เอกสารประกอบการสอน
รายวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์พื้นฐานในชีวิตประจำวัน

สำคัญ ฮ่อบรรทัด

คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
2563

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

เนื้อหาประจำบท

1. ประพจน์
2. ตัวเชื่อมประพจน์
3. ตารางค่าความจริง
4. การสมมูล
5. การอ้างเหตุผล
6. ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ
7. การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. จำแนกได้ว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นประพจน์หรือไม่เป็นประพจน์
2. เปลี่ยนประโยคเปิดให้เป็นประพจน์ได้
3. เปลี่ยนประโยคทั่วไปให้เป็นประโยคตรรกวิทยาได้
4. อธิบายความแตกต่างระหว่างการให้เหตุผลแบบนิรนัยกับการให้เหตุผลแบบอุปนัยได้
5. ตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผลโดยใช้แผนภาพและตารางได้
6. บอกความหมายของการสมมูลของประพจน์
7. ตรวจสอบความเป็นสัจจนิรันดร์ได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมทั้งเปิดโอกาศให้ซักถาม
    1.1 ประพจน์
    1.2 ตัวเชื่อมประพจน์
    1.3 ตารางค่าความจริง
    1.4 การสมมูล
    1.5 การอ้างเหตุผล
    1.6 ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ
    1.7 การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
    2.1 ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์ เช่น อินเทอร์เนตเรื่องวิธีการเขียนเซต
    2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่างๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก การโต้ตอบและการซักถาม
2. แบบทดสอบ
3. ใบงานที่ให้ทำ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 2
ตรรกศาสตร์

คำว่า ตรรกศาสตร์ (Logic) ได้มาจากคำศัพท์ภาษาสันสกฤตสองศัพท์ คือ ตรรก และศาสตร์ คำว่าตรรก หมายถึง การตรึกตรอง ความคิด ความนึกคิด และคำว่า ศาสตฺร์ หมายถึง วิชา ตำรา เมื่อนำมารวมกันเป็น ตรรกศาสตร์ จึงหมายถึง วิชาว่าด้วยความนึกคิดอย่างเป็นระบบ ปราชญ์ทั่วไปจึงมีความเห็นร่วมกันว่า ตรรกศาสตร์ คือ วิชาว่าด้วย การใช้กฎเกณฑ์ การใช้เหตุผล ซึ่งเป็นวิชาพื้นฐานของวิชาทางด้านวิทยาศาสตร์เพราะต้องการความเป็นเหตุเป็นผลโดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งความเข้าใจในตรรกศาสตร์เบื้องต้นจะช่วยให้ศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ได้อย่างมีเหตุผล และเป็นพื้นฐานการเรียนคณิตศาสตร์ชั้นสูงต่อไป

2.1 ประพจน์(Proposition or Statement)

ประพจน์ คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น เช่น ข้าวเป็นอาหารหลักของคนไทย ประเทศไทยอยู่ในทวีปอเมริกา เป็นต้น ข้อความที่ไม่เป็นประพจน์ คือข้อความที่ไม่สามารถบอกค่าความจริงได้ เช่น ข้อความที่อยู่ในรูปประโยคคำถาม อ้อนวอน ขอร้อง คำสั่ง เช่น ได้โปรดเถิดที่รัก กรุณาอย่าส่งเสียงดัง จงนั่งลงเดี๋ยวนี้ เป็นต้น นอกจากนี้ ประพจน์แบ่งออกเป็นสองแบบ คือ ประพจน์เดี่ยว หมายถึง ประพจน์ที่ไม่มีตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์รวมอยู่ด้วย และประพจน์ผสม หมายถึง ประพจน์ที่ได้จากการนำประพจน์เดี่ยวตั้งแต่สองประพจน์ขึ้นไป มาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ สำหรับบทนี้ผู้เขียนขอใช้สัญลักษณ์แทนประพจน์ต่างๆ เป็นตัวอักษรตัวเล็ก เช่น p หรือ q โดยแต่ละประพจน์จะมีค่า ความจริงที่เป็นไปได้ 2 แบบเท่านั้น คือเป็น จริง (True: T) หรือเป็น เท็จ (False: F) แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \equiv T$ หมายถึงประพจน์ p มีค่าความจริงเป็นจริง นอกจากนี้ตั้งแต่นี้เป็นต้นไปหากพูดถึงประโยค ให้หมายถึงประโยคที่บอกค่าความจริงได้

2.2 ตัวเชื่อมประพจน์

ในชีวิตประจำวันรวมทั้งในวิชาคณิตศาสตร์ เรามักพบการเชื่อมประโยคด้วยตัวเชื่อมต่างๆ ไม่ว่าจะเป็น ตัวเชื่อมและ ตัวเชื่อมหรือ ตัวเชื่อมถ้า-แล้ว และตัวเชื่อมก็ต่อเมื่อ รวมถึงการเติมคำว่า ไม่ ด้านหน้าประโยค ซึ่งการเชื่อมแต่ละแบบ ส่งผลต่อค่าความจริงของประโยคผสม ซึ่งแบ่งตัวเชื่อมเป็น 4 ตัวเชื่อม และ 1 ตัวดำเนินการ ดังนี้

2.2.1 ตัวเชื่อม และ

สำหรับประพจน์ p และ q ใดๆ สามารถนำมาเขียนเป็นประพจน์ผสมโดยใช้ตัวเชื่อม และ แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$ ให้ค่าความจริงในกรณีต่างๆ ดังตาราง โดยจะเห็นว่ามีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นที่จะทำให้ประโยคเป็นจริง คือทั้งสองประพจน์เดี่ยวต้องเป็นจริงทั้งคู่

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

2.2.2 ตัวเชื่อม หรือ

สำหรับประพจน์ p และ q ใดๆ สามารถนำมาเขียนเป็นประพจน์ผสมโดยใช้ตัวเชื่อม หรือ แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$ ให้ค่าความจริงในกรณีต่างๆ ดังตาราง โดยจะเห็นว่ามีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นที่จะทำให้ประโยคเป็นเท็จ คือทั้งสองประพจน์เดี่ยวต้องเป็นเท็จทั้งคู่

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

2.2.3 ตัวเชื่อม ถ้า-แล้ว

สำหรับประพจน์ p และ q ใดๆ สามารถนำมาเขียนเป็นประพจน์ผสมโดยใช้ตัวเชื่อม ถ้า-แล้ว แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \rightarrow q$ ให้ค่าความจริงในกรณีต่างๆ ดังตาราง โดยจะเห็นว่ามีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นที่จะทำให้ประโยคเป็นเท็จ คือประพจน์หน้าต้องเป็นจริงและประพจน์หลังเป็นเท็จ

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

2.2.4 ตัวเชื่อม ก็ต่อเมื่อ

สำหรับประพจน์ p และ q ใดๆ สามารถเขียนเป็นประพจน์ผสมโดยใช้ตัวเชื่อม ก็ต่อเมื่อ แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \leftrightarrow q$ ให้ค่าความจริงในกรณีต่างๆ ดังตาราง โดยจะเห็นว่าหากทั้งสองประพจน์มีค่าความจริงเหมือนกันจะให้ค่าความจริงเป็นจริง แต่ถ้าทั้งสองประพจน์มีค่าความจริงต่างกันจะให้ค่าความจริงเป็นเท็จ

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

2.2.5 นิเสธ

สำหรับประพจน์ p ใดๆ สามารถนำมาเขียน นิเสธ ไว้หน้าประพจน์ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim p$ ให้ค่าความจริงตรงข้ามกับ p ดังตาราง

p	$\sim p$
T	F
F	T

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง r เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $[(p \wedge r) \vee q] \rightarrow r$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
[(p \wedge r) \vee q] \rightarrow r &\equiv [(T \wedge F) \vee T] \rightarrow F \\
&\equiv (F \vee T) \rightarrow F \\
&\equiv T \rightarrow F \\
&\equiv F
\end{aligned}$$

ดังนั้น $[(p \wedge r) \vee q] \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง r และ s เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $[(p \leftrightarrow r) \vee s] \rightarrow [(r \wedge q) \rightarrow s]$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
[(p \leftrightarrow r) \vee s] \rightarrow [(r \wedge q) \rightarrow s] &\equiv [(T \leftrightarrow F) \vee F] \rightarrow [(F \wedge T) \rightarrow F] \\
&\equiv (F \vee F) \rightarrow (F \rightarrow F) \\
&\equiv F \rightarrow T \\
&\equiv T
\end{aligned}$$

ดังนั้น $[(p \leftrightarrow r) \vee s] \rightarrow [(r \wedge q) \rightarrow s]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ ถ้าประพจน์ $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จแล้วจงหาค่าความจริงของประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $p \wedge \sim q$ 2. $p \vee \sim q$ 3. $(p \wedge q) \rightarrow r$ 4. $q \rightarrow (p \wedge r)$

วิธีทำ จากแนวคิด $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แสดงว่า $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง ......(1)

และ $p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ......(2)

จาก (2) สรุปได้ว่า p กับ q มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

นั่นคือ ค่าความจริงของ p, q ที่เป็นไปได้มีดังนี้

กรณีที่ 1 $p \equiv T, q \equiv F$

กรณีที่ 2 $p \equiv F, q \equiv T$

แต่ค่าความจริงของ p, q ในกรณีที่ 1 ขัดแย้งกับ (1)

ดังนั้น กรณีที่ 1 จึงใช้ไม่ได้ สรุปค่าความจริงของ p, q เป็นไปตามกรณีที่ 2 คือ

$p \equiv F, q \equiv T$ พิจารณาแต่ละข้อ ดังนี้

ข้อที่ 1 $p \wedge \sim q \equiv F \vee \sim T \equiv F$

ข้อที่ 2 $p \vee \sim q \equiv F \vee \sim T \equiv F \vee F \equiv F$

ข้อที่ 3 $(p \wedge q) \to r \equiv (F \wedge T) \to r \equiv F \to r \equiv T$

ข้อที่ 4 $q \to (p \wedge r) \equiv T \to (F \wedge r) \equiv T \to F \equiv F$

ตัวอย่างที่ 2.4 ให้ p, q, r, x และ y เป็นประพจน์ ซึ่ง $p \to (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ $(x \vee y) \leftrightarrow (\sim q \vee \sim r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์แต่ละข้อต่อไปนี้

1. $(p \wedge r) \leftrightarrow (y \vee q)$
2. $(x \wedge y) \to (p \wedge q)$
3. $x \leftrightarrow (q \wedge r)$
4. $(q \vee r) \to ((x \wedge y) \to p)$

วิธีทำ จากที่กำหนดให้ $p \to (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

จะได้ p มีค่าความจริงเป็นจริง

และได้ $(q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ทำให้ $\sim (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

เนื่องจาก $\sim (q \wedge r)$ สมมูลกับ $\sim q \vee \sim r$

จึงได้ $\sim q \vee \sim r$ มีค่าความจริงเป็นจริง

และจากที่กำหนดให้ $(x \vee y) \leftrightarrow (\sim q \vee \sim r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ทำให้ได้ว่า $x \vee y$ มีค่าความจริงเป็นจริง

สรุปค่าความจริงของแต่ละประพจน์ที่หาได้ดังนี้ $p, x \vee y, q \wedge r$ มีค่าความจริงเป็นจริง , จริง , เท็จ ตามลำดับ

พิจารณาค่าความจริงของประพจน์ในตัวเลือกแต่ละข้อ ดังนี้

ข้อ 1 $(p \wedge r) \to (y \vee q)$

T

พบว่าไม่สามารถสรุปค่าความจริงของ$(p \wedge r) \to (y \vee q)$ ได้

ข้อ 2 $(x \wedge y) \to (p \wedge q)$

T

พบว่าไม่สามารถสรุปค่าความจริงของ $(x \wedge y) \to (p \wedge q)$ ได้

ข้อ 3 $x \leftrightarrow (q \wedge r)$

F

พบว่าไม่สามารถสรุปค่าความจริงของ $x \leftrightarrow (q \wedge r)$ ได้

ข้อ 4 $(q \vee r) \to ((x \wedge y) \to p)$ พบว่า $(q \vee r) \to ((x \wedge y) \to p)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนดให้ ประพจน์ $(\sim p \leftrightarrow \sim r) \vee (p \leftrightarrow q)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\sim p \rightarrow (q \vee r)$ 2. $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$ 3. $p \vee q \vee \sim r$ 4. $p \wedge q \wedge \sim r$

