บทที่ 3
ความน่าจะเป็น

4112703 คณิตศาสตร์ประกันภัย

อาจารย์รัชนีกร ทบประดิษฐ์

ความน่าจะเป็น (Probability)

ความน่าจะเป็น เป็นองค์ประกอบเบื้องต้นสำหรับการคิดอัตราเบี้ยประกันภัยของการประกันภัย ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงนิยามความน่าจะเป็น ทฤษฎีความน่าจะเป็น ค่าคาดหมายและกฎแห่งจำนวนมาก

ความน่าจะเป็น (Probability) คนโดยทั่ว ๆ ไปมักจะให้นิยามความน่าจะเป็นแบบง่าย ๆ เช่น เป็นโอกาสที่เหตุการณ์จะเกิดขึ้น หรือโอกาสที่เหตุการณ์จะเกิดขึ้นในระยะยาว

นิยาม

นิยามของความน่าจะเป็นนั้น เราจะเริ่มต้นด้วยแนวความคิดเกี่ยวกับผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลอง ที่เรียกว่า Sample Space (หรือ S) และเหตุการณ์ (หรือ E) โดยที่

Sample Space คือ เซทของผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลอง หรือของรายการที่กำหนดไว้ทั้งหมด เขียนแทนด้วย S

เช่น S เป็นเซทที่ประกอบด้วยเลขทะเบียนของรถยนต์ที่เกิดชนกันทั้งหมดในปีหนึ่ง ๆ ของกรุงเทพมหานคร

หรือ S เป็นเซทที่ประกอบไปด้วย จำนวนคนอายุ 21 ปี ทั้งหมดที่เสียชีวิตในประเทศไทย

หรือ S คือ จำนวนเรือที่จมทั้งหมดในขณะที่เดินทางท่องเที่ยวในทะเล

เป็นต้น

ความน่าจะเป็น (Probability)

ในเรื่องการประกันภัยรถยนต์ ซึ่งเราสนใจที่จะทราบว่า ความน่าจะเป็นที่รถที่มีราคาเท่ากับ 5 แสนหรือมากกว่า 5 แสน จะชนกันจะมีค่าเท่าใด

เราจะต้องกำหนดจำนวนขึ้นมาจำนวนหนึ่ง ที่เรียกว่า “weight” ให้แก่แต่ละเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในเซท S และ “weight” นี้ อาจจะกำหนดขึ้นตามหลักฐานที่เกิดขึ้นซึ่งเกี่ยวข้องกับความรู้ในอดีตของเราในเรื่องความเสียหายที่ได้รับทั้งหมดของรถยนต์ที่ชนกัน

ถ้าให้ W(S) เป็นผลรวมของ “weight” ทั้งหมดในเซท S

และ W(E) เป็นผลรวมของ “weight” ทั้งหมดใน Subset E

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่รถที่มีราคาเท่ากับ 5 แสนหรือมากกว่า 5 แสน จะถูกชน คือ $P(E) = \dfrac{W(E)}{W(S)}$

ความน่าจะเป็น (Probability)

ในกรณีที่เป็นเรื่องของเหตุการณ์อย่างง่ายทั้งหมดใน Sample Space S และมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน สูตรความน่าจะเป็น คือ

$$P(E) = \frac{E}{S}$$

เมื่อ E แทน จำนวนของผลลัพธ์การทดลอง ในเหตุการณ์ E

S แทน จำนวนของผลลัพธ์การทดลองใน S

ในทางตรงข้ามกัน เราสามารถหาความน่าจะเป็น q ได้ ซึ่งให้ q แทนความน่าจะเป็นที่รถราคาจะไม่ได้รับความเสียหาย นั่นคือ

$$q = \frac{S-E}{S}$$

ซึ่งเราสามารถแสดงเป็นตัวเลขให้เห็น ได้ดังนี้

ตัวอย่าง

ถ้าให้ S ประกอบด้วยรถยนต์ทั้งหมด 10,000 คัน มี 9,000 คัน ที่ราคาต่ำกว่า 5 แสนบาท และอีก 1,000 คัน เป็นรถที่มีราคาสูง (5 แสนบาทหรือมากกว่า)

จากสูตร

$$P(E) = \frac{W(E)}{W(S)}$$

ถ้าเรากำหนดให้ weight ของรถที่ราคาต่ำกว่า 5 แสนบาท เท่ากับ 1 และ

weight ของรถที่ราคามากกว่า 5 แสนบาท เท่ากับ 2

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่รถราคา 5 แสนบาท หรือมากกว่า จะถูกชน

....

