0, y > 0$ และ $z > 0$ $\left(\dfrac{x^2y^3}{x^{-3}z^{-5}}\right)^2$

วิธีทำ
$$\left(\frac{x^2y^3}{x^{-3}z^{-5}}\right)^2 = \left(x^{2-(-3)}y^3z^5\right)^2$$
$$= \left(x^5y^3z^5\right)^2$$
$$= x^{10}y^6z^{10}$$

ดังนั้น $\left(\dfrac{x^2y^3}{x^{-3}z^{-5}}\right)^2 = x^{10}y^6z^{10}$

บทนิยาม 2.4

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง b เป็นรากที่สองของ a ก็ต่อเมื่อ $b^2 = a$

เนื่องจาก $b \neq 0$ จะได้ว่า $b^2 > 0$ และถ้า $b = 0$ จะได้ว่า $b^2 = 0$ ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วได้จำนวนจริงลบ เพราะฉะนั้น ในระบบจำนวนจริงเราจะมีรากที่สองของ a เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก หรือ 0 เท่านั้น ในอนาคตเมื่อเราขยายระบบจำนวนจริงเป็นระบบจำนวนเชิงซ้อนแล้ว เราจะสามารถให้บทนิยามที่ครอบคลุมถึงจำนวนจริงลบ

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก รากที่สองของ a ได้แก่รากที่เป็นจำนวนจริงบวก และรากที่เป็นจำนวนจริงลบ ใช้สัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ แทนรากที่สองที่เป็นจำนวนจริงบวกของ a และ $-\sqrt{a}$ แทนรากที่สองที่เป็นจำนวนจริงลบของ a

ถ้า $a = 0$ a จะมีรากที่สองเพียงรากเดียวคือ 0

ต่อไปนี้เราจะเขียน $\sqrt{a}$ ก็ต่อเมื่อ $a \geq 0$ เท่านั้น

คุณสมบัติของรากที่สองที่เป็นบวกเกี่ยวข้องกับค่าสัมบูรณ์ดังนี้ (สุเทพ ทองอยู่ และสุเทพ จันทร์สมศักดิ์, 2533 : 172)

ตัวอย่าง 2.8 เนื่องจาก $5^2 = 25$ และ $(-5)^2 = 25$ ดังนั้น 5 และ -5 เป็นรากที่สองของ 25

$$\sqrt{25} = 5$$

$$-\sqrt{25} = -5$$

$$\sqrt{5^2} = |5| = 5$$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

ทฤษฎีบท 2.6

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่งต่างมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แล้วจะได้ว่า $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

ตัวอย่าง 2.9 จงหาผลลัพธ์ $7\sqrt{45} + 3\sqrt{20}$

วิธีทำ $7\sqrt{45} + 3\sqrt{20} = 7\sqrt{9 \times 5} + 3\sqrt{4 \times 5}$

$$= 7\sqrt{9}\sqrt{5}) + 3\sqrt{4}\sqrt{5}$$

$$= 7(3)\sqrt{5} + 3(2)\sqrt{5}$$

$$= 21\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$$

$$= 27\sqrt{5}$$

ดังนั้น $7\sqrt{45} + 3\sqrt{20} = 27\sqrt{5}$

ตัวอย่าง 2.10 จงหาผลลัพธ์ $\sqrt{50}+\sqrt{72}$

วิธีทำ $\sqrt{50}+\sqrt{72} = \sqrt{25\times 2}+\sqrt{36\times 2}$

$$= \left(\sqrt{25}\times\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{36}\times\sqrt{2}\right)$$

$$= 5\sqrt{2}+6\sqrt{2}$$

$$= 11\sqrt{2}$$

ดังนั้น $\sqrt{50}+\sqrt{72} = 11\sqrt{2}$

ทฤษฎีบท 2.7

ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a>0$ แล้วจะได้ว่า $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

พิสูจน์

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{|a|}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a}$$ เพราะว่า $a>0$