วิธีทำ จาก $(\sim p \leftrightarrow \sim r) \vee (p \leftrightarrow q)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แสดงว่า $\sim p \leftrightarrow \sim r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ....(1)

และ $p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ....(2)

จาก (1) สรุปได้ว่า $\sim p$ กับ $\sim r$ มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

นั้นคือ p กับ r มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

จาก (2) สรุปได้ว่า p กับ q มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

ดังนั้น ค่าความจริงของ p, q, r ที่เป็นไปได้มีดังนี้

กรณีที่ 1 $p \equiv T, q \equiv F, r \equiv F$

กรณีที่ 2 $p \equiv F, q \equiv T, r \equiv T$

พิจารณาตัวเลือกแต่ละข้อดังนี้

ข้อ 1 แทนค่าความจริงในกรณีที่ 1 จะได้

$\sim p \rightarrow (q \vee r)$

ข้อ 2 แทนค่าความจริงในกรณีที่ 1 จะได้

$\sim p \rightarrow (q \wedge r)$

ข้อ 3 แทนค่าความจริงในกรณีที่ 1 จะได้

$p \vee (q \vee \sim r)$

ข้อ 4 แทนค่าความจริงในกรณีที่ 1 จะได้

กรณีที่ 1 กรณีที่ 2

$p \wedge (q \wedge \sim r)$ $p \wedge (q \wedge \sim r)$

ตัวอย่างที่ 2.6 กำหนดให้ $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $p \vee \sim q$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อใดบ้างกล่าวถูกต้อง

วิธีทำ จาก $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แสดงว่า $\sim p \rightarrow q$ กับ q มีค่าความจริงตรงกันข้าม

และจาก $\sim p \rightarrow q \equiv \sim (\sim p) \vee q \equiv p \vee q$

นั้นคือ $p \vee q$ กับ q มีค่าความจริงตรงกันข้าม ซึ่งแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นจริง

q มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ทำให้ p มีค่าความจริงเป็นจริง

กรณีที่ 2 $p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

q มีค่าความจริงเป็นจริง

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะเมื่อ $p \vee q$ เป็นเท็จ

จะทำให้ p กับ q มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่

พิจารณาข้อ ก

$$p \wedge \sim p \equiv T \wedge \sim F \equiv T \wedge T \equiv T \therefore \text{ก ถูก}$$

พิจารณาข้อ ข

$$p \to q \equiv T \to F \equiv F \therefore \text{ข ถูก}$$

2.3 ตารางค่าความจริง

ตารางค่าความจริงเป็นตารางที่แสดงค่าความจริงทุกกรณีที่เป็นไปได้ในการเชื่อมประพจน์ จำนวนกรณีที่พิจารณาขึ้นอยู่กับจำนวนประพจน์ ถ้าประพจน์ผสมมีประพจน์เดี่ยว n ประพจน์ จำนวนกรณีที่พิจารณามี 2^n กรณี เราสามารถเขียนตารางค่าความจริงได้หลากหลายรูปแบบ แต่ต้องมีครบทุกกรณีไม่ว่าจะเรียงกรณีไหนขึ้นก่อนก็ตาม อย่างไรก็ตามมีวิธีการเขียนตารางค่าความจริงให้ครบทุกกรณีแบบง่ายๆ เช่น ถ้าประพจน์ผสมมีประพจน์เดี่ยว 2 ประพจน์คือ p และ q มีกรณีที่ต้องพิจารณาทั้งหมด $2^2 = 4$ กรณี สามารถเขียนกรณีให้ครบได้ดังนี้

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

จากตารางพบว่าในคอลัมน์แรกของตาราง ครึ่งหนึ่งเราแบ่งเป็นจริงและอีกครึ่งหนึ่งเป็นเท็จ ส่วนในคอลัมน์ที่สองเราแบ่งครึ่งหนึ่งของคอลัมภ์แรกทำแบบนี้ต่อไปเรื่อยๆไม่ว่าจะมีกี่ประพจน์เดี่ยวก็ตาม ซึ่งตารางต่อไปจะทำกรณีประพจน์ผสมที่มีประพจน์เดี่ยว 3 ประพจน์คือ p q และ r มีกรณีที่ต้องพิจารณาทั้งหมด $2^3 = 8$ กรณี ดังนี้

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

ตัวอย่างที่ 2.7 จงสร้างตารางค่าความจริงของ $[(p \wedge r) \vee q] \rightarrow r$

วิธีทำ

p	q	r	$p \wedge r$	$(p \wedge r) \vee q$	$[(p \wedge r) \vee q] \rightarrow r$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

จากการสร้างตารางค่าความจริงทำให้เราสังเกตุเห็นว่าในบางครั้ง ประพจน์สองประพจน์ใดๆ ให้ค่าความจริงที่เหมือนกันแบบกรณีต่อกรณี เช่น กรณีของประพจน์ $p \rightarrow q$ กับประพจน์ $\sim p \vee q$ ดังตาราง

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

จากตาราง จะเห็นว่าสองคอลัมภ์สุดท้ายให้ค่าความจริงเหมือนกันแบบกรณีต่อกรณี หากเป็นแบบนี้เราจะกล่าวว่าประพจน์ $p \to q$ กับประพจน์ $\sim p \vee q$ สมมูลกันแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \to q \equiv \sim p \vee q$ หากเราสังเกตต่อไปอีก จะพบว่า ถ้านำประพจน์ทั้งสองนี้มาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม ก็ต่อเมื่อ จะทำให้เป็นจริงทุกกรณี ดังตัวอย่างถัดไป

ตัวอย่างที่ 2.8 จงสร้างตารางค่าความจริงของ $[\sim (p \wedge r) \vee q] \leftrightarrow [(p \wedge r) \to q]$

วิธีทำ

p	q	r	$p \wedge r$	$\sim (p \wedge r)$	$\sim (p \wedge r) \vee q$ (1)	$(p \wedge r) \to q$ (2)	$(1) \leftrightarrow (2)$
T	T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่าคอลัมน์สุดท้ายของตารางมีค่าความจริงเป็นจริงทั้งหมด เราเรียกประพจน์ที่ให้ค่าความจริงเป็นจริงทั้งหมดนี้ว่า สัจจนิรันดร์ หมายความว่าหากเราต้องการแสดงว่าประพจน์ใดเป็นสัจจนิรันดร์นั้น ต้องสร้างตารางค่าความจริงแล้วพิจารณาว่าเป็นจริงทุกกรณีหรือไม่ แต่ความเป็นจริงแล้ว ยังมีวิธีอื่นที่ช่วยตรวจสอบการเป็นสัจจนิรันดร์อีก โดยการสมมติว่าประพจน์ที่กำหนดให้เป็นเท็จแล้วหาข้อขัดแย้ง หากขัดแย้งจะสรุปได้ว่า ประพจน์ที่กำหนดให้นั้นเป็นสัจจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 2.9 จงแสดงว่า $(p \wedge \sim q) \to \sim (p \to q)$ เป็นสัจจนิรันดร์

วิธีที่ 1 สมมติว่า $(p \wedge \sim q) \to \sim (p \to q)$ เป็นเท็จ เนื่องจากเป็นตัวเชื่อม ถ้า-แล้ว จึงเป็นเท็จได้กรณีเดียวคือ $p \wedge \sim q$ เป็นจริง และ $\sim (p \to q)$ เป็นเท็จ

จาก	$p \wedge \sim q$	เป็นจริง	
จะได้ว่า	p	เป็นจริง	(1)
	$\sim q$	เป็นจริง	
นั่นคือ	q	เป็นเท็จ	(2)
จาก	$\sim (p \to q)$	เป็นเท็จ	
จะได้ว่า	$p \to q$	เป็นจริง	(3)

เมื่อพิจารณาพบว่า (3) ขัดแย้งกับ (1) และ (2) ดังนั้นประพจน์ $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)$ เป็นสัจจนิรันดร์

วิธีที่ 2 สร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)$ ได้ดังนี้

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim (p \rightarrow q)$	$(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T

ดังนั้นประพจน์ $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)$ เป็นสัจจนิรันดร์

2.4 การสมมูล

จากหัวข้อที่ผ่านมาจะเห็นว่ามีประพจน์บางคู่ เมื่อนำมาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม ก็ต่อเมื่อ ประพจน์ผสมที่ได้จะเป็นสัจจนิรันดร์ เรากล่าวว่าทั้งสองประพจน์สมมูลกัน

บทนิยาม 2.4.1
ประพจน์ p และ q จะสมมูลกัน ก็ต่อเมื่อ ประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี แบบกรณีต่อกรณี เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \equiv q$

จากตารางค่าความจริงเราสามารถพิจารณาการสมมูลได้ดังนี้

$$\begin{aligned} T \wedge p &\equiv p \\ F \wedge p &\equiv F \\ p \wedge p &\equiv p \\ p \wedge \sim p &\equiv F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \vee p &\equiv T \\ F \vee p &\equiv p \\ p \vee p &\equiv p \\ p \vee \sim p &\equiv T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \rightarrow p &\equiv p \\ F \rightarrow p &\equiv T \\ p \rightarrow T &\equiv T \\ p \rightarrow F &\equiv \sim p \\ p \rightarrow p &\equiv T \\ p \rightarrow \sim p &\equiv \sim p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \leftrightarrow p &\equiv p \\ F \leftrightarrow p &\equiv \sim p \\ p \leftrightarrow p &\equiv T \\ p \leftrightarrow \sim p &\equiv F \end{aligned}$$

กฎการสมมูลกันเชิงตรรกศาสตร์
กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใดๆ
กฎนิเสธซ้อน (Double negation)

1. $\sim\sim p \equiv p$

กฎการสลับที่ (Commutative Laws)

1. $p \vee q \equiv q \vee p$

2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$

3. $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative Laws)

1. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

2. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

กฎการแจกแจง (Distributive Laws)

1. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

2. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

กฎการนิจพล (Idempotent Laws)

1. $p \vee p \equiv p$

2. $p \wedge p \equiv p$

กฎเอกลักษณ์ (Identity Laws)

1. $p \vee F \equiv p$

2. $p \vee T \equiv T$

3. $p \wedge F \equiv F$

4. $p \wedge T \equiv p$

กฎของเดอร์มอร์แกน (De Morgan's Laws)

1. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

2. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

กฎแย้งสลับที่ (Contrapositive)

1. $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

กฎนิเสธ (Implication)

1. $p \to q \equiv \sim p \vee q$
2. $\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

กฎการสมมูล (Equivalence)

1. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

ตัวอย่างที่ 2.10 ถ้า p และ q เป็นประพจน์แล้ว ประพจน์ $p \to \sim (q \to p)$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$ 2. $\sim p \vee (p \vee q)$ 3. $p \to (\sim p \vee q)$ 4. $p \to \sim (p \wedge q)$

วิธีทำ $p \to \sim (q \to p)$ $\equiv \sim p \vee \sim (q \to p)$

$\equiv \sim p \vee \sim (\sim q \vee p)$

$\equiv \sim p \vee [\sim (\sim q) \wedge \sim p]$

$\equiv \sim p \vee (q \wedge \sim p)$

$\equiv \sim p \vee (\sim p \wedge q)$

ตัวอย่างที่ 2.11 กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ แล้วประพจน์ $\sim [(p \wedge q) \to (\sim q \vee r)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $p \wedge \sim (q \to r)$ 2. $\sim q \vee (\sim p \wedge r)$

3. $\sim (p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$ 4. $\sim (p \wedge q) \to (q \wedge \sim r)$

วิธีทำ $\sim [(p \wedge q) \to (\sim q \vee r)]$ $\equiv (p \wedge q) \wedge \sim (\sim q \vee r)$

$\equiv (p \wedge q) \wedge [\sim (\sim q) \wedge \sim r]$

$\equiv (p \wedge q) \wedge (q \wedge \sim r)$

$\equiv p \wedge (q \wedge q) \wedge \sim r$

$\equiv p \wedge (q \wedge \sim r)$ $(\because q \wedge q \equiv q)$

$\equiv p \wedge \sim (q \to r)$

ตัวอย่างที่ 2.12 ข้อใดไม่สมมูลกับประพจน์ $p \to (q \vee r)$

1. $(\sim q \wedge \sim r) \to \sim p$
2. $(p \wedge \sim q) \to r$
3. $(p \wedge \sim r) \to q$
4. $\sim p \to (\sim q \wedge \sim r)$