....

....

ตัวอย่าง

และความน่าจะเป็นที่รถราคาต่ำกว่า 5 แสนบาท จะถูกชน

....

....

ถ้าเหตุการณ์ทั้งหมดมี weight เท่า ๆ กัน จะได้ว่า

ความน่าจะเป็นที่รถราคา 5 แสนบาท หรือมากกว่า จะถูกชน

....

....

ความน่าจะเป็นที่รถราคาต่ำกว่า 5 แสนบาท จะถูกชน

....

....

ทฤษฎีความน่าจะเป็น

เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ หรือมากกว่า 2 เหตุการณ์ เรียกว่า **เหตุการณ์ที่แยกจากกันโดยเด็ดขาด หรือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นร่วมกันไม่ได้ (Mutually exclusive events)** เมื่อการเกิดเหตุการณ์หนึ่งไม่รวมเอาการเกิดเหตุการณ์อื่น ๆ เข้ามาด้วย

เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ เรียกว่า **เหตุการณ์ที่ไม่เป็นอิสระต่อกันหรือขึ้นอยู่ต่อกัน (Dependent events) หรือเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่ขึ้นอยู่ต่อกัน (Independent events)** จะขึ้นอยู่กับว่าการเกิดเหตุการณ์หนึ่งมีผลหรือไม่มีผลต่อความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์อีกเหตุการณ์หนึ่ง

เหตุการณ์ที่แยกกันโดยเด็ดขาด

Mutually exclusive events เป็นเหตุการณ์ที่ไม่สามารถเกิดขึ้นได้ในเวลาเดียวกันหรือพร้อม ๆ กันได้

เช่น เหตุการณ์ที่รถราคาสูงจะเสียหาย กับเหตุการณ์ที่รถทุกคันจะเสียหาย ทั้ง 2 เหตุการณ์นี้ไม่เป็น Mutually exclusive events

ตัวอย่าง จงหาความน่าจะเป็นของการตาย ถ้าเราพิจารณาดูจะเห็นว่า เหตุการณ์ที่คน ๆ หนึ่งจะตาย กับเหตุการณ์ที่คน ๆ หนึ่งจะมีชีวิตอยู่รอด เป็นเหตุการณ์ที่ไม่สามารถเกิดขึ้นได้พร้อม ๆ กัน หรือในเวลาเดียวกัน

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะตาย สามารถแสดงได้ด้วยอัตราส่วนของจำนวนคนที่ตายในช่วงเวลาหนึ่ง กับจำนวนคนที่มีชีวิตอยู่ทั้งหมดในตอนเริ่มต้นของช่วงเวลานั้น ๆ

เหตุการณ์ที่แยกกันโดยเด็ดขาด

ทฤษฎีที่ 1 ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่แยกกันโดยเด็ดขาด (Mutually exclusive events) จำนวนหนึ่ง จะมีค่าเท่ากับผลบวกของความน่าจะเป็นมี่จะเกิดเหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์

ตัวอย่าง มีไพ่อยู่หนึ่งสำรับ ต้องการที่จะหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ Ace หรือ King ในการหยิบไพ่ครั้งหนึ่ง ๆ

วิธีทำ...

....

....

....

เหตุการณ์ที่แยกกันโดยเด็ดขาด

ตัวอย่าง การโยนเหรียญ 1 เหรียญ ต้องการที่จะหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดหน้าหัวหรือหน้าก้อยจะเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ...

....

....

....

....

....

