Chapter 3
Linear Programming Model

Aj.Pitipat Nittayakamolphun

Topics

- 1. ลักษณะปัญหาที่ใช้กำหนดการเชิงเส้น
- 2. สมมติฐานของกำหนดการเชิงเส้น
- 3. โครงสร้างของกำหนดการเชิงเส้น
- 4. การสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น
- 5. การแก้ปัญหาตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีกราฟ
- 6. การแก้ปัญหาตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

1. Characteristics of linear programming problem

กำหนดการเชิงเส้นส่วนใหญ่จะนำไปใช้แก้ปัญหาด้านการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด โดยมีจุดมุ่งหมายที่จะจัดสรรทรัพยากรเหล่านี้ให้เกิดประโยชน์สูงสุด หรือเสียค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทั้งด้านการผลิต การเงิน การลงทุนฯ

2.Hypothesis of linear programming

2.1 ความแน่นอน (Certainty)

2.2 มีความเป็นสัดส่วน (Proportionality)

2.3 มีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง (linear relationship)

2.4 ตัวแปรมีค่าต่อเนื่อง (Continuous variable)

2.5 ตัวแปรมีค่าไม่ติดลบ (Non-negativity)

2.6 ปัญหามีวัตถุประสงค์เดียว (One objective)

2.1 Certainty

หมายความว่าต้องทราบข้อมูลนำเข้าต่างๆอย่างแน่นอน เช่น จำนวนทรัพยากรที่มีอยู่จำนวนการใช้ทรัพยากรในการผลิตสินค้า กำไรต่อหน่วย ต้นทุนต่อหน่วย ฯลฯ

2.2 Proportionality

Example

1. ผลิตขนม 1 ชิ้นได้กำไร ชิ้นละ 10 บาท ถ้าผลิตขนม 10 ชิ้นจะได้กำไรกี่บาท ถ้าผลิต X ชิ้นจะได้กำไรเท่ากับ ?

2. ในการผลิตแซนด์วิช 1 ชิ้น ใช้ขนมปัง 2 แผ่น ถ้าผลิต 10 ชิ้นจะใช้ขนมปังกี่แผ่น และถ้าผลิต Y ชิ้นจะใช้ขนมปังเท่ากับ ?

Answer

1. 10X บาท
2. 2Y แผ่น

2.3 Linear relationship

Example

กิจการผลิตนาฬิกา 2 แบบ คือ นาฬิกาตั้งโต๊ะและนาฬิกาติดผนัง กำไรที่ได้จากการผลิตนาฬิกาตั้งโต๊ะรวมกับกำไรที่ได้รับจากการผลิตนาฬิกาติดผนังเป็นกำไรรวมของกิจการ ถ้านำกำไรที่ผลิตนาฬิกาตั้งโต๊ะคิดเป็นเรือนละ 150 บาท ผลิตเป็นจำนวน X เรือน และกำไรในการผลิตนาฬิกาติดผนังคิดเป็นเรือนละ 200 บาท ผลิตเป็นจำนวน Y เรือน สามารถสร้างฟังก์ชันกำไรรวมได้อย่างไร

2.3 Linear relationship

Profit = 150X + 200Y bath

หรือการใช้เวลาทำงานของแผนกผลิตในการผลิตนาฬิกาตั้งโต๊ะ 1เรือน ใช้เวลา 10 นาที ผลิตนาฬิกาติดผนัง 1 เรือน ใช้เวลา 30 นาที เวลาผลิตรวมทั้งสิ้นจะได้มาจากเวลาที่ใช้ในการผลิตนาฬิกาตั้งโต๊ะคือ 10X นาที รวมกับเวลาที่ใช้ในการผลิตนาฬิกาติดผนัง คือ 30Y นาที ดังนั้นรวมแล้วเวลาในแผนกผลิตเท่ากับเท่าไร

Time = 10X + 30Y minutes

2.4 Continuous variable

ตัวแปรทุกตัวในตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นอาจจะมีค่าเป็นเศษส่วนหรือทศนิยมได้ เช่น ผลการคำนวณกำหนดให้ผลิตนาฬิกาตั้งโต๊ะเป็นจำนวน 46.82 เรือน เป็นต้น