วิธีทำ พิจารณาตัวเลือกแต่ละข้อ ดังนี้

ข้อ 1 $(\sim q \wedge \sim r) \to \sim p \equiv \sim (q \vee r) \to \sim p$

$\equiv p \to (q \vee r)$

ข้อ 2 $(p \wedge \sim q) \to r \equiv \sim (p \wedge \sim q) \vee r$

$\equiv [\sim p \vee \sim (\sim q)] \vee r$

$\equiv \sim p \vee (q \vee r)$

$\equiv q \to (q \vee r)$

ข้อ 3 $(p \wedge \sim r) \to q \equiv \sim (p \wedge \sim r) \vee q$

$\equiv [\sim p \vee \sim (\sim r) \vee q] \vee q$

$\equiv \sim p \vee (r \vee q)$

$\equiv p \to (q \vee r)$

ข้อ 4 $\sim p \to (\sim q \wedge \sim r) \equiv \sim p \to \sim (q \vee r)$

$\equiv (q \vee r) \to p$

$\not\equiv p \to (q \vee r)$

ตัวอย่างที่ 2.13 จงแสดงว่าประพจน์ $\sim p \to (q \to (r \vee p))$ สมมูลกับประพจน์ $p \vee (\sim q) \vee r$

วิธีทำ $\sim p \to (q \to (r \vee p)) \equiv \sim (\sim p) \vee (q \to (r \vee p))$

$\equiv p \vee (\sim q \vee (r \vee p))$

$\equiv (p \vee p) \vee (\sim q \vee r)$

$\equiv p \vee (\sim q) \vee r$

ตัวอย่างที่ 2.14 จงแสดงว่าประพจน์ $(p \to r) \wedge (q \to r)$ สมมูลกับประพจน์ $\sim (p \wedge q) \vee r$

วิธีทำ $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (\sim p \to r) \wedge (\sim q \to r)$

$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee r$

$\equiv \sim (p \wedge q) \vee r$

ตัวอย่างที่ 2.15 จงแสดงว่านิเสธของประพจน์ $(p \to \sim q) \wedge (\sim r \to s)$ คือ $[\sim (p \wedge q) \to \sim r] \wedge [\sim (p \wedge q) \to \sim s]$

วิธีทำ นิเสธของประพจน์ $(p \to \sim q) \wedge (\sim r \to s)$ คือ

$$\begin{aligned} \sim [(p \to \sim q) \wedge (\sim r \to s)] &\equiv \sim (p \to \sim q) \vee \sim (\sim r \to s) \\ &\equiv [p \wedge \sim (\sim q)] \vee (\sim r \wedge \sim s) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim s) \\ &\equiv [(p \wedge q) \vee \sim r] \wedge [(p \wedge q) \vee \sim s] \\ &\equiv [\sim (p \wedge q) \to \sim r] \wedge [\sim (p \wedge q) \to \sim s] \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.16 ให้ p, q และ r เป็นประพจน์

ก. ถ้า p มีค่าความจริงเป็นจริง และ $\sim q \to (\sim p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์ แล้ว จงหาค่าความจริงของ q

ข. ถ้า $(p \to q) \to \sim (r \vee q)$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว จงหาค่าความจริงของ q

วิธีทำ ข้อ ก. จากที่กำหนดให้ p มีค่าความจริงเป็นจริง

และ
$$\begin{aligned} \sim p \to (\sim p \vee q) &\equiv \sim (\sim q) \vee (\sim p \vee q) \\ &\equiv q \vee (\sim p \vee q) \\ &\equiv q \vee \sim p \\ &\equiv q \vee \sim T \\ &\equiv q \vee F \\ &\equiv q \end{aligned}$$

ซึ่ง $\sim p \to (\sim p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์ นั่นคือ q ต้องเป็นสัจนิรันดร์ด้วย

ดังนั้น q มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อ ข. เพราะว่า
$$\begin{aligned} (p \to q) \to \sim (r \vee q) &\equiv \sim (p \to q) \vee \sim (r \vee q) \\ &\equiv \sim (\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim q) \\ &\equiv (\sim (\sim p \wedge \sim q)) \vee (\sim r \wedge \sim q) \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge \sim q) \\ &\equiv (p \vee \sim r) \wedge \sim q \end{aligned}$$

จากที่กำหนด $(p \to q) \to \sim (r \vee q)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

นั่นคือ $(p \vee \sim r) \wedge \sim p$ ต้องมีค่าความจริงเป็นจริงด้วย

แสดงว่า $p \vee \sim r$ กับ $\sim q$ ต้องมีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่

สรุปได้ว่า q มีค่าความจริงเป็นเท็จเสมอ

2.5 การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล คือการกล่าวถึงข้อความที่มีเหตุเป็นข้อความ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ชุดหนึ่ง แล้วต้องการสรุปผลเป็นข้อความ q โดยพิจารณาข้อความที่กำหนดให้ว่ามีความสมเหตุสมผลหรือไม่ การอ้างเหตุผลมีทั้งแบบที่ สมเหตุสมผล (valid) และ ไม่สมเหตุสมผล (invalid) ซึ่งเราสามารถตรวจสอบความสมเหตุสมผลได้ คือ

2.5.1 วิธีตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยใช้สัจนิรันดร์

การอ้างเหตุผลจะสมเหตุสมผล ก็ต่อเมื่อ ประโยค $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$ เป็นสัจนิรันดร์ ซึ่งในหัวข้อการตรวจสอบสัจนิรันดร์ที่ผ่านมา ผู้เขียนใช้วิธีตรวจสอบ 2 วิธี คือ การสร้างตารางค่าความจริง และ การแสดงโดยใช้วิธีขัดแย้ง หากจะใช้การสร้างตารางค่าความจริงเพื่อตรวจสอบก็สามารถนำ $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$ ไปเขียนตารางค่าความจริงได้เลย ถ้าผลออกมาเป็นสัจนิรันดร์ก็จะสามารถสรุปได้ว่าข้อความที่กำหนดให้มีความสมเหตุสมผล แต่ถ้าค่าความจริงที่ปรากฏไม่เป็นจริงทุกกรณีแสดงว่าข้อความที่กำหนดให้นั้น ไม่สมเหตุสมผล ซึ่งวิธีนี้ง่ายต่อการตรวจสอบถ้าจำนวนประพจน์มีจำนวนไม่มาก ในทำนองเดียวกันมีข้อเสียที่สำคัญ คือ ต้องใช้เวลาในการตรวจสอบมากเมื่อจำนวนประพจน์มาก ยิ่งจำนวนประพจน์มากเท่าไรจำนวนกรณีก็มากตามไปด้วย

ตัวอย่างที่ 2.17 การอ้างเหตุผลนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ	(1)	$p \to q$
	(2)	$q \to s$
	(3)	$\sim s$
ผล		$\sim p$

วิธีทำ จากการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ จะต้องแสดงว่า $[(p \to q) \wedge (q \to s) \wedge \sim s] \to \sim p$ เป็นสัจจนิรันดร์

p	q	s	$\sim p$	$\sim s$ (1)	$p \to q$ (2)	$q \to s$ (3)	$(1) \wedge (2) \wedge (3)$	$[(1) \wedge (2) \wedge (3)] \to \sim p$
T	T	T	F	F	T	T	F	T
T	T	F	F	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

จากตารางค่าความจริงจะเห็นว่า $[(p \to q) \wedge (q \to s) \wedge \sim s] \to \sim p$ เป็นสัจจนิรันดร์ นั่นคือ การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล ในทางกลับกันหากมีเพียงกรณีใดกรณีหนึ่งในตารางมีค่าความจริงเป็นเท็จ จะส่งผลให้การอ้างเหตุผลไม่สมเหตุสมผล

จากตัวอย่างที่ผ่านมาทำให้เราทราบว่าเราสามารถตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยใช้ตารางค่าความจริงได้ นอกจากนี้เรายังมีอีก 1 วิธีในการตรวจสอบสัจนิรันดร์ นั่นคือ สมมติว่า $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$ เป็นเท็จ แล้วหาข้อขัดแย้ง จากที่สมมติว่าทั้งข้อความเป็นเท็จเราจะได้ว่า $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ เป็นจริง และ q เป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 2.18 การอ้างเหตุผลนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ	(1)	$p \to q$
	(2)	$q \to s$
	(3)	$\sim s$
ผล		$\sim p$

วิธีทำ สมมติว่า เหตุเป็นจริงและผลเป็นเท็จ ดังนี้

เหตุ	(1)	$p \to q$	T
	(2)	$q \to s$	T
	(3)	$\sim s$	T
ผล		$\sim p$	F

จากเหตุข้อ (3)	$\sim s$	เป็นจริง	
จะได้ว่า	s	เป็นเท็จ	$(*)$
จากเหตุข้อ (2) และ $(*)$ จะได้ว่า	q	เป็นเท็จ	$(**)$
จากเหตุข้อ (1) และ $(**)$ จะได้ว่า	p	เป็นเท็จ	$(***)$
จากผล	$\sim p$	เป็นเท็จ	
จะได้ว่า	p	เป็นจริง	$(****)$

จะเห็นว่า $(***)$ และ $(****)$ ขัดแย้งกัน จึงกล่าวได้ว่าประพจน์ที่พิจารณาเป็นสัจนิรันดร์ นั่นคือ การอ้างเหตุผลนี้ สมเหตุสมผล

2.5.2 การพิสูจน์ความสมเหตุสมผล

จากหัวข้อที่ผ่านมาทำให้เรารู้ถึงวิธีการตรวจสอบความสมเหตุสมผล นอกเหนือจากการตรวจสอบแล้วเรายังมีวิธีการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลด้วย โดยใช้การสมมูลและกฎเกณฑ์ต่างๆ ดังนี้

1. กฎ Modus Ponens (MP.)

เหตุ	(1)	$p \to q$
	(2)	p
ผล		q

2. กฎ Modus Tollens (MT.)

เหตุ	(1)	$p \to q$
	(2)	$\sim q$
ผล		$\sim p$

3. กฎ Conjunction (Conj.)

เหตุ	(1)	p
	(2)	q
ผล		$p \wedge q$

4. กฎ Simplification (sim.)

เหตุ	(1)	$p \wedge q$
ผล		p

5. กฎ Addition (Add.)

เหตุ	(1)	p
ผล		$p \vee q$

6. กฎ Disjunctive Syllogism (DS.)

เหตุ	(1)	$p \vee q$
	(2)	$\sim p$
ผล		q

ตัวอย่างที่ 2.19 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

เหตุ	(1)	$p \to q$
	(2)	$q \to s$
	(3)	$\sim s$
ผล		$\sim p$

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

	(1)	$p \to q$	เหตุ
	(2)	$q \to s$	เหตุ
	(3)	$\sim s$	เหตุ
	(4)	$\sim q$	ข้อ(2) ข้อ(3) และกฎ MT.
ผล	(5)	$\sim p$	ข้อ(1) ข้อ(4) และกฎ MT.

ตัวอย่างที่ 2.20 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

เหตุ	(1)	$(\sim p \vee q) \to r$
	(2)	$r \to s$
	(3)	$\sim s$
ผล		$p \vee w$

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

	(1)	$(\sim p \vee q) \rightarrow r$	เหตุ
	(2)	$r \rightarrow s$	เหตุ
	(3)	$\sim s$	เหตุ
	(4)	$\sim r$	ข้อ(2) ข้อ(3) และกฎ MT.
	(5)	$\sim (\sim p \vee q)$	ข้อ(1) ข้อ(4) และกฎ MT.
	(6)	$(p \wedge \sim q)$	ข้อ(5) และ การสมมูล
	(7)	p	ข้อ(6) และ กฎ Sim.
ผล	(8)	$p \vee w$	ข้อ(7) และ กฎ Add.

ตัวอย่างที่ 2.21 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

เหตุ	(1)	$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge \sim s)$
	(2)	$\sim r \vee s$
	(3)	$s \vee q \rightarrow p$
ผล		$\sim p$

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

	(1)	$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge \sim s)$	เหตุ
	(2)	$\sim r \vee s$	เหตุ
	(3)	$s \vee q \rightarrow p$	เหตุ
	(4)	$\sim (r \wedge \sim s)$	ข้อ(2) และการสมมูล
	(5)	$\sim (p \vee q)$	ข้อ(1) ข้อ(4) และกฎ MT.
	(6)	$\sim p \wedge \sim q$	ข้อ(5) และ การสมมูล
ผล	(7)	$\sim p$	ข้อ(6) และ กฎ Sim.