ทฤษฎีบท 2.8

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a\geq 0$ และ $b>0$

แล้วจะได้ว่า $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ตัวอย่าง 2.11 จงหาผลลัพธ์ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{5}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{10}}{5}\\
&= \frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{10}}{15}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{3}+3\sqrt{10}}{15}$

ตัวอย่าง 2.12 จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{x+a}+x}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{a} &= \left(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{a}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\right)\\
&= \frac{\left(\sqrt{x+a}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{a\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}\\
&= \frac{(x+a)-x}{a\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}\\
&= \frac{a}{a\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{x+a}+x}$

ตัวอย่าง 2.13 จงหาผลลัพธ์ $-10\sqrt{13}\times\left(-4\sqrt{\dfrac{1}{13}}\right)$

วิธีทำ $-10\sqrt{13}\times\left(-4\sqrt{\dfrac{1}{13}}\right)=-10\times(-4)\left(\sqrt{13}\right)\sqrt{\dfrac{1}{13}}$

$$=-10\times(-4)\sqrt{\frac{13}{13}}$$

$$=40\sqrt{\frac{13}{13}}$$

$$=40\sqrt{1}$$

$$=40$$

ดังนั้น $-10\sqrt{13}\times\left(-4\sqrt{\dfrac{1}{13}}\right)=40$

2.2 ราก

สำหรับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วนนั้นจะแบ่งออกเป็นได้สองกรณีคือ จำนวนจริงในรูปกรณฑ์และรากที่ n ในระบบจำนวนจริงและก่อนที่เราจะศึกษารากที่ n เราจะศึกษาจากง่ายไปหายากโดยจะเริ่มต้นจากรากที่ 2 รากที่ 3 ไปเรื่อย ๆ จนถึงรากที่ n ดังจะกล่าวในบทนิยามต่อไปนี้ (สุเทพ ทองอยู่ และสุเทพ จันทร์สมศักดิ์, 2533 : 175)

2.2.1 รากที่สอง

บทนิยาม 2.5

ให้ a เป็นจำนวนจริง **รากที่สองของ** a คือจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้ a สัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ แทนรากที่สองของ a ที่เป็นบวก และ

$-\sqrt{a}$ แทนรากที่สองของ a ที่เป็นลบ

ข้อสังเกต 2.2

$\sqrt{a}$ แทนรากที่สองของ a ที่เป็นบวก สามารถเขียน $\sqrt{a}$ แทนด้วย $a^{\frac{1}{2}}$

ตัวอย่าง 2.14

$\sqrt{2}$ แทนรากที่สองที่เป็นบวก ของ 2

$-\sqrt{2}$ แทนรากที่สองที่เป็นลบของ 2

บทนิยาม 2.6

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ หรือศูนย์ รากที่สองของ a คือจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้ a มีสองราก เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ และ $-\sqrt{a}$

ข้อสังเกต 2.3

จากบทนิยาม 2.6 ค่าของ a เป็นลบ รากที่สองของ a เป็นจำนวนเชิงซ้อนจำนวนเหล่านี้แทนด้วยจุดบนเส้นจำนวนไม่ได้ เหตุนี้เราจึงไม่กล่าวถึง $\sqrt{-a}$ ให้สัญลักษณ์ $|a|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของ a ดังนั้น $\sqrt{a^2} = |a|$