2.5 Non-Negativity

ตัวแปรทุกตัวในตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นจะต้องมีค่าไม่ต่ำกว่าศูนย์ (≥ 0)

2.6 One objective

ลักษณะของปัญหาที่จะใช้ตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นจะมีวัตถุประสงค์ที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือหาค่าต่ำสุด โดยจะมีเพียงวัตถุประสงค์เดียวเท่านั้น

แต่ถ้าหากพบปัญหามากกว่าหนึ่งปัญหาแล้วถ้าจะใช้ตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น จำเป็นต้องเลือกว่าวัตถุประสงค์ใดสำคัญกว่า และเขียนวัตถุประสงค์ที่สำคัญกว่าเป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และเขียนวัตถุประสงค์ที่สำคัญรองลงมาเป็นฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับ

3. Structure of linear programming

3.1 ตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ (Decision variable)

3.2 ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective function)

3.3 เงื่อนไขบังคับ (Constraints)

3.4 ข้อจำกัด (Restriction)

3.1 Decision variable

คือสิ่งที่ต้องการหาผลลัพธ์ การกำหนดตัวแปรตัดสินใจมีความสำคัญมาก มักจะนิยมกำหนดให้เป็นตัวอักษร อาทิ X_1 , X_2 , X_3 , X_4 ,..., X_n หรือ A, B, C,...

3.2 Objective function

ตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นจะมีวัตถุประสงค์เดียว ซึ่งจะอยู่ในรูป Maximize or Minimize เท่านั้น

รูปแบบของฟังก์ชันวัตถุประสงค์

Maximize $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots + C_nX_n$

หรือ Minimize $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots + C_nX_n$

โดยกำหนดให้ Z = ผลรวมของฟังก์ชันวัตถุประสงค์

C_j = สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่ j

3.3 Constraints

คือสมการหรืออสมการที่แสดงถึงขีดจำกัดในด้านทรัพย์กร หรือเงื่อนไขต่างๆ ของปัญหา

รูปแบบของเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n}(\leq \text{ หรือ } \geq \text{ หรือ } =)\boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n}(\leq \text{ หรือ } \geq \text{ หรือ } =)\boldsymbol{b_2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n}(\leq \text{ หรือ } \geq \text{ หรือ } =)\boldsymbol{b_m} \end{array}$$

โดยที่ $\boldsymbol{a_{ij}}$ = สัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ j ในเงื่อนไขบังคับข้อที่ i

$\boldsymbol{b_i}$ = ค่าทางขวามือของเงื่อนไขบังคับข้อที่ i

3.3 Constraints

<u>Example</u>

การผลิตนาฬิกาตั้งโต๊ะใช้เวลา 10 นาที ผลิตนาฬิกาติดผนังใช้เวลา 30นาที ถ้ามีเวลาในการผลิตวันละ 32 ชั่วโมงหรือ 1,920 นาที จงเขียนเงื่อนไขบังคับในด้านความจำกัดของเวลาในการผลิต

$$10X + 30Y \leq 1{,}920 \text{ minutes}$$

3.4 Restriction

แสดงถึงกรอบของค่าตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ เพื่อให้สอดคล้องกับสมมติฐานที่กำหนด โดยจะเขียนต่อจากเงื่อนไขบังคับข้อสุดท้าย อาทิ $X_j \geq 0$ (j = 1, 2, 3, 4)

Conclusion to linear programming model

Maximize (Minimize) Z = $\boldsymbol{C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n}$

Subject to

$$\boldsymbol{a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n}(\leq \text{ หรือ } \geq \text{ หรือ } =)\boldsymbol{b_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n}(\leq \text{ หรือ } \geq \text{ หรือ } =)\boldsymbol{b_2}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\boldsymbol{a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n}(\leq \text{ หรือ } \geq \text{ หรือ } =)\boldsymbol{b_m}$$
$$\boldsymbol{X_j \geq 0}$$

โดยที่ $\boldsymbol{X_j}$ = ตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ

$\boldsymbol{C_j}$ = สัมประสิทธิ์ของตัวแปร j ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$\boldsymbol{a_{ij}}$ = อัตราการใช้ทรัพยากรของตัวแปร j ในเงื่อนไขบังคับ i