ตัวอย่างที่ 2.22 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

เหตุ	(1)	$(p \wedge \sim q) \rightarrow r$
	(2)	$s \rightarrow p$
	(3)	$q \rightarrow \sim u$
	(4)	$u \wedge s$
ผล		r

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

	(1)	$(p\wedge \sim q) \to r$	เหตุ
	(2)	$s \to p$	เหตุ
	(3)	$q \to \sim u$	เหตุ
	(4)	$u \wedge s$	เหตุ
	(5)	u	ข้อ(4) และกฎ Sim.
	(6)	s	ข้อ(4) และกฎ Sim.
	(7)	$\sim q$	ข้อ(3) ข้อ(5) และกฎ MT.
	(8)	p	ข้อ(2) ข้อ(6) และกฎ MP.
	(9)	$p\wedge \sim q$	ข้อ(7) ข้อ(8) และการสมมูล
ผล	(10)	r	ข้อ(1) ข้อ(9) และ กฎ MP.

ตัวอย่างที่ 2.23 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

เหตุ	(1)	$p \to q$
	(2)	$r \to q$
ผล		$(p \vee r) \to q$

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

	(1)	$p \to q$	เหตุ
	(2)	$r \to q$	เหตุ
	(3)	$\sim p \vee q$	ข้อ(1) และการสมมูล
	(4)	$\sim r \vee q$	ข้อ(2) และการสมมูล
	(5)	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim r \vee q)$	ข้อ(3) ข้อ(4) และประโยครวม
	(6)	$(\sim p\wedge \sim r) \vee q$	ข้อ(5) และการสมมูล
	(7)	$\sim (p \vee r) \vee q$	ข้อ(6) และการสมมูล
ผล	(8)	$(p \vee r) \to q$	ข้อ(7) และการสมมูล

ตัวอย่างที่ 2.24 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

เหตุ	(1)	$(p \vee r) \to q$
	(2)	$s \to p$
	(3)	$s \wedge w$
ผล		q

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

	(1)	$(p \vee r) \to q$	เหตุ
	(2)	$s \to p$	เหตุ
	(3)	$s \wedge w$	เหตุ
	(4)	s	ข้อ(3) และกฎ Sim.
	(5)	p	ข้อ(2) ข้อ(4) และกฎ MP.
	(6)	$p \vee r$	ข้อ(5) และกฎ Add.
ผล	(7)	q	ข้อ(1) ข้อ(6) และกฎ MP.

ตัวอย่างที่ 2.25 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ สมเหตุสมผล

เหตุ	(1)	$\sim p \to (q \wedge r)$
	(2)	$\sim p \wedge s$
ผล		$r \vee w$

วิธีทำ เริ่มจากการเขียนเหตุให้ครบ แล้วใช้กฎกับการสมมูลนำไปสู่ผลให้ได้

	(1)	$\sim p \to (q \wedge r)$	เหตุ
	(2)	$\sim p \wedge s$	เหตุ
	(3)	$\sim p$	ข้อ(2) และกฎ Sim.
	(4)	$q \wedge r$	ข้อ(1) ข้อ(3) และกฎ MP.
	(5)	r	ข้อ(4) และกฎ Sim.
ผล	(6)	$r \vee w$	ข้อ(5) และกฎ Add.

2.6 ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ

ประโยค $x + 2 = 5$ ไม่ใช่ประพจน์ เนื่องจากยังไม่ทราบแน่ชัดว่ามีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ค่าความจริงจะขึ้นอยู่กับค่าของ x ว่าเป็นจำนวนใด เช่น ถ้า x เป็น 3 ประโยคนี้จะเป็นจริง แต่

ถ้า x เป็น 2 ประโยคนี้จะเป็นเท็จ เราเรียก ประโยคแบบนี้ว่า ประโยคเปิด (Open Sentence) ผู้เขียนจะใช้สัญลักษณ์ $P(x), Q(x), R(x)$ แทนประโยคเปิดใดๆ ที่ติดค่าตัวแปร x ซึ่งประโยคเปิดเหล่านี้สามารถใช้ตัวเชื่อมได้เช่นเดียวกับประพจน์ p, q, r ทั่วๆ ไป

ตัวบ่งปริมาณ (Quantifier) คือข้อความที่ใช้บ่งบอกความมากน้อยของค่าตัวแปร x มี 2 แบบ ได้แก่ สำหรับ x ทุกตัว (For All x; $\forall x$) และ สำหรับ x บางตัว (For Some x; $\exists x$) ซึ่งตัวบ่งปริมาณทั้งสองนี้เมื่อใช้ร่วมกับเอกภพสัมพัทธ์แล้ว จะทำให้ประโยคเปิดกลายเป็นประพจน์ (คือมีค่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ) ได้ เช่น ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด x มากกว่า 2 จะได้ว่า $\forall x[P(x)]$ แทนประโยค สำหรับ x ทุกตัว x มากกว่า 2 ถ้า $U = \{3, 4\}$ จะได้ว่า $\forall x[P(x)]$ เป็นจริง แต่ถ้า $U = \{1, 2\}$ จะได้ว่า $\forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ

ข้อสังเกต

1. หากไม่มีการระบุเอกภพสัมพัทธ์ ให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์คือเซตจำนวนจริง $\mathbb{R}$

2. สามารถแจกแจงตัวบ่งปริมาณได้เพียงสองรูปแบบนี้เท่านั้น คือ

$$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)]$$
$$\exists x[P(x) \vee Q(x)] \equiv \exists x[P(x)] \vee \exists x[Q(x)]$$

ประโยคเปิดที่มีสองตัวแปร เมื่อใช้ตัวบ่งปริมาณก็จะมีสองตัวเช่นกัน และการอ่านต้องคำนึงถึงลำดับก่อนหลัง เช่นให้ $Q(x, y)$ แทนประโยคเปิด $x+y$ เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $\forall x \exists y[Q(x, y)]$ แทนประโยค สำหรับ x ทุกตัว จะมี y บางตัวที่ทำให้ $x + y$ เป็นจำนวนเฉพาะ ส่วน $\exists x \forall y[Q(x, y)]$ แทนประโยค มี x บางตัว ที่ทำให้ $x + y$ เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับ y ใดๆ ซึ่งสองประโยคนี้คนละความหมายกัน ไม่สามารถใช้แทนกันได้

การหานิเสธของประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ นอกจากจะใส่นิเสธที่ประโยคเปิดแล้ว ยังต้องเปลี่ยนตัวบ่งปริมาณจาก $\forall$ เป็น $\exists$ และจาก $\exists$ เป็น $\forall$ เช่น นิเสธของ $\forall x \exists y[P(x) \rightarrow Q(x)]$ คือ $\exists x \forall y[P(x) \wedge \sim Q(x)]$

ตัวอย่างที่ 2.26 กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นประโยคเปิด โดยที่ $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[\sim Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง จงหาค่าความจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$ 2. $\exists x[\sim P(x) \vee \sim Q(x)]$

3. $\forall x[P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$ 4. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$

วิธีทำ จาก $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[\sim Q(x)]$ มีค่าจริงเป็นเท็จ จะได้

$\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ....(1)

$\exists x[\sim Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

และ $\exists x[\sim Q(x)]$ สมมูลกับ $\sim \forall x[Q(x)]$

แสดงว่า $\sim \forall x[Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

นั่นคือ $\forall x[Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ....(2)

จาก (1) และ (2) พบว่า สำหรับทุกๆค่า ของ x ใดๆ ใน $\mathbb{R}$ ต่างก็ทำให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นจริง

นั่นคือ สำหรับค่าทุกๆ ค่า x ใดๆ ใน $\mathbb{R}$ ทำให้ $P(x) \to Q(x)$ เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x[P(x) \to Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 2.27 กำหนดให้ $x \in \{-2,-1,1,2\}$ และ $y \in \{-1,0,1\}$ จงหาค่าความจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\forall x \forall y[x^2+y^2>1]$
2. $\exists x \forall y[x-2y \geqslant 0]$
3. $\forall x \exists y[x-2y<0]$
4. $\exists x \exists y[2x-3y+8<0]$

วิธีทำ จาก $x \in \{-2,-1,1,2\}$ และ $y \in \{-1,0,1\}$

พิจารณาตัวเลือกแต่ละข้อ ดังนี้

ข้อ 1 เท็จ ลองแทนค่า $x=1, y=0$ ใน $x^2+y^2>1$

จะได้ $1^2+0^2>1$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x \forall y[x^2+y^2>1]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อ 2 จริง ลองแทนค่า $x=2$ ใน $x-2y \geqslant 0$

จะได้
$$\begin{aligned} 2-2y &\geqslant 0 \\ 2 &\geqslant 2y \\ y &\leqslant 1 \end{aligned}$$

นั่นคือ เมื่อ $x=2$ ใน $\forall y[y \leqslant 1]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ดังนั้น $\exists x \forall y[x-2y<0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อ 3 เท็จ ลองแทนค่า $x=2$ ใน $x-2y<0$

จะได้
$$\begin{aligned} (2)-2y &< 0 \\ 2 &< 2y \\ y &> 1 \end{aligned}$$

ซึ่งพบว่าค่า y ดังกล่าวไม่อยู่ใน $\{-1,0,1\}$

ดังนั้น $\forall x \exists y[x-2y<0]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อ 4 เท็จ พิจารณาประโยคเปิด $2x-3y+8<0$

ลองแทนค่า $y = -1$ จะได้ $2x - 3(-1) + 8 < 0$ ทำให้ $x < -\dfrac{11}{2}$

ซึ่งค่า x ดังกล่าวไม่ใช่สมาชิกใน $\{-2, -1, 1, 2\}$

ลองแทนค่า $y = 0$ จะได้ $2x - 3(0) + 8 < 0$ ทำให้ $x < -4$

ซึ่งค่า x ดังกล่าวไม่ใช่สมาชิกใน $\{-2, -1, 1, 2\}$

ลองแทนค่า $y = 1$ จะได้ $2x - 3(1) + 8 < 0$ ทำให้ $x < -\frac{5}{2}$

ซึ่งค่า x ดังกล่าวไม่ใช่สมาชิกใน $\{-2, -1, 1, 2\}$

จึงสรุปว่าไม่มีค่า x, y ใดๆในขอบเขตที่กำหนดให้มาแทนค่าใน $2x - 3y + 8 < 0$ แล้ว ทำให้อสมการดังกล่าวเป็นจริง

ดังนั้น $\exists x \exists y[2x - 3y + 8 < 0]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 2.28 จงหานิเสธของ

$$\forall x \exists y \exists z \left[\text{ถ้า } x + y > z \text{ แล้ว } \left(x + y > \frac{1}{z} \text{ หรือ } x^2 + y^2 > \frac{1}{z} \right) \right]$$

วิธีทำ ให้ A แทน $x + y > z$

B แทน $x + y > \dfrac{1}{z}$

C แทน $x^2 + y^2 > \dfrac{1}{z}$

นิเสธของ "ถ้า $x + y > z$ แล้ว $\left(x + y > \dfrac{1}{z} \text{ หรือ } x^2 + y^2 > \dfrac{1}{z} \right)$ "คือ

$$\begin{aligned} \sim [\, A \to (\, B \vee C \,)] &\equiv \; A \wedge \sim (\, B \vee C \,) \\ &\equiv \; A \wedge \sim B \; \wedge \sim C \end{aligned}$$

ถอดกลับเป็นข้อความว่า "$x + y > z$ และ $x + y \leqslant \dfrac{1}{z}$ และ $x^2 + y^2 \leqslant \dfrac{1}{z}$ "

ดังนั้น นิเสธของ $\forall x \exists y \exists z \left[\text{ถ้า } x + y > z \text{ แล้ว } \left(x + y > \dfrac{1}{z} \text{ หรือ } x^2 + y^2 > \dfrac{1}{z} \right) \right]$

คือ $\sim \forall x \exists y \exists z \left[\text{ถ้า } x + y > z \text{ แล้ว } \left(x + y\dfrac{1}{z} \text{ หรือ } x^2 + y^2 > \dfrac{1}{z} \right) \right] \equiv \; \exists x \forall y \forall z \, [x + y > z$ และ $x + y \leqslant \dfrac{1}{z}$ และ $x^2 + y^2 \leqslant \dfrac{1}{z}]$

