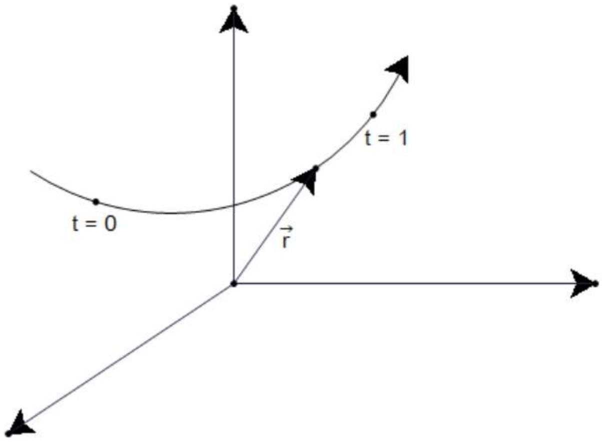
บทที่ 3
ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

1. ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ (Vector – Value Function)

นิยาม 1.1 กำหนดให้ $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ เป็นสมการอิงตัวแปรเสริม เรียก $\vec{r}\left(t\right) = \left\langle x(t),\ y(t),\ z(t)\right\rangle$ ว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์หรือฟังก์ชันเวกเตอร์ (Vector Function) เรียก $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ ว่าส่วนประกอบ (Component Function) ของ $\vec{r}(t)$



ตัวอย่าง 1 จงหาฟังก์ชันค่าเวกเตอร์จากสมการต่อไปนี้

1.1 $x = 3t,\ y = 2\sin t,\ z = 3\cos 2t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

....

....

....

....

....

1.2 $\dfrac{x+4}{2} = 6(y-1) = \dfrac{1-2z}{5}$

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ต่อไปนี้

2.1 $\vec{r}(t) = 4t\,\hat{i} + t^2\hat{j} + (t^3 - 1)\hat{k}$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

2.2 $\vec{r}(t) = \left\langle \cos 3t, -(1 - \sin t),\ 4t \right\rangle$

ตัวอย่าง 3 จงเขียนกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ต่อไปนี้

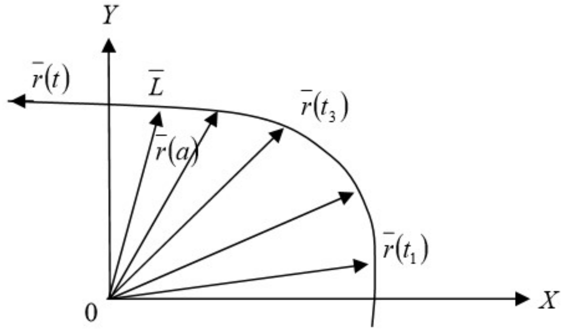
3.1 $\vec{r}1 - \sin t = (t+1)\hat{i} + 2t\,\hat{j}$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

3.2 $\vec{r}(t) = \left\langle \cos t, \sin t \right\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le \pi$

3.3 $\vec{r}(t) = \left\langle \cos t, \sin t, t \right\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$

2. ลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ถ้า $\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $\vec{L}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้ว $\lim\limits_{t\to a}\vec{r}(t)=\vec{L}$ ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์รัศมี $\vec{r}=\vec{r}(t)$ เข้าใกล้ $\vec{L}$ ทั้งขนาดและทิศทางเมื่อ $t\to a$



ถ้า $\vec{r}(t)=\left\langle x(t),\, y(t),\, z(t)\right\rangle$ แล้ว $\lim\limits_{t\to a}\vec{r}(t)=\lim\limits_{t\to a}\left\langle x(t),\, y(t),\, z(t)\right\rangle$

หรือ $\lim\limits_{t\to a}\vec{r}(t)=\left\langle \lim\limits_{t\to a}x(t),\, \lim\limits_{t\to a}y(t),\, \lim\limits_{t\to a}z(t)\right\rangle$

ตัวอย่าง 1 จงหาลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{t\to 2}\left\langle 2,\, 3-t,\, 4t^2\right\rangle$

....

....

....

1.2 $\lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{t^2-1}{t-1}\hat{i}+\ln t\,\hat{j}+e^t\hat{k}\right)$

....

....

....

1.3 $\lim\limits_{t\to 0}\left\langle \dfrac{2t}{t^2-t},\, \dfrac{\sin t}{t},\, \dfrac{\sqrt{t+1}-1}{t}\right\rangle$

....

....

....

1.4 $\lim\limits_{t\to \infty}\left(\left(\dfrac{2}{t^2}+2\right)\hat{i}+\left(1+\dfrac{3}{2^t}\right)\hat{j}+4\hat{k}\right)$

....

....

....

1.5 ถ้า $\vec{r}(t)=\left\langle 3,\, \dfrac{1}{\sqrt{t}},\, t\right\rangle$ จงหา $\lim\limits_{t\to\infty}\vec{r}(t)$

....

....

....

