



บทที่ 2

ตรรกศาสตร์ (Logical)

4111704

คณิตศาสตร์และสถิติสำหรับวิทยาศาสตร์

อ.รัชนิกร ทบประดิษฐ์





เนื้อหา

- ประพจน์
- การเชื่อมประพจน์
- การสร้างตารางค่าความจริง
 - สมมูลกัน
 - นิเสธกัน
 - สัจนิรันดร์





ประพจน์

ประพจน์ (Proposition) คือ ประโยคหรือข้อความที่สามารถบอกได้ว่าประโยคหรือข้อความนั้น ๆ เป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ส่วนประโยคที่เป็น **ประโยคคำถาม บอกเล่า คำสั่ง อ้อนวอน ขอร้อง สุภาชิต รวมทั้งประโยคที่มีตัวแปร** ซึ่งไม่สามารถบอกได้ว่า เป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งได้ ประโยคเหล่านี้ไม่เป็นประพจน์

ตัวอย่าง ประโยคที่เป็นประพจน์

หนึ่งปี มี 12 เดือน

$$7 > 3$$

$$5 + 2 = 9$$

ธงชาติมี 5 สี

พระอาทิตย์ขึ้นทางทิศ

ตะวันออก

ตัวอย่าง ประโยคที่ไม่เป็นประพจน์

กรุณาอย่าส่งเสียงดัง

เธอไปไหนมา

เขาเป็นนักเรียน

$$x + 2 = 8$$

กินอะไรดี

$$x > 7$$





ประพจน์

ในเรื่องตรรกศาสตร์นี้ เราสนใจศึกษาเฉพาะประโยคที่เป็นประพจน์เท่านั้น โดยเรานิยมใช้อักษรตัวพิมพ์เล็ก เช่น p, q, r, s, t, \dots เป็นสัญลักษณ์แทนประโยคที่เป็นประพจน์

เช่น ให้ p แทนประพจน์ “เมื่อวานฝนตก”

ให้ q แทนประพจน์ “ $5+2 = 4$ ”

ให้ r แทนประพจน์ “ประเทศไทยอยู่ในทวีปเอเชีย”

แบบฝึกหัด ให้ยกตัวอย่างข้อความที่เป็นประพจน์และไม่เป็นประพจน์มาอย่างละ 5 ข้อความ

.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....





การเชื่อมประพจน์

เราสามารถนำประพจน์ต่าง ๆ มา “เชื่อม” กันได้ โดยการเชื่อมประพจน์ด้วย คำเชื่อมต่าง ๆ ได้แก่

.....และ.....

.....หรือ.....

ถ้า.....แล้ว.....

.....ก็ต่อเมื่อ.....

ไม่.....

■ 1. การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “และ”

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ เราจะแทนตัวเชื่อม “และ” ด้วยสัญลักษณ์ “ \wedge ” เขียนแทน p และ q ด้วย $p \wedge q$

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “และ” จะเป็นจริง เมื่อทุกประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง





การเชื่อมประพจน์

ตารางค่าความจริงของ $p \wedge q$ แสดงได้ดังต่อไปนี้

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F





การเชื่อมประพจน์

■ 2. การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “หรือ”

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ เราจะแทนตัวเชื่อม “หรือ” ด้วยสัญลักษณ์ “ \vee ”
เขียนแทน p หรือ q ด้วย $p \vee q$

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “หรือ” จะเป็นจริง เมื่ออย่างน้อยหนึ่งประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง
ตารางค่าความจริงของ $p \vee q$ แสดงได้ดังต่อไปนี้

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F





การเชื่อมประพจน์

■ 3. การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า.....แล้ว.....”

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ เราจะแทนตัวเชื่อม “ถ้า.....แล้ว.....” ด้วยสัญลักษณ์ “ \rightarrow ” เขียนแทนถ้า p แล้ว q ด้วย $p \rightarrow q$

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “ถ้า.....แล้ว.....” จะเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวคือ เมื่อข้างหน้าเป็นจริง แต่ด้านหลังเป็นเท็จ ส่วนกรณีอื่น ๆ เป็นจริง

ตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ แสดงได้ดังต่อไปนี้

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T



การเชื่อมประพจน์

■ 4. การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “.....ก็ต่อเมื่อ.....”