ตัวอย่าง 2.15 จงหา $\sqrt{36}$

วิธีทำ $\sqrt{36} = \sqrt{(6)^2}$

$= |6|$

$= 6$

ดังนั้น $\sqrt{36} = 6$

ตัวอย่าง 2.16 จงหา $\sqrt{4489}$

วิธีทำ $\sqrt{4489} = \sqrt{(67)^2}$

$= |67|$

$= 67$

ดังนั้น $\sqrt{4489} = 67$

ตัวอย่าง 2.17 จงหา $-\sqrt{3.9204}$

วิธีทำ $-\sqrt{3.9204} = -\sqrt{(1.98)^2}$

$= -|1.98|$

$= -1.98$

ดังนั้น $\sqrt{4489} = -1.98$

ตัวอย่าง 2.18 จงหา $-\sqrt{(-13.69)^2}$

วิธีทำ $-\sqrt{(-13.69)^2} = -\sqrt{(-13.69)^2}$

$= -|-13.69)|$

$= -13.69$

ดังนั้น $-\sqrt{(-13.69)^2} = -13.69$

ตัวอย่าง 2.19 จงหา $\sqrt{(-15.60)^2}$

วิธีทำ $\sqrt{(-15.60)^2} = \sqrt{(-15.60)^2}$

$= |-15.60|$

$= 15.60$

ดังนั้น $\sqrt{(-15.60)^2} = 15.60$

จากตัวอย่างที่ผ่านมานั้นการหารากที่ 2 บางตัวอย่างก็หาได้ง่ายแต่บางตัวอย่างนั้นการหารากที่สองนั้นอาจจะยากดังนั้นจึงได้แสดงวิธีการหารากที่สองแบบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้(สุชิน ทำมาหากิน, 2540 : 33)

1. การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ
2. การหารากที่สองโดยวิธีเฉลี่ย
3. การหารากที่สองโดยวิธีตั้งหาร

1. การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ

การหารากด้วยวิธีแยกตัวประกอบ นั้นเหมาะสำหรับเลขจำนวนน้อย ๆ โดยเลขตัวประกอบตัวใดเหมือนกัน ก็แยกเอาออกมาเป็นสองชุด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.20 จงหารากที่สองโดยวิธีการแยกตัวประกอบ $\sqrt{144}$

วิธีทำ $\sqrt{144} = \sqrt{2 \cdot 72}$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 36} \\
&= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 18} \\
&= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} \\
&= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \\
&= \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3)} \\
&= \sqrt{(12) \cdot (12)} \\
&= \sqrt{(12)^2} \\
&= |12| \\
&= 12
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\sqrt{144} = 12$

ตัวอย่าง 2.21 จงหารากที่สองโดยวิธีการแยกตัวประกอบ $\sqrt{2704}$

วิธีทำ $\sqrt{2704} = \sqrt{2 \times 1352}$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2 \times 2 \times 676} \\
&= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 338} \\
&= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 169} \\
&= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13 \times 13} \\
&= \sqrt{2^4 \times 13^2} \\
&= 2^2 \times 13 \\
&= 4 \times 13 \\
&= 52
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\sqrt{2704} = 52$

ตัวอย่าง 2.22 จงหารากที่สองโดยวิธีการแยกตัวประกอบ $\sqrt{4900}$

วิธีทำ $\sqrt{4900} = \sqrt{100 \times 49}$

$$= \sqrt{10 \times 10 \times 7 \times 7}$$
$$= \sqrt{2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7}$$
$$= \sqrt{2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7}$$
$$= \sqrt{2^2 \times 5^2 \times 7^2}$$
$$= 2 \times 5 \times 7$$
$$= 70$$

ดังนั้น $\sqrt{4900} = 70$

ตัวอย่าง 2.23 จงหารากที่สองโดยวิธีการแยกตัวประกอบ $\sqrt{6084}$

วิธีทำ $\sqrt{6084} = \sqrt{36 \times 169}$

$$= \sqrt{4 \times 9 \times 13 \times 13}$$
$$= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 13 \times 13}$$
$$= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 13^2}$$
$$= 2 \times 3 \times 13$$
$$= 78$$

ดังนั้น $\sqrt{6084} = 78$

ตัวอย่าง 2.24 จงหารากที่สองโดยวิธีการแยกตัวประกอบ $\sqrt{8100}$

วิธีทำ $\sqrt{8100} = \sqrt{100 \times 81}$

$$= \sqrt{10 \times 10 \times 9 \times 9}$$
$$= \sqrt{2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$
$$= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5}$$
$$= \sqrt{2^2 \times 3^4 \times 5^2}$$
$$= 2 \times 3^2 \times 5$$
$$= 2 \times 9 \times 5$$
$$= 90$$