Positive Weights

ทฤษฎีความน่าจะเป็นกำหนดว่า weight ที่เรากำหนดให้แก่แต่ละเหตุการณ์ในเซทหนึ่ง ๆ จะต้องเป็นบวกเสมอ เมื่อความน่าจะเป็นแสดงได้ด้วยอัตราส่วนระหว่างเหตุการณ์ในเซทย่อยกับเหตุการณ์ในเซททั้งหมด ซึ่งความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทั้งหมด เมื่อรวมกันแล้วจะมีค่าเท่ากับ 1 และจะได้ว่า ถ้าเหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นแน่นอน ความน่าจะเป็นจะมีค่าเท่ากับ 1 แต่ถ้าเหตุการณ์นั้นไม่เกิดขึ้นแน่นอน ความน่าจะเป็นจะมีค่าเท่ากับ 0

ถ้าให้ p แทนความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์จะเกิดขึ้น

และ q เป็นความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์นั้นจะไม่เกิดขึ้น

จะได้ว่า ผลรวมของ p และ q จะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ

นั่นคือ $p+q=1$

Positive Weights

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ดังนี้

1. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์หนึ่ง ๆ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1

คือ $0 \leq p \leq 1$

2. $p + q = 1$

3. ความน่าจะเป็นทั้งหมดของเหตุการณ์ที่เป็น Mutually exclusive events จะเท่ากับความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์รวมกัน

ความน่าจะเป็นที่ได้จากการสังเกต

โดยปกติแล้ว ความน่าจะเป็นที่แท้จริงนั้น เรามักจะไม่ทราบแน่นอน ทำให้การที่จะได้ค่านี้อย่างถูกต้องเป็นไปได้ยากมาก อย่างไรก็ดีเนื่องจากเป็นการยากที่จะพิจารณาถึงความเที่ยงตรง เราจึงหาความน่าจะเป็นโดยวิธีที่เรียกว่า ความน่าจะเป็นที่ได้จากการสังเกต (Empirical Probability) จากนิยามดังต่อไปนี้

ถ้าเหตุการณ์หนึ่งสามารถเกิดขึ้นได้ w ครั้ง จากจำนวนที่เป็นไปได้ทั้งหมด n ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ได้จากการสังเกต (Empirical Probability) จะเท่ากับ

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{w}{n}$$

ความน่าจะเป็นที่ได้จากการสังเกต

สำหรับความน่าจะเป็นที่หาโดยวิธีนี้ จะต้องอาศัยประสบการณ์หรือข้อมูลในอดีต และการที่จะนำความน่าจะเป็นโดยวิธีนี้ไปใช้ เพื่อพยากรณ์เหตุการณ์ในอนาคต จะต้องมีสมมติฐานว่า เหตุการณ์ที่จะเกิดในอนาคตจะเกิดซ้ำกับเหตุการณ์ในอดีต ซึ่งอันนี้โดยความเป็นจริงแล้วอาจจะเป็นไปไม่ได้ แต่เราสามารถแก้ไขได้โดยใช้กฎแห่งจำนวนมาก ซึ่งจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนน้อยลงไปได้

เหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

ถ้าเรามีเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ เราจะเรียกว่า **เหตุการณ์ทั้งสองนั้นเป็นอิสระต่อกัน** ก็ต่อเมื่อการเกิดเหตุการณ์หนึ่งไม่เกี่ยวข้องกับการเกิดของอีกเหตุการณ์หนึ่ง

ทฤษฎีที่ 2 ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน (Independent events) จำนวนหนึ่ง จะมีค่าเท่ากับผลคูณของความน่าจะเป็นมี่จะเกิดเหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์

ตัวอย่าง การโยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หน้าหัวทั้ง 2 ครั้ง

วิธีทำ...

....

....

....

เหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

ตัวอย่าง ถ้าความน่าจะเป็นที่นายสาครและนายอากร จะตายภายในช่วง 20 ปีข้างหน้า เป็น 0.05 และ 0.04 ตามลำดับ จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่นายสาครและนายอากร จะตายภายใน 20 ปีข้างหน้า

<u>วิธีทำ</u>...

....

....

....

....

....

เหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

ตัวอย่าง นายพุทธ เป็นเจ้าของบ้าน 2 หลัง บ้านหลังหนึ่งของเขาอยู่ในกรุงเทพฯ และอีกหลังหนึ่งอยู่ในต่างจังหวัด ถ้าความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้านที่อยู่ในกรุงเทพฯ เท่ากับ 0.30 และความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้านที่อยู่ในต่างจังหวัด เท่ากับ 0.07 จงหาความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้านของนายพุทธทั้ง 2 หลัง

<u>วิธีทำ</u>...