2.7 การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย

การให้เหตุผล (Reasoning) เป็นการกระทำเพื่อหาข้อสรุปหรือข้อสนับสนุนความเชื่อซึ่งถือเป็นอีกกระบวนการที่สำคัญในทางตรรกศาสตร์ การให้เหตุผลมีอยู่ 2 ลักษณะ ได้แก่ การให้เหตุผลแบบอุปนัย และแบบนิรนัย

2.7.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย

การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการใช้ความจริงจากส่วนย่อยนำไปสรุปความจริงของส่วนรวม หรือกล่าวว่าเป็นการสรุปผลทั่วไปซึ่งมาจากการสังเกตหรือการทดลองในกรณีย่อยๆ หลายครั้ง เช่น เราสังเกตเห็นว่าในทุกเช้าพระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก ดังนั้นเราจึงสรุปแบบขยายผลว่าพระอาทิตย์จะขึ้นทางทิศตะวันออกเสมอ ข้อควรระวังในการให้เหตุผลแบบอุปนัยคือ ข้อสรุปที่ได้ไม่จำเป็นต้องถูกต้องทุกครั้ง เนื่องจากเป็นการสรุปผลเกินขอบเขตที่เราพิจารณาออกไป สิ่งที่มีผลต่อความน่าเชื่อถือ ได้แก่

1. จำนวนข้อมูลที่มีเพียงพอหรือไม่ เช่น สุ่มหยิบลูกบอลได้สีแดงติดกัน 4 ครั้ง จึงสรุปเอาว่าบอลทุกลูกมีสีแดง ซึ่งอาจผิดก็ได้
2. ข้อมูลที่ใช้นั้นเป็นตัวแทนที่ดีแล้วหรือไม่ เช่น สุ่มถามคน 100 คนในบริเวณสยามสแควร์ พบว่าอายุไม่เกิน 22 ปีถึง 70 คน จึงสรุปเอาว่าในกรุงเทพฯ มีประชากรวัยรุ่นจำนวนมากกว่าวัยทำงานอยู่เท่าตัว ซึ่งอาจเป็นข้อสรุปที่ผิด
3. ข้อสรุปที่ต้องการมีความซับซ้อนเกินไปหรือไม่ เช่น ความเชื่อ ความพึงพอใจ ซึ่งมักจะขึ้นกับเหตุผลต่างๆ กัน

2.7.2 การให้เหตุผลแบบนิรนัย

การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการใช้ความจริงที่เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปย่อยใดๆ เช่น เป็นความจริงที่ว่าจำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัวเป็น จำนวนคู่ และ 10 หารด้วย 2 ลงตัว เราจึงสรุปว่า 10 เป็นจำนวนคู่

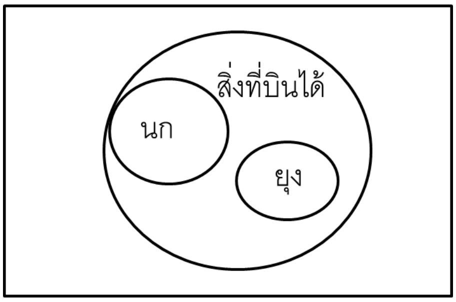
ตัวอย่างที่ 2.29 พิจารณาการอ้างเหตุผล

เหตุ	(1)	สัตว์ปีกทุกตัวบินได้
	(2)	แมวบางตัวเป็นสัตว์ปีก
ผล		แมวบางตัวบินได้

ข้อสรุปนี้เป็นข้อสรุปที่สมเหตุสมผล (valid) แม้ว่าผลจะขัดแย้งกับความจริงในโลกก็ตาม ข้อควรระวังในการให้เหตุผลแบบนิรนัยคือ ในบางครั้งเมื่อเราใช้ความรู้สึกเพียงผิวเผินตัดสิน อาจจะคิดว่าการ อ้างเหตุผลนั้นสมเหตุสมผล ทั้งที่จริงๆ แล้วไม่ใช่ เช่น

เหตุ	(1)	นกทุกตัวบินได้
	(2)	ยุงบินได้
ผล		ยุงเป็นนก

การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผลแบบนิรนัย สามารถทำได้อย่างรอบคอบ โดยใช้แผนภาพของเซต (แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์) ช่วยในการคิด



รูปที่ 2.1 แสดงการเขียนให้เหตผลแบบนิรนัยด้วยแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์

จากรูปภาพจะเห็นว่าไม่สมเหตุสมผล เพราะอาจจะมีสิ่งอื่นที่ไม่ใช่นก แต่บินได้

เนื้อหาตรรกศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้นล้วนแล้วมีความสำคัญและเกี่ยวโยงกัน ตั้งแต่ต้องแยกให้ออกว่าประโยคใดเป็นประพจน์บ้าง เนื่องจากเนื้อหาตรรกศาสตร์ให้ความสนใจเฉพาะประโยคที่เป็นประพจน์เท่านั้น ตัวเชื่อมประพจน์พื้นฐานเพื่อนำไปสู่การหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบที่ซับซ้อน การสร้างตารางค่าความจริงเพื่อหาค่าความจริงที่มีโอกาสเป็นไปได้ทั้งหมด การหาความสมมูลของประพจน์เพื่อการมองประพจน์ที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจมากกว่า ตลอดจนการอ้างเหตุผลประโยคเปิด ตัวบ่งปริมาณ รวมถึงการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย

จากเนื้อหาทางตรรกศาสตร์ทั้งหมดจะเห็นว่าเป็นพื้นฐานความรู้ที่มีความสำคัญ ไม่ใช่เพียงผู้เรียนในสาขาวิชาคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่มีประโยชน์สำหรับผู้เรียนทุกสาขาวิชา เนื่องจากจำเป็นต้องใช้ตรรกะเบื้องต้นทั้งในกระบวนการคิดกระบวนการตัดสินใจ การวิเคราะห์ข้อความต่างๆ ที่ใช้ในชีวิตประจำวัน รวมจนถึงการวิเคราะห์เนื้อหาขั้นสูงในแต่ละสาขาวิชาอีกด้วย

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. กำหนดให้ p, r เป็นจริง และ q, s เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

    1.1 $[(p \wedge s) \vee (p \wedge r)] \to (p \vee s)$

    1.2 $[(q \to s) \vee r] \vee [(q \leftrightarrow s) \wedge r]$

    1.3 $[(r \leftrightarrow q) \vee (p \to q)] \to (p \wedge \sim q)$

    1.4 $[(p \leftrightarrow q) \vee (q \to r)] \vee \sim s$

    1.5 $[(q \to p) \wedge r] \leftrightarrow \sim (\sim r)$

    1.6 $[(p \wedge q) \to \sim r] \to [(\sim p \vee q) \leftrightarrow r]$

    1.7 $[(p \wedge \sim q) \vee \sim r] \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (\sim q \to r)]$

2. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

    2.1 $[(p \wedge s) \vee (p \wedge r)] \to (p \vee s)$

    2.2 $[(q \to s) \vee r] \vee [(q \leftrightarrow s) \wedge r]$

    2.3 $[(r \leftrightarrow q) \vee (p \to q)] \to (p \wedge \sim q)$

    2.4 $[(p \leftrightarrow q) \vee (q \to r)] \vee \sim s$

    2.5 $[(q \to p) \wedge r] \leftrightarrow \sim (\sim r)$

    2.6 $[(p \wedge q) \to \sim r] \to [(\sim p \vee q) \leftrightarrow r]$

    2.7 $[(p \wedge \sim q) \vee \sim r] \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (\sim q \to r)]$

3. ข้อความในข้อใดสมมูลกันบ้าง

    3.1 ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว a เป็นจำนวนคู่ หรือ a เป็นจำนวนคี่

    3.2 ถ้า a ไม่เป็นจำนวนคู่ และ a ไม่เป็นจำนวนคี่ แล้ว a ไม่เป็นจำนวนเต็ม

    3.3 a ไม่เป็นจำนวนเต็ม หรือ a เป็นจำนวนคู่ หรือ a เป็นจำนวนคี่

4. ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

    4.1 $[(p \to r) \wedge (q \to s) \wedge (p \wedge q)] \to (r \vee s)$

    4.2 $\sim (p \to \sim q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

4.3 $[p \to (q \to r)] \leftrightarrow [(p \to q) \to r]$

5. จงแสดงว่าประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ สมมูลกัน โดยใช้กฎการสมมูลต่างๆ

5.1 $[(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv \sim (p \vee q)] \vee r$

5.2 $\sim (p \to \sim q) \equiv (p \wedge q)$

5.3 $[p \to (q \to r)] \equiv [(p \to q) \to r]$

6. จงตรวจสอบการอ้างเหตุผลในแต่ละข้อต่อไปนี้ ถ้าสมเหตุสมผล จงพิสูจน์

6.1

เหตุ	(1)	$(p \to q) \wedge (p \wedge w)$
	(2)	$\sim r \to \sim w$
ผล		$q \wedge w$

6.2

เหตุ	(1)	$\sim s \to \sim r$
	(2)	$\sim s$
	(3)	$t \to w$
	(4)	$r \vee s$
ผล		w

6.3

เหตุ	(1)	$(h \to i) \wedge (j \to k)$
	(2)	$(i \vee k) \to l$
	(3)	$\sim l$
ผล		$\sim (h \vee j)$

เอกสารอ้างอิง

คณิต มงคลพิทักษ์สุข. (2548). **คณิตศาสตร์ O-NET&A-NET.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER (ธรรมบัณฑิต)

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2544). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.4 (กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์).** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค

กนกวลี อุษณกรกุล, รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2553). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์

พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร.(2553). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 1.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์

สุภา สุจริตพงศ์. (2529). **สมและอสมการ.** สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนไทยโดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว

ยุวนิตย์ หงษ์ตระกูล และคณะ. (2539). **คณิตศาสตร์กับการตัดสินใจ.** เชียงใหม่ : สถาบันราชภัฏเชียงใหม่

สุนทร แสวงผล และ ก่อสุข วีระถาวร. (2541). **เรขาคณิตวิเคราะห์.**กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6

เนื้อหาประจำบท

1. ระบบตัวเลขไม่มีหลัก
2. ระบบตัวเลขมีหลัก

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. จำแนกระบบเลขมีหลักและระบบเลขไม่มีหลักได้
2. สามารถแปลงเลขฐานต่างๆ เป็นเลขฐานสิบได้
3. สามารถแปลงเลขฐานสิบเป็นเลขฐานต่างๆ ได้
4. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหาได้
5. ใช้ความรู้ ทักษะ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ประยุกต์กับเลขฐานต่างๆ ได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้ซักถาม
   1.1 ระบบตัวเลขไม่มีหลัก
   1.2 ระบบตัวเลขมีหลัก
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
   2.1 ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์
   2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่างๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก การโต้ตอบและการซักถาม
2. แบบทดสอบ
3. ใบงานที่ให้ทำ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 6
ระบบเลขฐาน

ระบบตัวเลขที่มนุษย์ใช้กันมาตั้งแต่สมัยอดีตจนถึงปัจจุบันมีอยู่สองระบบ คือ ระบบตัวเลขที่ไม่มีหลัก และระบบตัวเลขที่มีหลัก ระบบที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบันคือระบบตัวเลขที่มีหลัก ระบบนี้เป็นระบบที่เราคุ้นเคยกันและใช้กันอยู่ทั่วไป กล่าวคือ ตำแหน่งหลักของตัวเลขจะแสดงค่าของตัวเลขนั้นด้วยโดยอาศัยสัญกรณ์เชิงตำแหน่งของหลักต่างๆ ระบบเลขมีหลักที่เราคุ้นเคยกันก็คือจำนวนในฐานสิบ เช่น จำนวนนับ หรือตัวเลขหน้าจุดทศนิยมจะมีหลักต่างๆ ที่มีนัยสำคัญจากน้อยไปมาก โดยพิจารณาจากขวาไปซ้าย คือ หลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย หลักพัน หลักหมื่น เป็นต้น ระบบเลขไม่มีหลัก คือระบบเลขที่ไม่ว่าจะเขียนตัวเลขแต่ละตัวไว้ที่ตำแหน่งใด ค่าของตัวเลขนั้นจะมีค่าคงที่เสมอ ระบบไม่มีหลักนี้ มีข้อเสียที่สำคัญ ถึงแม้ว่าจะคำนวณทางพีชคณิตพื้นฐานได้ แต่ก็ไม่สะดวกเท่ากับระบบเลขแบบมีหลัก ระบบเลขโรมัน เป็นตัวอย่างของระบบเลขไม่มีหลัก ที่มนุษย์คุ้นเคยและใช้กันมาก จึงเป็นตัวอย่างระบบเลขไม่มีหลักที่น่าศึกษา ในตอนนี้ผู้เขียนจะอธิบายรายละเอียดต่างๆ เกี่ยวกับระบบนี้ดังต่อไปนี้