ดังนั้น $\sqrt{8100} = 90$

2. การหารากที่สองโดยวิธีเฉลี่ย

การหารากที่สองโดยวิธีเฉลี่ยนี้ค่าที่ได้จะเป็นค่าโดยประมาณเพราะจะมีความคลาดเคลื่อนซึ่งการหาโดยวิธีนั้นจะเริ่มต้นจากการประมาณค่ารากที่สองว่าอยู่บนช่วงใด แล้วจำกัดช่วงให้แคบลงไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้ตำแหน่งทศนิยมตามที่เรา ดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.25 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{7}$ โดยวิธีเฉลี่ย ให้ได้ค่าถึงทศนิยม 1 ตำแหน่ง

วิธีทำ เรารู้ว่า $2^2 < (\sqrt{7})^2 < 3^2$

นั่นคือ $2 < (\sqrt{7}) < 3$ แสดงว่า $\sqrt{7}$ อยู่บนเส้นจำนวนระหว่าง 2 และ 3

หาค่าเฉลี่ยของ 2 และ 3 ได้ $\dfrac{2+3}{2} = 2.5$

นำ 2.5 ไปหาร 7 ได้ 2.8

จะได้ $(2.5)^2 < (\sqrt{7})^2 < (2.8)^2$

นั่นคือ $2.5 < \sqrt{7} < 2.8$

หาค่าเฉลี่ยของ 2.5 และ 2.8 ได้ $\dfrac{2.5+2.8}{2} = 2.65$

นำ 2.65 ไปหาร 7 ได้ประมาณ 2.64

จะได้ $(2.64)^2 < (\sqrt{7})^2 < (2.65)^2$

นั่นคือ $2.64 < \sqrt{7} < 2.65$

ดังนั้น ค่าโดยประมาณของ $\sqrt{7}$ ซึ่งถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 1 คือ 2.6

ตัวอย่าง 2.26 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{23}$ โดยวิธีเฉลี่ย ให้ได้ค่าถึงทศนิยม 1 ตำแหน่ง

วิธีทำ เรารู้ว่า $4^2 < (\sqrt{23})^2 < 25^2$

นั่นคือ $4 < (\sqrt{23}) < 5$ แสดงว่า $\sqrt{23}$ อยู่บนเส้นจำนวนระหว่าง 4 และ 5

หาค่าเฉลี่ยของ 4 และ 5 ได้ $\dfrac{4+5}{2} = 4.5$

นำ 4.5 ไปหาร 23 ได้ประมาณ 5.1

จะได้ $(4.5)^2 < (\sqrt{23})^2 < (5.1)^2$

นั่นคือ $4.5 < \sqrt{23} < 5.1$

หาค่าเฉลี่ยของ 4.5 และ 5.1 ได้ $\dfrac{4.5 + 5.1}{2} = 4.8$

นำ 4.8 ไปหาร 23 ได้ประมาณ 4.79

นั่นคือ $4.79 < \sqrt{23} < 4.8$

หาค่าเฉลี่ยของ 4.79 และ 4.8 ได้ $\dfrac{4.79 + 4.8}{2} = 4.795$

นำ 4.795 ไปหาร 23 ได้ประมาณ 4.796

นั่นคือ $4.795 < \sqrt{23} < 4.796$

ดังนั้น ค่าโดยประมาณของ $\sqrt{23}$ ซึ่งถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 2 คือ 4.79

3. การหารากที่สองโดยวิธีตั้งหาร

จะเห็นว่าการหารากที่สองโดยที่ผ่านมานั้นเป็นการหาเฉพาะตัวเลขง่าย ๆ แต่สำหรับวิธีการตั้งหารสำหรับวิธีเหมาะสำหรับตัวเลขที่มีสามหลักขึ้นไป หรือตัวเลขที่เป็นทศนิยม โดยมีวิธีการดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1. แบ่งตัวเลขที่จะหารากที่สองออกเป็นคาบ คาบละ 2 ตัว โดยที่ถ้าเป็นจำนวนเต็มให้แบ่งจากตำแหน่งขวามือสุดไปทางซ้อยมือคาบละ 2 ตัว ถ้าเป็นตำแหน่งหลังจุดทุศนิยมให้นับจากซ้ายมือไปทางขวามือคาบละสองตัว