....

....

....

....

....

ค่าคาดหมาย (Expected Value)

ค่าคาดหมายของเหตุการณ์ใด ๆ คือ ค่าที่กำหนดขึ้นมาจากผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด และ weight ที่ให้กับแต่ละผลลัพธ์ การคูณด้วยความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์นั้น ๆ ผลบวกของผลคูณดังกล่าว คือ ค่าคาดหมายที่ต้องการ

ตัวอย่าง ในเรื่องการประกันอัคคีภัย สมมติว่า ค่าเสียหายโดยเฉลี่ยที่ได้รับเท่ากับ 300,000 บาทต่อหลัง และผู้รับประกันทราบว่า

ความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้าน 1 หลัง เท่ากับ 0.33

ความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้าน 2 หลัง เท่ากับ 0.12

ความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้าน 3 หลัง เท่ากับ 0.04

ดังนั้น ผู้รับประกันสามารถหาค่าคาดหมายที่เขาจะต้องจ่ายค่าชดใช้ให้กับผู้เอาประกันภัย เนื่องจากอัคคีภัย ได้ดังนี้

ค่าคาดหมาย (Expected Value)

ค่าคาดหมายที่เขาจะต้องจ่าย เนื่องจากไฟไหม้บ้าน 1 หลัง

....

....

ค่าคาดหมายที่เขาจะต้องจ่าย เนื่องจากไฟไหม้บ้าน 2 หลัง

....

....

ค่าคาดหมายที่เขาจะต้องจ่าย เนื่องจากไฟไหม้บ้าน 3 หลัง

....

....

กฎแห่งจำนวนมาก (Law of large number)

การเสี่ยงภัยของผู้รับประกันภัยที่สำคัญอันหนึ่ง คือ เขาไม่สามารถทราบได้ว่าความน่าจะเป็นของการเกิดความเสียหายที่แท้จริงมีค่าเท่าใดแน่ เขาต้องประมาณความน่าจะเป็นที่แท้จริงนี้โดยการทำการทดลอง ซึ่งผลที่ได้ออกมามักจะมีค่าไม่ถูกต้องนักและขึ้นอยู่กับขนาดความไม่แน่นอน กฎแห่งจำนวนมากจะช่วยแก้ปัญหานี้ได้ เพราะกฎนี้จะบอกผู้รับประกันได้ว่า เขาสามารถจะได้ค่าตอบแทนที่เขาต้องการอย่างถูกต้อง โดยการเพิ่มจำนวนค่าสังเกตให้มากขึ้นโดยไม่จำกัดจำนวน (Infinity)

กฎแห่งจำนวนมากนี้จะบอกเราว่า ถ้าเราไม่ทราบความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่แน่นอนแล้ว เราสามารถที่จะประมาณค่าของมันให้ถูกต้องได้มากขึ้นโดยการเพิ่มจำนวนการสังเกตของเราในวิธีการสุ่มตัวอย่างได้ ค่าเฉลี่ยของจำนวนที่มากของค่าสังเกตทั้งหมดจะประมาณได้ใกล้เคียงกับค่าเฉลี่ยที่แท้จริงของประชากร

กฎแห่งจำนวนมาก (Law of large number)