1.6 ถ้า $\vec{r}(t)=\left\langle \dfrac{\sin t}{t^2},\, 2\cos\left(\dfrac{1}{t^2}\right),\, \dfrac{1}{\ln t}\right\rangle$ จงหา $\lim\limits_{t\to\infty}\vec{r}(t)$

....

....

....

1.7 ถ้า $\vec{r}(t)=\left\langle \dfrac{2t^2+1}{t^2+3},\, \dfrac{t}{t^3-1},\, \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{4t+2}}\right\rangle$ จงหา $\lim\limits_{t\to\infty}\vec{r}(t)$

....

....

....

1.8 ถ้า $\vec{r}\left(t\right)=\left(\ln(t)-\ln(t+5)\right)\hat{i}+9^{\frac{t}{\sqrt[4]{16t^4+2t}}}\,\hat{j}+\hat{k}$ จงหา $\lim\limits_{t\to\infty}\vec{r}(t)$

....

....

....

1.9 ถ้า $\vec{r}(t)=\dfrac{3^t}{5^t+1}\,\hat{i}+\dfrac{t^5+1}{2^t+t}\,\hat{j}+\dfrac{2^{2t}+2}{t^9+1}\,\hat{k}$ จงหา $\lim\limits_{t\to\infty}\vec{r}(t)$

....

....

....

1.10 ถ้า $\vec{r}(t)=\dfrac{\ln t^5}{t}\,\hat{i}+\dfrac{t^6}{6!}\,\hat{j}+\dfrac{t^3}{2^t}\,\hat{k}$ จงหา $\lim\limits_{t\to\infty}\vec{r}(t)$

....

....

....

3. ความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

นิยาม 3.1 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ ต่อเนื่องที่ $t = a$ เมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\vec{r}(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{t\to a}\vec{r}(t)$ มีค่า
3. $\lim_{t\to a}\vec{r}(t) = \vec{r}(a)$

และกล่าวได้ว่า $\vec{r}(t)$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด I ถ้าฟังก์ชัน $\vec{r}(t)$ ต่อเนื่องทุกค่า t ที่อยู่บนช่วง I

ตัวอย่าง 1 จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ณ จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $\vec{r}(t) = (3+t)\,\hat{i} - \cos 2t\,\hat{j} + 7\hat{k}$ ณ จุดที่ $t = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

1.2 $\vec{r}(t) = \left\langle \dfrac{\sin t}{t},\, 2t,\, 3 \right\rangle$ ณ จุดที่ $t = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ถ้า $\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ แล้ว $\vec{r}'(t)$ มีจริงที่ t ก็ต่อเมื่อทุก ๆ ฟังก์ชัน ส่วนประกอบของ $\vec{r}(t)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ t โดยที่ฟังก์ชันส่วนประกอบของ $\vec{r}'(t)$ คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันส่วนประกอบของ $\vec{r}(t)$ นั่นคือ ถ้า $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ แล้ว $\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$

ตัวอย่าง 1 จงหา $\vec{r}'(t)$ และ $\vec{r}'(t)$ ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $\vec{r}(t) = (4t^3 - 2t + 5)\hat{i} + \sin 2t\,\hat{j} + 3e^{2t}\hat{k}$

1.2 $\vec{r}(t) = \left\langle \sqrt{1-2t},\, 4t\cos t,\, (3t^2+2)^3 \right\rangle$

อนุพันธ์ของ Dot product และ Cross product ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

1. $(\vec{u}\cdot\vec{v})' = \vec{u}\cdot\vec{v}' + \vec{u}'\cdot\vec{v}$
2. $(\vec{u}\times\vec{v})' = \vec{u}\times\vec{v}' + \vec{u}'\times\vec{v}$

ตัวอย่าง 2 ให้ $\vec{u}(t) = \left\langle 2t,\, t^2,\, 0 \right\rangle$ และ $\vec{v}(t) = \left\langle \cos t,\, t,\, 1 \right\rangle$ จงแสดงว่า

2.1 $(\vec{u}\cdot\vec{v})' = \vec{u}\cdot\vec{v}' + \vec{u}'\cdot\vec{v}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.2 $(\vec{u}\times\vec{v})' = \vec{u}\times\vec{v}' + \vec{u}'\times\vec{v}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. ปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ถ้าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ มีปฏิยานุพันธ์คือ $\vec{R}(t)$ โดยที่ $\vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$ เราสามารถใช้สัญลักษณ์องอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $\vec{r}(t)$ ได้ดังเช่นฟังก์ชันค่าจริง คือ $\int \vec{r}(t)\,dt = \vec{R}(t) + \vec{c}$ เมื่อ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์คงที่ ดังนั้นถ้า $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ แล้ว

$$\int \vec{r}(t)\,dt = \int x(t)dt\,\hat{i} + \int y(t)dt\hat{j} + \int z(t)dt\hat{k} + \vec{c}$$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ต่อไปนี้

1.1 $\vec{r}(t) = 4t\,\hat{i} + 2\pi\sin 2\pi t\,\hat{j} + 9t^2\hat{k}$

1.2 $\vec{r}(t) = \left\langle 6,\, t\cos t,\, 6e^{3t} \right\rangle$