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ เราจะแทนตัวเชื่อม “.....ก็ต่อเมื่อ.....” ด้วยสัญลักษณ์ “ \leftrightarrow ” เขียนแทน p ก็ต่อเมื่อ q ด้วย $p \leftrightarrow q$

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “.....ก็ต่อเมื่อ.....” จะเป็นจริง เมื่อทั้งสองประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริงหรือเป็นเท็จเหมือนกัน ๆ กัน

ตารางค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ แสดงได้ดังต่อไปนี้

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T



การเชื่อมประพจน์

■ 5. นิเสธของประพจน์ที่กำหนดให้

ถ้า p เป็นประพจน์ นิเสธของประพจน์ p คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ p เราจะแทน “นิเสธ” ด้วยสัญลักษณ์ “ \sim ” เขียนแทนนิเสธของประพจน์ p ด้วย $\sim p$ ตารางค่าความจริงของ $\sim p$ แสดงได้ดังต่อไปนี้

p	$\sim p$
T	F
F	T





การเชื่อมประพจน์

ก่อนอื่นต้องจำตารางผลลัพธ์ $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \sim$ ทั้ง 5 ตารางให้ได้ก่อน

$T \wedge F$ เป็น... F $T \rightarrow T$ เป็น... T $F \vee F$ เป็น... F

$T \leftrightarrow T$ เป็น... T $F \rightarrow T$ เป็น... T $T \wedge T$ เป็น... T

$\sim F$ เป็น... T $T \leftrightarrow F$ เป็น... F $T \vee F$ เป็น... T

$F \wedge T$ เป็น... F $T \rightarrow F$ เป็น... F $T \vee T$ เป็น... T

$F \leftrightarrow F$ เป็น... T $\sim T$ เป็น... F $F \wedge F$ เป็น... F

อย่างไรก็ตาม โจทย์มักจะนำ ตัวเชื่อมหลาย ๆ แบบมาผสม ๆ กัน

ลำดับการทำ คือ ถ้ามีวงเล็บให้ทำในวงเล็บก่อน ถ้ามี “นิเสธ” ให้ทำ “นิเสธ” ในลำดับถัดมา ตามด้วย “และ” “หรือ” “ถ้า...แล้ว.....” “....ก็ต่อเมื่อ....” ตามลำดับ



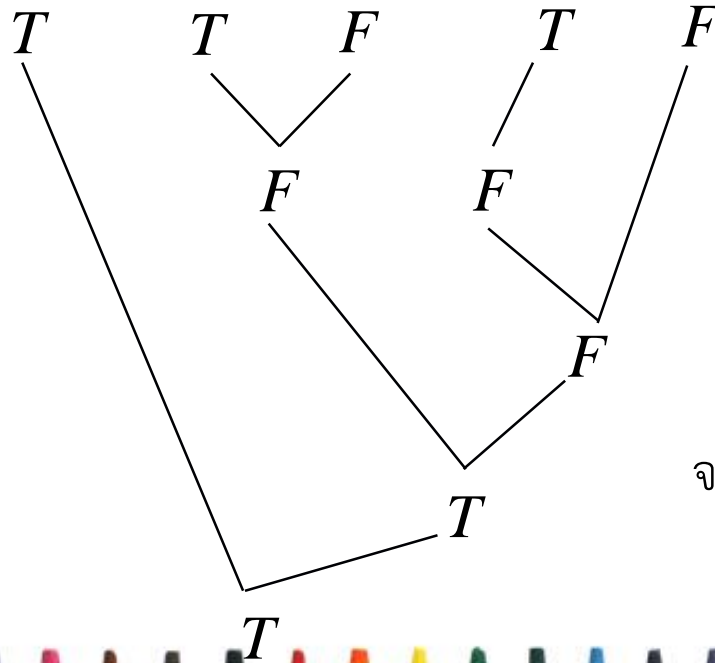


การเชื่อมประพจน์

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ p เป็นจริง q เป็นเท็จ และ r เป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์

วิธีทำ

$$p \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow \sim r \vee q$$



จะได้ว่า $p \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow \sim r \vee q$
มีค่าความจริงเป็นจริง