6.1 จำนวนในระบบโรมัน

จากที่กล่าวมาแล้วว่าระบบเลขโรมันเป็นตัวอย่างหนึ่งของระบบตัวเลขที่ไม่มีหลักที่น่าศึกษา ก่อนที่จะศึกษาในเรื่องอื่นๆของระบบต้องรู้จักสัญลักษณ์พื้นฐานที่สำคัญ ซึ่งใช้แทนจำนวนต่างๆดังนี้

I แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่ง
V แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้า
X แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ สิบ
L แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าสิบ
C แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งร้อย
D แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าร้อย
M แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งพัน

จำนวนที่เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ที่มีค่าน้อยกว่าไว้ด้านหน้าค่าที่มีค่ามากกว่า ค่าของจำนวนที่ได้จะมีค่าเท่ากับจำนวนที่มีค่ามากลบด้วยจำนวนที่มีค่าน้อยกว่า แต่ถ้าเขียนไว้ด้านหลังจะมีค่าเท่ากับจำนวนที่มีค่ามากบวกด้วยจำนวนที่มีค่าน้อยกว่า เช่น

IX	เป็นจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $10 - 1 = 9$
VL	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $50 - 5 = 45$
XC	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $100 - 10 = 90$
XII	เป็นจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $10 + 2 = 12$
LVI	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $50 + 5 + 1 = 56$
$CXIV$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $100 + 10 + 4 = 114$
$XIIV$	เป็นจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $10 + 3 = 13$
$LIIX$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $50 + 8 = 58$
$CLXIV$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $100 + 50 + 10 + 4 = 114$
IXC	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $100 - 9 = 91$

จำนวนที่มีค่าเกินกว่าที่กำหนดไว้ตามสัญลักษณ์ดังกล่าวนี้ จะใช้การขีดเส้นไว้เหนือสัญลักษณ์ แทนจำนวนซึ่งมีค่าเท่ากับสัญลักษณ์นั้นคูณด้วยหนึ่งพัน ตัวอย่างเช่น

$\overline{I}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งพัน
$\overline{V}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าคูณหนึ่งพัน เท่ากับห้าพัน
$\overline{X}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ สิบคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งหมื่น
$\overline{L}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าสิบคูณหนึ่งพัน เท่ากับห้าหมื่น
$\overline{C}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งร้อยคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งแสน
$\overline{D}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าร้อยคูณหนึ่งพัน เท่ากับห้าแสน
$\overline{M}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งล้าน
$\overline{\overline{I}}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งคูณหนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งล้าน
$\overline{\overline{V}}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าคูณหนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับห้าล้าน
$\overline{\overline{X}}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ สิบคูณหนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับสิบล้าน
$\overline{\overline{L}}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ ห้าสิบคูณหนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับห้าสิบล้าน
$\overline{\overline{C}}$	แทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ หนึ่งร้อยคูณหนึ่งพันคูณหนึ่งพัน เท่ากับหนึ่งร้อยล้าน

ตารางที่ 6.1 แสดงสัญลักษณ์ของเลขโรมันแบบต่างๆ

เลขโรมัน	เลขอารบิค	ค่าของตัวเลข	เลขโรมัน	เลขอารบิค	ค่าของตัวเลข
I	1	หนึ่ง	XX	20	ยี่สิบ
II	2	สอง	XXX	30	สามสิบ
III	3	สาม	XL	40	สี่สิบ
IV	4	สี่	L	50	ห้าสิบ
V	5	ห้า	LX	60	หกสิบ
VI	6	หก	LXX	70	เจ็ดสิบ
VII	7	เจ็ด	$LXXX$	80	แปดสิบ
$VIII$	8	แปด	XC	90	เก้าสิบ
IX	9	เก้า	C	100	หนึ่งร้อย
X	10	สิบ	CC	200	สองร้อย

ในระบบเลขโรมันเราสามารถดำเนินการต่างๆ ผ่านการแปลงไปเป็นเลขอารบิก เมื่อได้คำตอบก็แปลงกลับมาเป็นเลขโรมัน

ตัวอย่างที่ 6.1 จงเขียนจำนวนเลขต่อไปนี้ให้เป็นเลขโรมัน $1,325$ และ $3,567$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1,325 &= 1,000+300+20+5 &= MCCCXXV \\ 3,567 &= 3,000+500+60+7 &= MMMDLXVII \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6.2 จงเขียนหาผลบวกของ $MXCVII$ และ MM

วิธีทำ

$$\begin{array}{rrcrc} & MXCVII & & 1097 & \\ & & + & & + \\ & MM & & 2000 & \\ \text{ตอบ} & MMMXCVII & & 3097 & \end{array}$$

6.2 ระบบตัวเลขมีหลัก

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่าจำนวนในฐานสิบเป็นตัวอย่างหนึ่งของระบบตัวเลขมีหลักและยังเป็นที่นิยมใช้กันอยู่ทั้งนี้เพราะว่าการคำนวณทางพีชคณิตเบื้องต้นง่ายกว่าระบบตัวเลขไม่มีหลักมาก ระบบตัวเลขมีหลักนี้ไม่ใช่ว่าเพียงแค่จำนวนในฐานสิบเท่านั้นแต่ยังมีจำนวนในฐานอื่นๆด้วย ซึ่งระบบเลขฐานอื่นที่นิยมใช้ในระบบดิจิตอลมีอยู่ 4 ระบบ ดังตาราง

ตารางที่ 6.2 แสดงระบบเลขฐานที่นิยมใช้ในระบบดิจิตอล

ระบบจำนวน	จำนวนหลัก(digit)
ฐาน 2	$0, 1$
ฐาน 8	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
ฐาน 10	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
ฐาน 16	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$

1. ระบบเลขฐานสิบ (Decimal Number System) จะมีเลขฐานเป็น 10 นั่นคือ จะ ใช้สัญลักษณ์หรือหลักที่แตกต่างกันเท่ากับ 10 ในการแสดงค่าของตัวเลข เป็นระบบเลขฐานที่คุ้นเคยมาก ใช้ในชีวิตประจาวันอยู่ตลอดเวลา ลักษณะโครงสร้างของเลขฐานสิบ

$$
\begin{aligned}
3409 &= 3 \cdot (10)^3 + 4 \cdot (10)^2 + 0 \cdot (10) + 9 \\
256.05 &= 2 \cdot (10)^2 + 5 \cdot (10) + 6 + 0 \cdot (10)^{-1} + 5 \cdot (10)^{-2} \\
149.11 &= 1 \cdot (10)^2 + 4 \cdot (10) + 9 + 1 \cdot (10)^{-1} + 1 \cdot (10)^{-2} \\
10409.23 &= 1 \cdot (10)^4 + 0 \cdot (10)^3 + 4 \cdot (10)^2 + 0 \cdot (10) + 9 + 2 \cdot (10)^{-1} + 3 \cdot (10)^{-2} \\
1.1234 &= 1 + 1 \cdot (10)^{-1} + 2 \cdot (10)^{-2} + 3 \cdot (10)^{-3} + 4 \cdot (10)^{-4} \\
34.1 &= 3 \cdot (10) + 4 + 1 \cdot (10)^{-1}
\end{aligned}
$$

2. ระบบเลขฐานสอง (Binary Number System) จะมีเลขฐานเป็น 2 นั่นคือ จะใช้ สัญลักษณ์หรือหลักที่แตกต่างกันเท่ากับ 2 ในการแสดงค่าของตัวเลข ลักษณะโครงสร้างของเลขฐานสอง

$$
\begin{aligned}
1101_2 &= 1 \cdot (2)^3 + 1 \cdot (2)^2 + 0 \cdot (2) + 1 \\
&= 13 \\
101.01_2 &= 1 \cdot (2)^2 + 0 \cdot (2) + 1 + 0 \cdot (2)^{-1} + 1 \cdot (2)^{-2} \\
&= 5.25 \\
1110.11_2 &= 1 \cdot (2)^3 + 1 \cdot (2)^2 + 1 \cdot (2) + 1 \cdot (2)^{-1} + 1 \cdot (2)^{-2} \\
&= 14.75 \\
1.1111 &= 1 + 1 \cdot (2)^{-1} + 1 \cdot (2)^{-2} + 1 \cdot (2)^{-3} + 1 \cdot (2)^{-4} \\
&= 1.9375
\end{aligned}
$$

3. ระบบเลขฐานแปด (Octal Number System) จะมีเลขฐานเป็น 8 นั่นคือ จะใช้ สัญลักษณ์หรือหลักที่แตกต่างกันเท่ากับ 8 ในการแสดงค่าของตัวเลข เป็นเลขฐานที่ถูกใช้ในระบบดิจิตอลเพื่อ

ทดแทนข้อเสียของเลขฐานสอง ลักษณะโครงสร้างของเลขฐานแปด

$$\begin{aligned}
470_8 &= 4 \cdot (8)^2 + 7 \cdot (8) + 0 \\
&= 256 + 56 + 0 \\
&= 312 \\
54.34_8 &= 5 \cdot (8) + 4 + 3 \cdot (8)^{-1} + 4 \cdot (8)^{-2} \\
&= 40 + 4 + 0.375 + 0.0625 \\
&= 44.4375 \\
114.012_8 &= 1 \cdot (8)^2 + 1 \cdot (8) + 4 + 0 \cdot (8)^{-1} + 1 \cdot (8)^{-2} + 2 \cdot (8)^{-3} \\
&= 64 + 8 + 4 + 0 + 0.015625 + 0.00390625 \\
&= 76.01953125
\end{aligned}$$

4. ระบบเลขฐานสิบหก (Hexadecimal Number System) จะมีเลขฐานเป็น 16 นั่นคือ จะใช้สัญลักษณ์หรือหลักที่แตกต่างกันเท่ากับ 16 ในการแสดงค่าของตัวเลข เป็นระบบเลขฐานที่แปลความหมายได้ยากกว่าเลขฐานแปด ลักษณะโครงสร้างของเลขฐานสิบหก

$$\begin{aligned}
3B_{16} &= 3 \cdot (16)^1 + 11 \cdot (16)^0 \\
&= 48 + 11 \\
&= 59 \\
9.4C_{16} &= 9 \cdot (16)^0 + 4 \cdot (16)^{-1} + 12 \cdot (16)^{-2} \\
&= 9 + 0.25 + 0.046875 \\
&= 9.296875
\end{aligned}$$

6.3 การแปลงเลขฐานต่างๆ

6.3.1 การแปลงเลขฐานสิบเป็นฐานอื่นๆ

การแปลงเลขฐานสิบเป็นอื่น ขั้นที่ 1 พิจารณาตัวเลขหน้าจุดทศนิยม ให้นำเลขฐานที่ต้องการ ไปหารเลขฐานสิบที่ต้องการจะแปลง จนกว่าผลหารที่ได้เท่ากับศูนย์ ซึ่งเศษที่ได้จากการหารแต่ละครั้งคือเลขฐานที่เราต้องการ ให้เขียนเศษของการหารที่ได้เรียงจากเศษที่ได้จากการหารครั้งสุดท้ายเรียงขึ้นไปจนถึงเศษที่ได้จากการหารครั้งแรกตามลำดับ ขั้นที่ 2 พิจารณาตัวเลขหลังจุดทศนิยม ให้นำเลขฐานที่ต้องการ คูณตัวเลขหลังจุดทศนิยม นำค่าหน้าจุดทศนิยมที่ได้ไปเขียนเลขหลังจุดทศนิยม

ในฐานนั้นตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 6.3 จงแปลงจำนวน 324.024 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 5

วิธีทำ ขั้นที่1 แปลงจำนวนเต็ม 324 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 5 โดยการหาร 324 ด้วย 5 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆ จนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

5	324	
5	64	เศษ 4
5	12	เศษ 4
	2	เศษ 2

ดังนั้น $324 = 2244_5$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 5 โดยนำ 5 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.24	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
0.120	5×0.024
0.60	5×0.12
3.0	5×0.6