ขั้นที่ 2 หาจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าใกล้เคียงกับจำนวนในคาบซ้ายสุด(อาจมีตัวเลข 1 หรือ 2 ตัวก็ได้) จำนวนนี้จะเป็นจำนวนที่อยู่ในหลักซ้ายสุดของรากที่สองแล้วนำจำนวนนี้ใส่ลงที่ผลลัพธ์ แล้วนำกำลังสองของจำนวนนี้ลบออกจากจำนวนในคาบแรก เสร็จแล้วนำตัวเลขในคาบต่อไปลงมาเป็นตัวตั้งต่อไป

ขั้นที่ 3 นำ 2 คูณผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นที่ 2

ขั้นที่ 4 หาจำนวนที่มีหลักเดียวเติมหลังผลคูณที่ได้จากขั้นที่ 3 และที่ผลลัพธ์แล้วนำจำนวนนี้มาคูณกับตัวตั้งของขั้นที่ 2 แล้วลบออกจากตัวตั้งของขั้นที่ 2 ถ้าผลคูณน้อยกว่าจะเหลือเศษ ให้นำตัวเลขในคาบถัดไปลงมาเป็นตัวตั้งต่อไป แล้วเริ่มทำตามขั้นที่ 3 ต่อไป

ตัวอย่าง 2.27 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{625}$ โดยวิธีตั้งหาร

วิธีทำ

$$\begin{array}{rl}
\;2\;\;5 & \\
2\overline{)6,\;25} & \\
4 & \rightarrow (2\times 2) \\
2\;\;25 & \rightarrow 4\underline{5}\times\underline{5}
\end{array}$$

ดังนั้น $\sqrt{625}=25$

ตัวอย่าง 2.28 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{17956}$ โดยวิธีตั้งหาร

วิธีทำ

$$\begin{array}{rl}
\;1\;\;3\;\;4 & \\
2\overline{)1,79,56} & \\
1 & \\
79 & \\
69 & \rightarrow (2\underline{3})\times\underline{3} \\
10\;56 & \\
10\;56 & \rightarrow (26\underline{4})\times 4
\end{array}$$

ดังนั้น $\sqrt{17956}=134$

ตัวอย่าง 2.29 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{821}$ โดยวิธีตั้งหาร

วิธีทำ

$$
\begin{array}{lll}
 & \;2\;\;8\;\;.6\;5 & \\
2) & \overline{8,\;21\qquad} & \\
 & 4 & \\
 & \;4\;21 & \\
 & \;3\;84 & \rightarrow (4\underline{8}) \times \underline{8} \\
 & \quad 37\;00 & \\
 & \quad 33\;96 & \rightarrow (56\underline{6}) \times 6 \\
 & \qquad 3\;04\;00 & \\
 & \qquad 2\;86\;25 & \rightarrow (572\underline{5}) \times 5 \\
 & \qquad\qquad \vdots &
\end{array}
$$

ดังนั้น $\sqrt{821}$ มีค่าประมาณ 28.65

ตัวอย่าง 2.30 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{23}$ โดยวิธีตั้งหาร

วิธีทำ

$$
\begin{array}{lll}
 & \;4\;\;.7 & \\
2) & \overline{23\qquad} & \\
 & 16 & \\
 & \;\;7\;00 & \\
 & \;\;6\;09 & \rightarrow 8\underline{7} \times \underline{7} \\
 & \quad 91\;00 & \\
 & \quad 85\;41 & \rightarrow 94\underline{9} \times \underline{9} \\
 & \qquad\quad \vdots &
\end{array}
$$

ดังนั้น $\sqrt{23}$ มีค่าประมาณ 4.7

2.2.2 รากที่สาม

บทนิยาม 2.7

ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ **รากที่สามของ** a คือจำนวนที่ยกกำลังสามแล้วได้ a แทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$