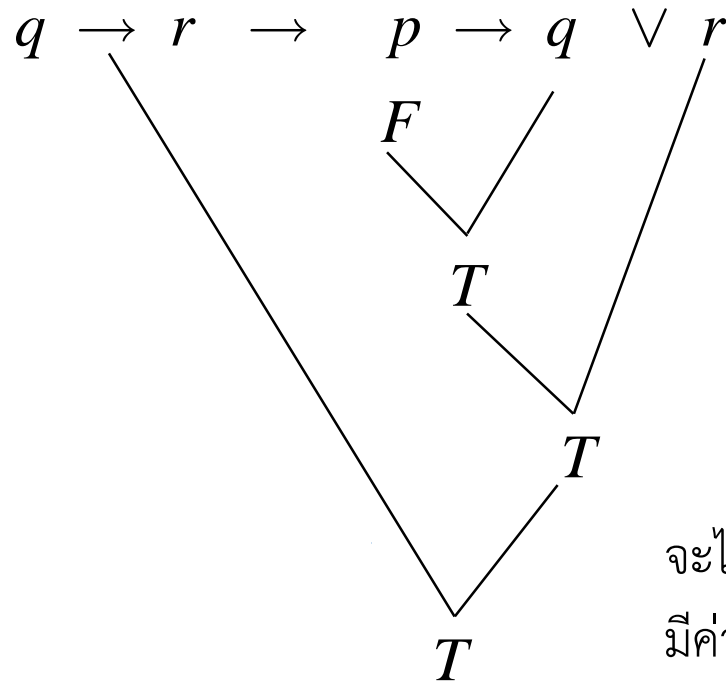


การเชื่อมประพจน์

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ p เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์

$$q \rightarrow r \rightarrow p \rightarrow q \vee r$$

วิธีทำ



จะได้ว่า $q \rightarrow r \rightarrow p \rightarrow q \vee r$
มีค่าความจริงเป็นจริง



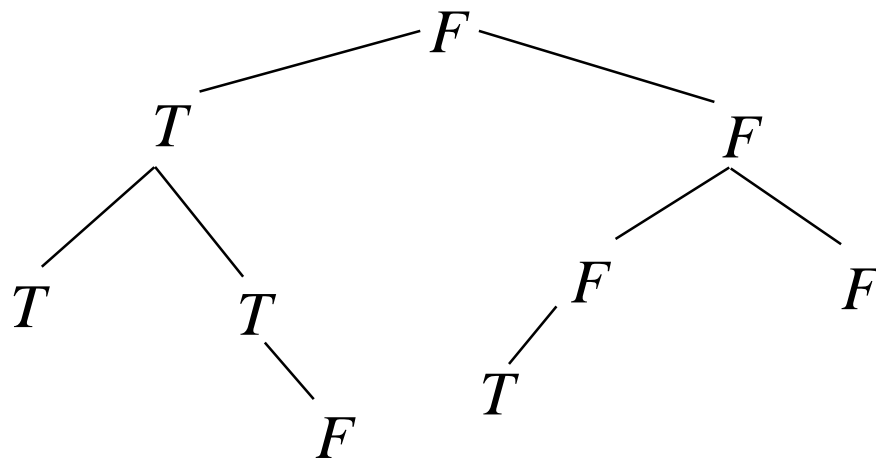


การเชื่อมประพจน์

ตัวอย่าง 4 กำหนดให้ $p \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p \vee r$ เป็นเท็จ จงหาค่า p, q, r

วิธีทำ

$$p \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p \vee r$$



ดังนั้น p เป็นจริง q เป็นเท็จ และ r เป็นเท็จ





การสร้างตารางค่าความจริง

เราเรียกตารางที่บอกค่าความจริงในทุก ๆ กรณี ของประพจน์ที่สนใจว่า “**ตารางค่าความจริง**” ในเรื่องนี้เราจะห้สร้างตารางค่าความจริงของประพจน์อื่น ๆ ที่ซับซ้อนมากขึ้น เนื่องจากตารางค่าความจริงจะต้องคลุมทุกกรณีของตัวแปร p, q, r ดังนั้น จำนวนแถวของตารางจะเป็นทวีคูณของจำนวนตัวแปร โดยสูตรในการหาจำนวนแถว คือ

$$\text{จำนวนแถว} = 2^{\text{จำนวนตัวแปร}}$$

1 ตัวแปร

p	
T	
F	

2 ตัวแปร

p	q	
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	





การสร้างตารางค่าความจริง

ตัวอย่าง 5 จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $\sim q \rightarrow \sim q \wedge p$

วิธีทำ

p	q	$\sim q$	$\sim q \wedge p$	$\sim q \rightarrow \sim q \wedge p$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	F





การสร้างตารางค่าความจริง

ตัวอย่าง 6 จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $\sim p \vee q \rightarrow p \rightarrow q$

วิธีทำ

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q \rightarrow p \rightarrow q$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T





การสร้างตารางค่าความจริง

ตัวอย่าง 7 จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $p \rightarrow \sim q \vee \sim r \leftrightarrow \sim p$

p	q	r	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim p$	$r \leftrightarrow \sim p$	$\sim r \leftrightarrow \sim p$	$p \rightarrow \sim q \vee \sim r \leftrightarrow \sim p$
T	T	T	F	F	F	F	T	T
T	T	F	F	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	F	T
F	T	T	F	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F	T	T