ตัวอย่าง สมมติว่า เราไม่สามารถทราบความน่าจะเป็นที่คนอายุ 28 ปี จะเสียชีวิตในช่วงที่กำหนดให้ว่ามีค่าเท่าใด แต่เราก็พยายามที่จะประมาณค่านี้ออกมาว่ามีค่าเท่าใดแน่ เราจึงทำการสังเกตคนกลุ่มหนึ่งที่มีอายุ 28 ปี จำนวน 400 คน ปรากฏว่าในปีแรกไม่มีผู้ใดเสียชีวิตเลย ในปีต่อมาเราก็ทำการสังเกตคนอายุ 28 ปี อีกกลุ่มหนึ่ง จำนวน 400 คน เหมือนกัน และปรากฏมีคนเสียชีวิต 2 คน ในปีที่ 3 เราก็ทำการสังเกตคนอีกกลุ่มหนึ่งที่มีลักษณะคล้ายคลึงกัน อายุ 28 ปี จำนวน 400 คน ปรากฏว่ามีคนเสียชีวิต 1 คน ซึ่งถ้าเราทำการทดลองต่อไปลักษณะเดียวกันนี้จำนวนมากครั้ง และถึงแม้ว่าจำนวนคนเสียชีวิตของแต่ละกลุ่มจะไม่เท่ากัน เราก็สามารถบอกได้ว่า โดยเฉลี่ยแล้วคนอายุ 28 ปี จะเสียชีวิต 1 คน จากคน 400 คน หรือจากนิยามของ Empirical Probability

เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นที่คนอายุ 28 ปี จะเสียชีวิตมีค่าเท่ากับ

1/400 พื้นฐานเบื้องต้นของการประกันภัยอาศัยกฎแห่งจำนวนมากทั้งนั้น

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีขาว 5 ลูก สีแดง 3 ลูก และสีดำ 4 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลมา 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีแดง ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาว และความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีแดงหรือสีขาว

2. ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

2.1 แต้ม 3 ทั้ง 2 ลูก 2.2 แต้ม 4 ทั้ง 2 ลูก 2.3 แต้ม 3 คู่กับแต้ม 4

3. ถ้าความน่าจะเป็นที่คนที่อายุ 30 ปี จะมีชีวิตอยู่ต่อไปอีก 10 ปี เท่ากับ 0.9 และความน่าจะเป็นที่คนที่มีอายุ 40 ปี จะมีชีวิตอยู่ต่อไปอีก 10 ปี เท่ากับ 0.8 จงหาความน่าจะเป็นที่คนที่อายุ 30 ปี

3.1 จะมีชีวิตอยู่ถึงอายุ 50 ปี

3.2 จะเสียชีวิตระหว่างอายุ 40 ถึง 50 ปี

3.3 จะเสียชีวิตก่อนอายุ 40 ปี

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

4. ถ้าความน่าจะเป็นที่ทีม A จะชนะทีม B ในการแข่งขันแต่ละเกมเท่ากับ 3/5 จงหาความน่าจะเป็นที่ทีม A จะชนะ 2 เกม หรือมากกว่า 2 เกม ในการแข่งขันทั้งหมด 3 เกม

5. ถ้าความน่าจะเป็นที่ A, B, C และ D จะมีชีวิตอยู่ในช่วงเวลาที่กำหนดเป็น 3/4, 4/5, 5/6 และ 6/7 ตามลำดับ จงหาความน่าจะเป็นที่

5.1 ทั้ง 4 คน จะมีชีวิตอยู่ในช่วงเวลาที่กำหนด

5.2 ทั้ง 4 คน จะเสียชีวิตในช่วงเวลาที่กำหนด

5.3 อย่างน้อย 1 คน จะเสียชีวิตในช่วงเวลาที่กำหนด

5.4 อย่างน้อย 1 คน จะมีชีวิตในช่วงเวลาที่กำหนด

6. ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก และนับผลบวกของแต้มที่ได้ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 7, แต้ม 2, แต้ม 11 และแต้มที่มากกว่า 8 ตามลำดับ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

7. ถ้าความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ชายอายุระหว่าง 20 ปีและ 35 ปี จากชายกลุ่มหนึ่งเป็น 2/3 และความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ชายอายุระหว่าง 20 ปีและ 25 ปี เป็น 1/4 จงหาความน่าจะเป็นที่ที่จะสุ่มได้ชายอายุระหว่าง 20 ปีและ 35 ปี

8. ถ้าความน่าจะเป็นที่คนที่อายุ 30, 40 และ 50 ปี จะมีชีวิตอยู่อีก 10 ปี เท่ากับ 0.8, 0.7 และ 0.6 ตามลำดับ จงหาความน่าจะเป็นที่คนที่อายุ 30 ปี ขณะนี้จะเสียชีวิตระหว่างอายุ 50 ปี และ 60 ปี