สำหรับการหารากที่สามในเอกสารเล่มนี้จะแสดงการหาเฉพาะวิธีการหาโดยแยกตัวประกอบเท่านั้นโดยจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.31 จงหา $\sqrt[3]{8}$

วิธีทำ เนื่องจาก $8 = 2\times 4$

$$= 2\times 2\times 2$$
$$= 2^3$$

ดังนั้น $\sqrt[3]{8} = 2$

ตัวอย่าง 2.32 จงหา $\sqrt[3]{27}$

วิธีทำ เนื่องจาก $27 = 3\times 9$

$$= 3\times 3\times 3$$
$$= 3^3$$

ดังนั้น $\sqrt[3]{27} = 3$

ตัวอย่าง 2.33 จงหา $\sqrt[3]{-64}$

วิธีทำ เนื่องจาก $64 = (2\times 32)$

$$= 2 \times 2 \times 16$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 8$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$$
$$= (4) \times (4) \times (4)$$
$$= (4)^3$$

ดังนั้น $\sqrt[3]{-64} = -4$

ตัวอย่าง 2.34 จงหา $\sqrt[3]{3375}$

วิธีทำ เนื่องจาก $3375 = (5 \times 675)$

$$= 5 \times 5 \times 135$$
$$= 5 \times 5 \times 5 \times 27$$
$$= 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 9$$
$$= 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3$$
$$= (5 \times 3) \times (5 \times 3) \times (5 \times 3)$$
$$= 15 \times 15 \times 15$$
$$= (15)^3$$

ดังนั้น $\sqrt[3]{3375} = 15$

ตัวอย่าง 2.35 จงหา $\sqrt[3]{-4096}$

วิธีทำ เนื่องจาก $-4096 = (-16) \times (-256)$

$$= (-16) \times (-16) \times (-16)$$
$$= (-16)^3$$

ดังนั้น $\sqrt[3]{-4096} = -16$

2.2.3 รากที่ n

บทนิยาม 2.8

ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่า 1
b **เป็นรากที่** n **ของ** a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

ตัวอย่าง 2.36

$3^4 = 81$ ดังนั้น 3 เป็นรากที่ 4 ของ 81

$(-3)^4 = 81$ ดังนั้น -3 เป็นรากที่ 4 ของ 81

$(-7)^3 = -348$ ดังนั้น -7 เป็นรากที่ 3 ของ -348

บทนิยาม 2.9

ให้ a เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่า 1 และมีจำนวนจริงที่เป็นรากที่ n แล้วเรียก $\sqrt[n]{a}$ ว่าค่าหลักของรากที่ n ของ a โดยที่

1. ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ คือรากที่ n ที่เป็นจำนวนจริงบวกของ a
2. ถ้า $a = 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a} = 0$
3. ถ้า $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคี่ $\sqrt[n]{a}$ คือรากที่ n ที่เป็นจำนวนจริงลบของ a

ตัวอย่าง 2.37

ค่าหลักของรากที่ 5 ของ 32 คือ 2

ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 81 คือ 3

ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -64 คือ -4

ค่าหลักของรากที่ 7 ของ -10 คือ $\sqrt[7]{-10}$

ไม่มีค่าหลักของรากที่ 4 ของ -81 ในระบบจำนวนจริง

ข้องสังเกตุ

กรณี n เป็นจำนวนเต็มคู่ และ a เป็นจำนวนจริงลบ จะไม่มีจำนวนจริงใดเป็นรากที่ n ของ a ดังนั้น $\sqrt[n]{a}$ จะไม่นิยาม

ตัวอย่าง 2.38 จงหารากที่สี่ของ 2401

วิธีทำ พิจารณา $2401 = 7 \times 343$

$$= 7 \times 7 \times 49$$

$$= 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

$$= 7^4$$

เนื่องจาก $7^4 = (-7)^4 = 2401$

ดังนั้น รากที่สี่ของ 2401 คือ 7 และ -7

ตัวอย่าง 2.39 จงหา $\sqrt[4]{2401}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt[4]{2401} = \sqrt[4]{7^4}$

$$= |7|$$

$$= 7$$

ดังนั้น $\sqrt[4]{2401} = 7$

เมื่อเราศึกษาบทนิยาสามารถหาค่าราก และค่าหลักของรากต่าง ๆ ได้แล้ว ต่อไปเราจะศึกษาสมบัติของรากที่ n ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้(ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา, 2555 : 7-9)