$\boldsymbol{b_i}$ = จำนวนทรัพยากรที่มีอยู่ของเงื่อนไขบังคับ i

4. Creation linear programming model

Example 3.1 ปัญหาการกำหนดสัดส่วนการผลิต

Example 3.2 ปัญหาการจัดสรรเงินลงทุน

Example 3.3 ปัญหาการเลือกสื่อโฆษณา

Example 3.4 ปัญหาการจัดสรรพนักงาน

Example 3.5 ปัญหาด้านโภชนาการ

Example 3.6 ปัญหาการขนส่ง

Example 3.7 ปัญหาการกำหนดงาน

Ex 3.1 Product mix problem

Step 1 กำหนดตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ

กำหนดให้ X_1 = จำนวนผลิตเสื้อ (ตัว)

X_2 = จำนวนผลิตกระโปรง (ตัว)

Step 2 เขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์

Maximize $Z = 200X_1 + 220X_2$

Step 3 เขียนเงื่อนไขบังคับ

$2X_1 + X_2 \leq 100$ ชั่วโมง

$1.5X_1 + 2X_2 \leq 150$ เมตร

Ex 3.1 Product mix problem

Step 4 เขียนข้อจำกัด

$X_1, X_2 \geq 0$

conclusion

Maximize $Z = 200X_1 + 220X_2$

Subject to

$2X_1 + X_2 \leq 100$ ชั่วโมง

$1.5X_1 + 2X_2 \leq 150$ เมตร

$X_1, X_2 \geq 0$

Ex 3.2 Investment problem

Maximize $Z = 0.02X_1 + 0.04X_2 + 0.05X_3 + 0.01X_4$

Subject to

$$X_1 \geq 500{,}000$$

$$X_4 \geq 100{,}000$$

$$X_1 + X_4 \leq 1{,}000{,}000$$

$$X_2 \leq 500{,}000$$

$$X_3 \leq 300{,}000$$

$$X_2 + X_3 \leq 700{,}000$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1{,}500{,}000$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Ex 3.3 Media selection problem

Maximize $Z = 100{,}000X_1 + 30{,}000X_2 + 200{,}000X_3$

Subject to

$$5{,}000X_1 + 3{,}000X_2 + 25{,}000X_3 \leq 500{,}000$$

$$X_1 \leq 15$$

$$X_2 \leq 20$$

$$X_3 \leq 10$$

$$X_1 \geq 5$$

$$X_2 \geq 5$$

$$X_3 \geq 5$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Ex 3.4 Staff allocation problem

Minimize $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

Subject to

$$X_1 + X_2 \geq 5$$

$$X_2 + X_3 \geq 10$$

$$X_3 + X_4 \geq 6$$

$$X_4 + X_5 \geq 10$$

$$X_5 + X_6 \geq 8$$

$$X_6 + X_1 \geq 3$$

$$X_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, \ldots, 6)$$

Ex 3.5 Nutrition problem

Minimize $Z = 6X_1 + 10X_2 + 4X_3$

Subject to

$$30X_1 + 42X_2 + 15X_3 \geq 200 \quad \text{(protein)}$$

$$28X_1 + 25X_2 + 30X_3 \leq 300 \quad \text{(carbohydrate)}$$

$$10X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 50 \quad \text{(fat)}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Ex 3.6 Transportation problem

Minimize $Z = 3X_{11} + 4X_{12} + 8X_{13} + 5X_{21} + X_{22} + 6X_{23}$

Subject to

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 5{,}000$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 7{,}000$$

$$X_{11} + X_{21} = 4{,}000$$

$$X_{12} + X_{22} = 6{,}000$$

$$X_{13} + X_{23} = 2{,}000$$

$$X_{ij} \geq 0 \ (i = 1, 2) \ (j = 1, 2, 3)$$

Ex 3.7 Assignment problem

Maximize $Z = 9X_{11} + 10X_{12} + 10X_{13} + 5X_{21} + 7X_{22} + 8X_{23}$

$+ 9X_{31} + 9X_{32} + 8X_{33}$

Subject to

$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1$

$X_{ij} = 0$ or 1 $(i = 1, 2, 3)$ $(j = 1, 2, 3)$