ดังนั้น $0.024 = 0.003_5$

ผลจากขั้นที่1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $324.024 = 2244.003_5$

ตัวอย่างที่ 6.4 จงแปลงจำนวน 248.123 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3

วิธีทำ ขั้นที่1 แปลงจำนวนเต็ม 248 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 248 ด้วย 3 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

3	248	
3	82	เศษ 2
3	27	เศษ 1
3	9	เศษ 0
3	3	เศษ 0
	1	เศษ 0

ดังนั้น $248 = 100012_3$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 3 โดยนำ 3 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.123	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
0.369	3×0.123
1.107	3×0.369
0.321	3×0.107
0.963	3×0.321
2.889	3×0.963
2.667	3×0.889

ดังนั้น $0.123 = 0.01002_3$

ผลจากขั้นที่1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $248.123 = 100012.01002_3$

ตัวอย่างที่ 6.5 จงแปลงจำนวน 48.67 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 2

วิธีทำ ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 48 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 2 โดยการหาร 48 ด้วย 2 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

2	48	
2	24	เศษ 0
2	12	เศษ 0
2	6	เศษ 0
2	3	เศษ 0
	1	เศษ 0

ดังนั้น $48 = 100000_2$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 2 โดยนำ 2 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.67	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
1.34	2×0.67
0.68	2×0.34
1.36	2×0.68
0.72	2×0.36
1.44	2×0.72
0.88	2×0.44

ดังนั้น $0.67 = 0.101010_2$

ผลจากขั้นที่1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $48.67 = 100000.101010_2$

ตัวอย่างที่ 6.6 จงแปลงจำนวน 142.13 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 4

วิธีทำ ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 142 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 4 โดยการหาร 142 ด้วย 4 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

4	142	
4	35	เศษ 2
4	8	เศษ 3
	2	เศษ 0

ดังนั้น $142 = 2032_4$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 4 โดยนำ 4 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.13	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
0.52	4×0.13
2.04	4×0.52
0.16	4×0.04
0.64	4×0.16
2.56	4×0.64
2.24	4×0.56

ดังนั้น $0.13 = 0.020022_4$

ผลจากขั้นที่1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $142.13 = 2032.020022_4$

ตัวอย่างที่ 6.7 จงแปลงจำนวน 1048.21 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 7

วิธีทำ ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 1048 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 7 โดยการหาร 1048 ด้วย 7 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

7	1048	
7	149	เศษ 5
7	21	เศษ 2
	3	เศษ 0

ดังนั้น $1048 = 3025_7$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 7 โดยนำ 7 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.21	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
1.47	7×0.21
3.29	7×0.47
2.03	7×0.29
0.21	7×0.03
1.47	7×0.21
3.29	7×0.47

ดังนั้น $0.21 = 0.132_7$
ผลจากขั้นที่1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $1048.21 = 3025.132_7$

6.3.2 การแปลงเลขฐานอื่นๆเป็นฐานสิบ

โดยทั่วไปแล้วถ้า b เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 แล้วจำนวนในฐาน b จะอยู่ใน รูป $(a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0)_b$ โดยที่ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ และเราสามารถเขียนเลขฐานต่างๆเป็นฐานสิบได้ ดังนี้

$$(a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0)_b = a_n(b)^n + a_{n-1}(b)^{n-1} + \ldots + a_1b + a_0$$

ตัวอย่างที่ 6.8 จงแปลงจำนวน 2244.003_5 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบ
วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2244.003_5 &= 2\cdot(5)^3 + 2\cdot(5)^2 + 4\cdot 5 + 4 + 0\cdot(5)^{-1} + 0\cdot(5)^{-2} + 3\cdot(5)^{-3} \\ &= 250 + 50 + 20 + 4 + 0.024 \\ &= 324.024 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6.9 จงแปลงจำนวน 2134.2_4 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบ
วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2134.2_4 &= 2\cdot(4)^3 + 1\cdot(4)^2 + 3\cdot 4 + 4 + 2\cdot(4)^{-1} \\ &= 128 + 16 + 12 + 4 + 0.5 \\ &= 160.5 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6.10 จงแปลงจำนวน 114.11_8 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบ

วิธีทำ

$$\begin{aligned}114.11_8 &= 1\cdot(8)^2 + 1\cdot 8 + 4 + 1\cdot(8)^{-1} + 1\cdot(8)^{-2}\\ &= 64 + 8 + 4 + 0.125 + 0.0.015625\\ &= 76.140625\end{aligned}$$

นอกจากนี้ หากต้องการแปลงเลขฐานใดๆ ที่ไม่ใช่ฐานสิบ ไปเป็นเลขฐานอื่นๆที่ไม่ใช่ฐานสิบ สามารถแปลงผ่านเลขฐานสิบเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบ เช่น

$$\begin{array}{ccccc}\text{Binary} & \Longrightarrow & \text{Decimal} & \Longrightarrow & \text{Octal}\\ 10111_2 & & 23 & & 27_8\end{array}$$

ตัวอย่างที่ 6.11 จงแปลงจำนวน 2134.2_4 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสาม

วิธีทำ แปลงจำนวน 2134.2_4 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned}2134.2_4 &= 2\cdot(4)^3 + 1\cdot(4)^2 + 3\cdot 4 + 4 + 2\cdot(4)^{-1}\\ &= 128 + 16 + 12 + 4 + 0.5\\ &= 160.5\end{aligned}$$

จากนั้นจึงแปลงเลขฐานสิบที่ได้ไปเป็นเลขฐานสามดังนี้

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 160 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 160 ด้วย 3 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

3	160	
3	53	เศษ 1
3	17	เศษ 2
3	5	เศษ 2
	1	เศษ 2

ดังนั้น $160 = 12221_3$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 3 โดยนำ 3 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.5	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
1.5	3×0.5
1.5	3×0.5
1.5	3×0.5

ดังนั้น $0.5 = 0.111_3$
ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $160.5 = 12221.111_3$ นั่นคือ $2134.2_4 = 12221.111_3$

ตัวอย่างที่ 6.12 จงแปลงจำนวน 223.21_8 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสี่
วิธีทำ แปลงจำนวน 223.21_8 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 223.21_8 &= 2 \cdot (8)^2 + 2 \cdot 8 + 3 + 2 \cdot (8)^{-1} + 1 \cdot (8)^{-2} \\ &= 128 + 16 + 3 + 0.25 + 0.015625 \\ &= 147.27 \end{aligned}$$

จากนั้นจึงแปลงเลขฐานสิบที่ได้ไปเป็นเลขฐานสามดังนี้
ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 147 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 147 ด้วย 4 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

4	147	
4	36	เศษ 3
4	9	เศษ 0
	2	เศษ 1

ดังนั้น $147 = 2103_4$
ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 4 โดยนำ 4 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.27	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
1.08	4×0.27
0.32	4×0.08
1.44	4×0.32
1.76	4×0.44
3.04	4×0.76

ดังนั้น $0.27 = 0.10113_4$
ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $147.27 = 2103.10113_4$ นั่นคือ $223.21_8 = 12221.111_4$

ตัวอย่างที่ 6.13 จงแปลงจำนวน 11101.01_2 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสาม
วิธีทำ แปลงจำนวน 11101.01_2 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 11101.01_2 &= 1\cdot(2)^4 + 1\cdot(2)^3 + 1\cdot(2)^2 + 0\cdot 2 + 1 + 0\cdot(2)^{-1} + 1\cdot(2)^{-2} \\ &= 16 + 8 + 4 + 0 + 1 + 0 + 0.25 \\ &= 29.25 \end{aligned}$$

จากนั้นจึงแปลงเลขฐานสิบที่ได้ไปเป็นเลขฐานสามดังนี้
ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 29 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 29 ด้วย 3 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

3	29	
3	9	เศษ 2
3	3	เศษ 0
	1	เศษ 0

ดังนั้น $29 = 1002_3$
ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 3 โดยนำ 3 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.25	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
0.75	3×0.25
2.25	3×0.75
0.75	3×0.25
2.25	3×0.75
0.75	3×0.25

ดังนั้น $0.25 = 0.0202_3$
ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $29.25 = 1002.0202_3$ นั่นคือ $11101.01_2 = 1002.0202_3$

ตัวอย่างที่ 6.14 จงแปลงจำนวน 3344.14_5 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานหก
วิธีทำ แปลงจำนวน 3344.14_5 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 3344.14_5 &= 3\cdot(5)^3 + 3\cdot(5)^2 + 4\cdot 5 + 4 + 1\cdot(5)^{-1} + 4\cdot(5)^{-2} \\ &= 375 + 75 + 20 + 4 + 0.2 + 0.16 \\ &= 474.36 \end{aligned}$$

จากนั้นจึงแปลงเลขฐานสิบที่ได้ไปเป็นเลขฐานหกดังนี้
ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 474 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 6 โดยการหาร 474 ด้วย 6 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

6	474	
6	79	เศษ 0
6	13	เศษ 1
	2	เศษ 1

ดังนั้น $474 = 2110_6$
ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 6 โดยนำ 6 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.36	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
2.16	6×0.36
0.96	6×0.16
5.76	6×0.96
4.56	6×0.76
3.36	6×0.56

ดังนั้น $0.36 = 0.20543_6$
ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $474.36 = 2110.20543_6$ นั่นคือ $3344.14_5 = 2110.20543_6$

6.4 การดำเนินการของตัวเลขฐานต่างๆ

การบวกเลขฐาน มีหลักการเหมือนกันหมดทุกเลขฐาน คือ

1. ต้องเป็นเลขฐานเดียวกันทั้งตัวตั้งและตัวบวก
2. ต้องเติม 0 ให้ครบหลักและตั้งหลักเลขให้ตรงกันทั้งตัวตั้งและตัวบวก
3. ต้องบวกเลขหลักต่ำสุดทางขวามือก่อนเสมอ
4. ถ้าผลบวกน้อยกว่าฐานนับได้เท่าไรใส่ไว้ในหลักเดียวกันเท่านั้น
5. ถ้าผลบวกมากกว่าฐานต้องนับให้ได้เท่ากับฐานก่อนเหลือเศษเท่าไรใส่ไว้ในหลักเดียวกัน
6. ทำการบวกกันจนกว่าจะหมดทุกหลักผลลัพธ์ที่ได้คือคำตอบด้านล่างทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 6.15 จงบวกเลขฐาน 8 ต่อไปนี้ $473.65 + 236.25$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl} \text{ตัวทด} & \rightarrow & 111\ 1 \\ \text{ตัวตั้ง} & \rightarrow & 473.65 \\ & & \qquad\quad + \\ \text{ตัวบวก} & \rightarrow & 236.25 \\ \text{คำตอบ} & \rightarrow & 732.12 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 6.16 จงบวกเลขฐาน 5 ต่อไปนี้ $124.14 + 312.44$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl} \text{ตัวทด} & \rightarrow & \ 11\ 1 \\ \text{ตัวตั้ง} & \rightarrow & 124.14 \\ & & \qquad\quad + \\ \text{ตัวบวก} & \rightarrow & 312.44 \\ \text{คำตอบ} & \rightarrow & 442.13 \end{array}$$

การลบเลขฐาน มีหลักการเหมือนกันหมดทุกเลขฐาน คือ

1. ต้องเป็นเลขฐานเดียวกันทั้งตัวตั้งและตัวบวก
2. ตัวตั้งต้องมีค่ามากกว่าตัวลบเสมอ
3. ต้องเติม 0 ให้ครบหลักและตั้งหลักเลขให้ตรงกันทั้งตัวตั้งและตัวลบ
4. ต้องลบเลขหลักต่ำสุดขวามือก่อนเสมอ
5. ถ้าค่าตัวตั้งมากกว่าตัวลบให้นับค่าตัวลบเพิ่มขึ้นเท่ากับตัวตั้ง ค่าที่เพิ่มนี้คือผลต่าง หรือผลลบ
6. ถ้าค่าตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบให้ยืมหลักที่สูงกว่ามา 1 ค่า ซึ่งมีค่าในหลักต่ำเท่ากับฐาน เสมอ นำค่าที่ยืมมา ตั้งลบด้วยตัวลบผลต่างเท่าไร นำไปรวมกับตัวตั้งในหลักเดียวกันผลลัพธ์ คือคำตอบ
7. ทำการลบกันจนกว่าจะหมดทุกหลักผลลัพธ์ที่ได้คือคำตอบด้านล่างทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 6.17 จงบวกเลขฐาน 8 ต่อไปนี้ $473.65 - 236.25$
วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl} \text{ตัวขอยืม} & \rightarrow & 068 \\ \text{ตัวตั้ง} & \rightarrow & 473.65 \\ & & \qquad - \\ \text{ตัวลบ} & \rightarrow & 236.25 \\ \text{คำตอบ} & \rightarrow & 235.40 \end{array}$$