ทฤษฎีบท 2.9

ถ้า x และ y มีรากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

พิสูจน์ ให้ x, y เป็นจำนวนจริง โดยที่ x และ y มีรากที่ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

ให้ a เป็นจำนวนจริง และเป็นรากที่ n ของ x

นั่นคือ $a = \sqrt[n]{x}$ ดังนั้น $a^n = x$

ให้ b เป็นจำนวนจริง และเป็นรากที่ n ของ y

นั่นคือ $b = \sqrt[n]{y}$ ดังนั้น $b^n = y$

จะได้ $xy = a^n b^n = (ab)^n$

ดังนั้น $ab = \sqrt[n]{xy}$

สรุปได้ว่า $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

ตัวอย่าง 2.40 จงทำ $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16} = \sqrt[3]{4(-16)}$

$$= \sqrt[3]{-64}$$

$$= \sqrt[3]{(-4)^3}$$

$$= -4$$

ดังนั้น $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16} = -4$

ทฤษฎีบท 1.37

ถ้า x และ y มีรากที่ n และ $y \neq 0$ แล้ว $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

พิสูจน์ ให้ x, y เป็นจำนวนจริง โดยที่ x และ y มีรากที่ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

ให้ a เป็นจำนวนจริง และเป็นรากที่ n ของ x

นั่นคือ $a = \sqrt[n]{x}$ ดังนั้น $a^n = x$

ให้ b เป็นจำนวนจริง และเป็นรากที่ n ของ y

นั่นคือ $b = \sqrt[n]{y}$ ดังนั้น $b^n = y \ , \ y \neq 0$

จะได้ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

ดังนั้น $\dfrac{a}{b} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

สรุปได้ว่า $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

ตัวอย่าง 2.41 จงทำ $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{32}{2}}$

$$= \sqrt[4]{16}$$

$$= \sqrt[4]{(2)^4}$$

$$= 2$$

ดังนั้น $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16} = 2$

ตัวอย่าง 2.42 จงทำ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{p^3 r^{-9}}{8p^{-3} r^{-6}}}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อกำหนดให้ $p > 0$ และ $r > 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{p^3 r^{-9}}{8p^{-3} r^{-6}}}} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{p^3 r^{-9}}{8p^{-3} r^{-6}}\right)^{\frac{1}{3}}}$

$$= \left(\frac{p^{3-(-3)} r^{-9-(-6)}}{8} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{p^{6} r^{-3}}{8} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

ดังนั้น $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{p^{3} r^{-9}}{8p^{-3} r^{-6}}}} = \left(\dfrac{p^{6} r^{-3}}{8} \right)^{-\frac{1}{3}}$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าในข้อต่อไปนี้

   1) 1^0

   2) $2^{-3} \times (2 \times 3)^3$

   3) $a^{n+1} \times a^{n-1}$

   4) $2^n + 2^{n-2} + 2^{n+2}$

   5) ถ้า $(125)^{-y} = 8$ แล้ว $(25)^{2y}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