ประพจน์ที่สมมูลกัน

ประพจน์ที่สมมูลกัน

ถ้าค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากการเชื่อมประพจน์ 2 ชุด มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี เราเรียกประพจน์ 2 ชุดนั้น ว่าเป็นประพจน์ที่สมมูลกัน และแทนด้วยสัญลักษณ์ “ \equiv ” แปลว่า “มีค่าความจริงเหมือนกัน”

ตัวอย่าง 8 จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $\sim p \rightarrow \sim q$ กับ $p \vee \sim q$ สมมูลกันหรือไม่

วิธีทำ

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ดังนั้น
 $\sim p \rightarrow \sim q$
 \equiv
 $p \vee \sim q$



ประพจน์ที่สมมูลกัน

ตัวอย่าง 9 จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $p \leftrightarrow q$ กับ $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$ สมมูลกันหรือไม่

วิธีทำ

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

ดังนั้น

$$p \leftrightarrow q \equiv p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$$





ประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน

ประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน

ถ้าค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากตัวเชื่อม 2 ชุด มีค่าความจริงเป็นนิเสธกันทุกกรณี เรียกประพจน์ทั้ง 2 ชุด นี้ว่า เป็นนิเสธกัน

ตัวอย่าง 10 จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $p \rightarrow q$ กับ $p \wedge \sim q$ เป็นนิเสธกันหรือไม่

วิธีทำ

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	F

ดังนั้น

$p \rightarrow q$ เป็นนิเสธของ

$p \wedge \sim q$



ประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน

ตัวอย่าง 11 จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $p \wedge q \rightarrow p$ กับ $q \rightarrow p \rightarrow \sim p$ เป็นนิเสธกันหรือไม่

วิธีทำ

p	q	$q \rightarrow p$	$p \wedge q \rightarrow p$	$\sim p$	$q \rightarrow p \rightarrow \sim p$
T	T	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

ดังนั้น $p \wedge q \rightarrow p$ เป็นนิเสธของ $q \rightarrow p \rightarrow \sim p$





สัจนิรันดร์ (Tautology)

สัจนิรันดร์ (tautology)

สัจนิรันดร์ คือ ประพจน์ที่เป็นจริงในทุกกรณี

ตัวอย่าง 12 จงสร้างตารางค่าความจริง เพื่อแสดงว่า $p \rightarrow q \wedge p \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

วิธีทำ

p	q	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q \wedge p$	$p \rightarrow q \wedge p \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

ดังนั้น

$$p \rightarrow q \wedge p \rightarrow q$$

เป็นสัจนิรันดร์





สัจนิรันดร์ (Tautology)

ตัวอย่าง 13 จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $\sim p \wedge q \leftrightarrow p \leftrightarrow \sim q$

เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ

p	q	$p \wedge q$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$\sim p \wedge q \leftrightarrow p \leftrightarrow \sim q$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	F

ดังนั้น $\sim p \wedge q \leftrightarrow p \leftrightarrow \sim q$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์





แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ประพจน์

1.1 เขาเป็นคนดี

1.2 สุนัขมี 3 ขา

1.3 หนึ่งวันมี 36 ชั่วโมง

1.4 $3+5 = 13$

1.5 พระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก

1.6 $x - 4 = 7$

2. กำหนดให้ p เป็นเท็จ q เป็นจริง และ r เป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

2.1 $\sim p \rightarrow r \rightarrow \sim q \rightarrow p$

2.2 $\sim q \wedge \sim p \leftrightarrow p \leftrightarrow r$

3. จงหาค่าความจริงของ p, q, r เมื่อกำหนดให้

3.1 $q \rightarrow \sim p \wedge \sim p \rightarrow r$ เป็นจริง

3.2 $p \wedge \sim r \rightarrow \sim p \vee \sim q$ เป็นเท็จ





แบบฝึกหัดท้ายบท

4. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $p \leftrightarrow q \leftrightarrow \sim p \leftrightarrow q$
5. จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $p \wedge p \vee q$ สมมูลหรือเป็นนิเสธกับ $p \vee p \wedge q$ หรือไม่
6. จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $p \rightarrow q \rightarrow r$ สมมูลหรือเป็นนิเสธกับ $p \rightarrow q \rightarrow r$ หรือไม่
7. ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นสัจนิรันดร์
 - 7.1 $\sim p \vee q \rightarrow p$
 - 7.2 $p \vee q \rightarrow p \wedge q$
 - 7.3 $p \vee q \rightarrow \sim p \rightarrow q$