ในส่วนของการคูณ และการหารเลขฐานต่างๆ ใช้วิธีการแปลงเป็นเลขฐานสิบแล้วดำเนินการ

$$\begin{array}{ccccc} \text{Binary} & \Longrightarrow & \text{Decimal} & \Longrightarrow & \text{Binary} \\ 111_2 \times 10_2 & & 7 \times 2 = 14 & & 1110_2 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 6.18 จงหาค่าของ $234_5 \times 331_5$
วิธีทำ แปลงจำนวน 234_5 และ 331_5 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 234_5 &= 2 \cdot (5)^2 + 3 \cdot 5 + 4 \\ &= 50 + 15 + 4 \\ &= 69 \\ 331_5 &= 3 \cdot (5)^2 + 3 \cdot 5 + 1 \\ &= 75 + 15 + 1 \\ &= 91 \end{aligned}$$

จากนั้นให้นำเลขฐานสิบที่หาได้มาคูณกัน ดังนี้ $69 \times 91 = 6,279$
จากนั้นให้แปลงเลขฐานสิบไปเป็นฐาน 5

5	6,279	
5	1,255	เศษ 4
5	251	เศษ 0
5	50	เศษ 1
5	10	เศษ 0
	2	เศษ 0

ดังนั้น $6,279 = 200104_5$ นั่นคือ $234_5 \times 331_5 = 200104_5$

ตัวอย่างที่ 6.19 จงหาค่าของ $114.16_7 \times 161.41_7$

วิธีทำ แปลงจำนวน 114.16_7 และ 161.41_7 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned}
114.16_7 &= 1 \cdot (7)^2 + 1 \cdot 7 + 4 + 1 \cdot (7)^{-1} + 6 \cdot (7)^{-2} \\
&= 49 + 7 + 4 + 0.14 + 0.12 \\
&= 60.26 \\
161.41_7 &= 1 \cdot (7)^2 + 6 \cdot 7 + 1 + 4 \cdot (7)^{-1} + 1 \cdot (7)^{-2} \\
&= 49 + 42 + 1 + 0.57 + 0.02 \\
&= 92.59
\end{aligned}$$

จากนั้นให้นำเลขฐานสิบที่หาได้มาคูณกัน ดังนี้ $60.26 \times 92.59 = 5,579.47$

จากนั้นให้แปลงเลขฐานสิบไปเป็นฐาน 7

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม $5,579$ ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 7 โดยการหาร $5,579$ ด้วย 7 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

7	$5,579$	
7	797	เศษ 0
7	113	เศษ 6
7	16	เศษ 1
	2	เศษ 2

ดังนั้น $5,579 = 22160_7$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 7 โดยนำ 7 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.47	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
3.29	7×0.47
2.03	7×0.29
0.21	7×0.03
1.47	7×0.21
3.29	7×0.47

ดังนั้น $0.47 = 0.3201_7$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $5,579.47 = 22160.3201_7$ นั่นคือ $114.16_7 \times 161.41_7 = 22160.3201_7$

ตัวอย่างที่ 6.20 จงหาค่าของ $2233.11_4 \times 121.01_4$ ตอบเป็นเลขฐานสาม

วิธีทำ แปลงจำนวน 2233.11_4 และ 121.01_4 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned}
2233.11_4 &= 2 \cdot (4)^3 + 2 \cdot (4)^2 + 3 \cdot 4 + 3 + 1 \cdot (4)^{-1} + 1 \cdot (4)^{-2} \\
&= 128 + 32 + 12 + 3 + 0.25 + 0.06 \\
&= 175.31 \\
121.01_4 &= 1 \cdot (4)^2 + 2 \cdot 4 + 1 + 0 \cdot (4)^{-1} + 1 \cdot (4)^{-2} \\
&= 16 + 8 + 1 + 0 + 0.06 \\
&= 25.06
\end{aligned}$$

จากนั้นให้นำเลขฐานสิบที่หาได้มาคูณกัน ดังนี้ $175.31 \times 25.06 = 4,393.27$

จากนั้นให้แปลงเลขฐานสิบไปเป็นฐาน 3

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม $4,393$ ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร $4,393$ ด้วย 3 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

3	4,393	
3	1,464	เศษ 1
3	488	เศษ 0
3	162	เศษ 2
3	54	เศษ 0
3	18	เศษ 0
3	6	เศษ 0
	2	เศษ 0

ดังนั้น $4,393 = 20000201_3$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 3 โดยนำ 3 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.27	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
0.81	3×0.27
2.43	3×0.81
1.29	3×0.43
0.87	3×0.29
2.61	3×0.87

ดังนั้น $0.27 = 0.02102_3$
ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $4,393.27 = 20000201.02102_3$ นั่นคือ $2233.11_4 \times 121.01_4 = 20000201.02102_3$

ตัวอย่างที่ 6.21 จงหาค่าของ $12514_6 \div 32_6$ ตอบเป็นเลขฐานสาม
วิธีทำ แปลงจำนวน 12514_6 และ 31_6 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} 12514_6 &= 1 \cdot (6)^4 + 2 \cdot (6)^3 + 5 \cdot (6)^2 + 1 \cdot 6 + 4 \\ &= 1296 + 432 + 180 + 6 + 4 \\ &= 1918 \\ 32_6 &= 3 \cdot 6 + 2 \\ &= 18 + 2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

จากนั้นให้นำเลขฐานสิบที่หาได้มาคูณกัน ดังนี้ $1,918 \div 20 = 95.9$
จากนั้นให้แปลงเลขฐานสิบไปเป็นฐาน 6
ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 95 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 95 ด้วย 9 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

6	95	
6	17	เศษ 3
	2	เศษ 5

ดังนั้น $95 = 253_6$
ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 6 โดยนำ 6 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.9	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
5.4	6×0.9
2.4	6×0.4
2.4	6×0.4

ดังนั้น $0.9 = 0.522_6$
ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $95.9 = 253.522_6$ นั่นคือ $12514_6 \div 32_6 = 253.522_6$

ตัวอย่างที่ 6.22 จงหาค่าของ $332313.1_4 \div 3.21_4$ ตอบเป็นเลขฐานสาม

วิธีทำ แปลงจำนวน 332313.1_4 และ 3.21_4 ให้เป็นจำนวนในเลขฐานสิบก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned}
332313.1_4 &= 3 \cdot (4)^5 + 3 \cdot (4)^4 + 2 \cdot (4)^3 + 3 \cdot (4)^2 + 1 \cdot 4 + 3 + 1 \cdot (4)^{-1} \\
&= 3,072 + 768 + 128 + 48 + 4 + 3 + 0.25 \\
&= 4,023.25 \\
3.21_4 &= 3 + 2 \cdot (4)^{-1} + 1 \cdot (4)^{-2} \\
&= 3 + 0.5 + 0.06 \\
&= 3.56
\end{aligned}$$

จากนั้นให้นำเลขฐานสิบที่หาได้มาหารกัน ดังนี้ $4,023.25 \div 3.56 = 1130.13$

จากนั้นให้แปลงเลขฐานสิบไปเป็นฐาน 4

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนเต็ม 1130 ให้เป็นจำนวนในเลขฐาน 3 โดยการหาร 1130 ด้วย 4 แล้วดูผลลัพธ์และเศษเป็นเท่าใด ทำไปเรื่อยๆจนกว่าผลลัพธ์จะน้อยกว่าตัวหารดังวิธีการข้างล่าง

4	1130	
4	282	เศษ 2
4	70	เศษ 2
4	17	เศษ 2
4	4	เศษ 1
	1	เศษ 0

ดังนั้น $1130 = 101222_4$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมให้เป็นตัวเลขหลังจุดของจำนวนในฐาน 4 โดยนำ 4 ไปคูณกับตัวเลขจุดทศนิยม ดังวิธีข้างล่าง

0.13	(เริ่มต้นไม่ต้องใส่ 0 หน้าจุดทศนิยม)
0.52	4×0.13
2.08	4×0.52
0.32	4×0.08
1.28	4×0.32
1.12	4×0.28

ดังนั้น $0.13 = 0.02011_4$

ผลจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า $1130.13 = 101222.02011_4$ นั่นคือ $332313.1_4 \div 3.21_4 =$

101222.02011_4

เนื้อหาทั้งหมดที่กล่าวไปแล้วนั้นประกอบด้วยเนื้อหาที่สำคัญคือ จำนวนในระบบโรมัน ระบบตัวเลขมีหลัก ซึ่งสองระบบนี้จะทำให้เห็นวิวัฒนาการของการใช้ระบบตัวเลข นอกจากนี้ยังกล่าวถึงการแปลงเลขฐานต่างๆ รวมถึงการดำเนินการของเลขฐานต่างๆ อีกด้วย

จากที่กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นว่า เราสามารถแปลงเลขฐานต่างๆ ไปมาได้ โดยมีวัตถุประสงค์ คือ ใช้ตัวเลขให้เหมาะสมกับการใช้งาน เช่นปัจจุบันนี้เราใช้ตัวเลขฐานสิบในชีวิตประจำวัน แต่ในทางคอมพิวเตอร์ไม่สามารถอ่านตัวเลขฐานสิบได้เนื่องจากเป็นสัญญาณไฟฟ้า จึงมีเฉพาะเปิดและปิดเท่านั้น ดังนั้นต้องใช้ระบบเลขฐานสองแทนเลขฐานสิบ เพื่อให้เหมาะสมตามการใช้งานจึงต้องมีการแปลงเลขฐานด้วยวิธีการต่างๆที่กล่าวในบทเรียนที่ผ่านมา

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงแปลงเลขฐานที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นเลขฐานสิบ

   1.1 111011_2

   1.2 23412_5

   1.3 $6A3.BC_{16}$

   1.4 1175.63_8

   1.5 125.867_9

   1.6 512.31_7

   1.7 $3AB.BA_{13}$

2. จงแปลง 121 ฐานสิบไปเป็นเลขฐานต่างๆดังนี้

   2.1 ฐาน 2

   2.2 ฐาน 4

   2.3 ฐาน 5

   2.4 ฐาน 8

   2.5 ฐาน 9

   2.6 ฐาน 13

   2.7 ฐาน 16

3. จงหาคำตอบในรูปเลขฐาน 8

   3.1 $11101.1_2 + 56_{10}$

   3.2 $1011_2 \times 101_2$

   3.3 $365.75_8 + 177.77_8$

4. จงหาคำตอบของ $11101.1_2 \div 11_2$ และเขียนคำตอบให้อยู่ในเลขฐานสาม

5. จงหาคำตอบของ $33104.01_5 \div 14.1_5$ และเขียนคำตอบให้อยู่ในเลขฐานสี่

6. จงหาคำตอบของ $(1211.01_3 + 12.1_3) \times 21.11_3$ และเขียนคำตอบให้อยู่ในเลขฐานสอง

7. จงหาคำตอบของ $(188.78_9 \div 2.18_9) \times 54.76_9$ และเขียนคำตอบให้อยู่ในเลขฐานห้า

8. จงเขียนตารางการแปลงตัวเลข 1 ถึง 20 ฐานสิบไปเป็นฐานสอง ฐานสี่ ฐานแปด และฐานสิบหก ให้ครบทุกตัวเลข

เอกสารอ้างอิง

คณิต มงคลพิทักษ์สุข. (2548). **คณิตศาสตร์ O-NET&A-NET.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER (ธรรมบัณฑิต)

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2544). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.4 (กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์).** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค

กนกวลี อุษณกรกุล, รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2553). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์

ผศ.ดร.ประเสริฐ ภู่เงิน และคณะ. (2550). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน.** บุรีรัมย์ : มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **1001 TESTS MATHS.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค

พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร.(2553). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 1.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์

สุภา สุจริตพงศ์. (2529). **สมและอสมการ.** สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนไทยโดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว

ยุวนิตย์ หงษ์ตระกูล และคณะ. (2539). **คณิตศาสตร์กับการตัดสินใจ.** เชียงใหม่ : สถาบันราชภัฏเชียงใหม่

VITA