2. จงทำให้เป็นรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

   1) $\dfrac{7^9(1^0)^2}{7^7}$

   2) $\dfrac{(2a^7)(3a^2)}{6a^3}$

   3) $\left(\dfrac{2ab^6}{a^3b^3}\right)^{-2}$

   4) $\dfrac{a^3b^2c^{-4}}{a^{-2}b^5c^{-9}}$

   5) $\left(\dfrac{p^{-2}q^4r}{p^3q^5}\right)^5$

   6) $\dfrac{(5a^2)(6b^3)}{(2a^3)(25b^{-2})}$

   7) $\dfrac{2^{n+3}}{5^{n+1}} \times \dfrac{6^{2-n}}{15^{-n-1}}$

   8) $\dfrac{(-p)^{-2}(-q^4)(-r)^{-10}}{p^{-5}q^{10}r}$

3. จงหารากที่สองโดยวิธีการแยกตัวประกอบ

   1) $\sqrt{4225}$

   2) $\sqrt{7396}$

   3) $\sqrt{1936}$

   4) $\sqrt{441}$

   5) $\sqrt{2601}$

   6) $\sqrt{3025}$

   7) $\sqrt{4225}$

   8) $\sqrt{6552}$

   9) $\sqrt{2558}$

   10) $\sqrt{7225}$

4. จงหาค่าประมาณโดยวิธีเฉลี่ย ให้ได้ค่าถึงทศนิยม 1 ตำแหน่ง

1) $\sqrt{6}$
2) $\sqrt{12}$
3) $\sqrt{24}$
4) $\sqrt{30}$
5) $\sqrt{34}$
6) $\sqrt{56}$
7) $\sqrt{90}$
8) $\sqrt{47}$
9) $\sqrt{94}$
10) $\sqrt{105}$

5. จงหารากที่สองโดยวิธีการตั้งหาร

1) $\sqrt{123}$
2) $\sqrt{441}$
3) $\sqrt{1936}$
4) $\sqrt{7396}$
5) $\sqrt{4225}$
6) $\sqrt{10936}$
7) $\sqrt{115}$
8) $\sqrt{921}$
9) $\sqrt{2022}$
10) $\sqrt{2565}$

6. จงหารากที่สามโดยวิธีการแยกตัวประกอบ

1) $\sqrt[3]{8}$
2) $\sqrt[3]{15625}$
3) $\sqrt[3]{-343}$
4) $\sqrt[3]{2197}$
5) $\sqrt[3]{-1250}$
6) $\sqrt[3]{4056}$
7) $\sqrt[3]{6405}$
8) $\sqrt[3]{7200}$
9) $\sqrt[3]{6250}$
10) $\sqrt[3]{9999}$

7. จงทำให้เป็นรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt{27x^2}$

2) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{-64}}$

3) $4\sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 8\sqrt{5}$

4) $11\sqrt[3]{56} - 6\sqrt[3]{875} - 3\sqrt[3]{189}$

5) $\sqrt{252} + 2\sqrt{294} - 12\sqrt{\dfrac{1}{6}}$

6) $2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 5\sqrt{20}$

7) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$

8) $(7\sqrt{5} - 3\sqrt{5}) + (3\sqrt{2} + \sqrt{2})$

9) $(6\sqrt{3} + \sqrt{7})(2\sqrt{4} - \sqrt{7})$

10) $(10 + \sqrt{6})^2$

11) $3\sqrt{8} - 4\sqrt{18} + 7\sqrt{2}$

8. จงทำให้ตัวส่วนอยู่ในรูปไม่ติดกรณฑ์

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

2) $\dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{10}}$

3) $\dfrac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}$

4) $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{15}}$

5) $\sqrt{\dfrac{5x}{2y}}$

6) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{4}}$

7) $\dfrac{\sqrt{96}}{2\sqrt{12}}$

8) $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{15}}$

เอกสารอ้างอิง

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (2551). **คู่มือเตรียมสอบ O-NET กลุ่มสาระคณิตศาสตร์.** กรุงเทพมหานคร : พ.ศ. พัฒนาจำกัด

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5.** กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. (2547). **หลักการคณิตศาสตร์.** กรุงเทพมหานคร : ด่านสุทธาการพิมพ์.

เวชชัย สังข์สาย. (2536). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน.** สุรินทร์ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ วิทยาลัยครูสุรินทร์.

สุชิน ทำมาหากิน. (2540). **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.3.** กรุงเทพมหานคร : มิตรสัมพันธ์ กราฟฟิคอาร์ต.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์. (2533). **ระบบจำนวน.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุเทพ ทองอยู่ และสุเทพ จันทร์สมศักดิ์. (2533). **คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 1**. ภูมิบัณฑิต.

________________. (2535). **คณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6 เล่ม 1**. ภูมิบัณฑิต.