

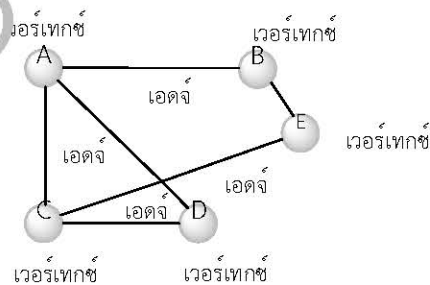
## บทที่ 7

### กราฟ

กราฟ (Graph) เป็นโครงสร้างข้อมูลแบบไม่ใช้เชิงเส้น (n-Linear List) ที่สมาชิกแต่ละตัวสามารถมีสมาชิกตัวถัดไปได้มากกว่าหนึ่งตัว เช่นเดียวกับโครงสร้างข้อมูลแบบต้นไม้ (tree) โดยที่โครงสร้างข้อมูลแบบกราฟมีความแตกต่างจากโครงสร้างข้อมูลแบบต้นไม้ คือ สมาชิกแต่ละตัวสามารถมีตัวก่อนหน้าได้มากกว่าหนึ่งตัว โครงสร้างข้อมูลแบบกราฟนำมาใช้ประโยชน์ในด้านต่าง ๆ อาทิ การสร้างแบบจำลองวงจรไฟฟ้า แผนที่ทางหลวง การวิเคราะห์ห่วงจรไฟฟ้า และการค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุด การทำแผนที่ การขนส่ง วิศวกรรมไฟฟ้า เครือข่ายคอมพิวเตอร์ เส้นทางการบิน เป็นต้น เนื้อหานี้จะอธิบายถึงนิยามกราฟ อินดีกรีและเอทดีกรี กราฟสมบูรณ์ เส้นทาง กราฟมีน้ำหนัก การแทนที่กราฟด้วยเมทริกซ์ การประกาศโครงสร้างกราฟ การดำเนินการกับกราฟ การท่องเข้าไปในกราฟ การค้นหาในแนวลึก การค้นหาในแนวกว้าง อัลกอริทึมในการค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุด ต้นไม้ทอดข้าม และการแทนที่กราฟด้วยวิธีอื่น ๆ ตามรายละเอียดของเนื้อหาต่อไปนี้

#### นิยามกราฟ

โครงสร้างของกราฟประกอบด้วยกลุ่มของโหนดที่เรียกว่า เวกซ์ (Vertex) และกลุ่มของเส้นที่ใช้เชื่อมโยงเวกซ์เรียกว่า เอดจ์ (Edge) ดังแสดง



#### ภาพที่ 7.1 แสดงกราฟ

ที่มา : ภาพโดยแก่ง จันทรินทร์. 2564

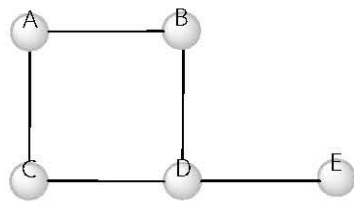
หากกำหนดให้กราฟแทนด้วยสัญลักษณ์  $G$  เวก์เทกซ์แทนด้วย  $V$  และเอดจ์แทนด้วย  $E$  สามารถนิยามกราฟได้ดังนี้ (สมจิตต์ ลิขิตถาวร, 2550 หน้า 305-306)

$$G = (V,E)$$

ซึ่ง  $V(G)$  คือ เซตของเวก์เทกซ์ที่ไม่ใช่เซตว่าง (Nonempty) และมีจำนวนจำกัด (finite)

$E(G)$  คือ เซตของเอดจ์ เขียนด้วยคู่ของเวก์เทกซ์

พิจารณากราฟจากภาพที่ 7.1



$$V = \{A, B, C, D, E\}$$

$$E = \{(AB), (AC), (BD), (CD), (DE)\}$$

ภาพที่ 7.1 แสดงกราฟ

ที่มา : ดัดแปลงจาก Das. (2006 p. 173)

จะได้ เวก์เทกซ์ คือ A B C D E F

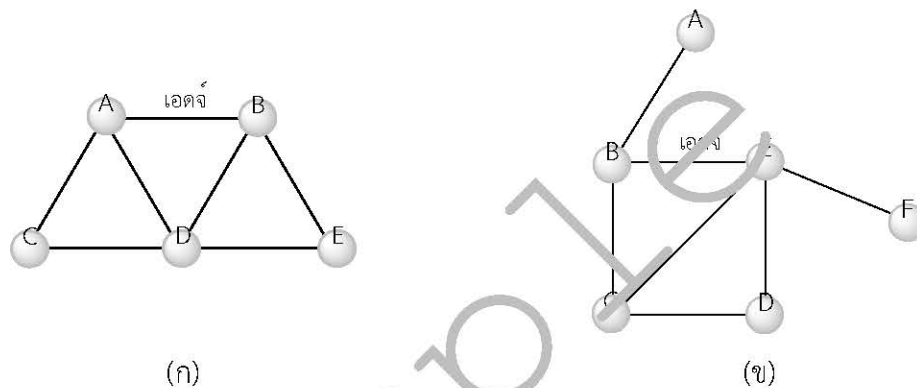
เอดจ์ คือ เส้นที่เชื่อมโยงจาก A ไป B เส้นที่เชื่อมโยงจาก A ไป C เส้นที่เชื่อมโยงจาก A ไป D  
เส้นที่เชื่อมโยงจาก B ไป E เส้นที่เชื่อมโยงจาก C ไป D เส้นที่เชื่อมโยงจาก C ไป E

จากภาพที่ 7.1 เวก์เทกซ์ประกอบด้วย A B C D E F เขียนในรูปเซตของเวก์เทกซ์  $V = \{A, B, C, D, E, F\}$  ส่วนเอดจ์ คือ เส้นที่เชื่อมโยงจาก A ไป B, เส้นที่เชื่อมโยงจาก A ไป C, เส้นที่เชื่อมโยงจาก A ไป D, เส้นที่เชื่อมโยงจาก B ไป E, เส้นที่เชื่อมโยงจาก C ไป D และเส้นที่เชื่อมโยงจาก C ไป E สามารถแจกแจงเอดจ์ด้วยคู่ของเวก์เทกซ์ที่เอดจ์นั้นเชื่อมโยง โดยคั่นระหว่างคู่เวก์เทกซ์ด้วยเครื่องหมายจุลภาค (Comma) เขียนในรูปเซตของเอดจ์ จะได้  $E = \{(AB), (AC), (AD), (BE), (CD), (CE)\}$  โดยแต่ละเส้นเชื่อม

$e = (u, v)$  เป็นคู่ลำดับของ  $u$  และ  $v$  เมื่อ  $u$  และ  $v$  คือเวอร์เทกซ์ใด ๆ ในกราฟ  $G$  ที่มีเส้นเชื่อมโยงกัน (เบญจมาศ ปัญญางาม, 2564 และ สมจิตต์ ลิขิตถาวร, 2550 หน้า 307)

**โครงสร้างกราฟ** แบ่งตามลักษณะการเชื่อมโยง แบ่งเป็น 2 ประเภท คือ กราฟแบบไม่มีทิศทาง (Undirected Graph) และกราฟแบบมีทิศทาง (Directed Graph) มีรายละเอียดดังนี้

1. กราฟแบบไม่มีทิศทาง เป็นกราฟที่ไม่แสดงทิศทางหรือเส้นเชื่อมโยงระหว่างเวอร์เทกซ์ไม่มีหัวลูกศร จะเรียกว่า เอดจ์ (Edge) จากเวอร์เทกซ์ต้นทางไปยังเวอร์เทกซ์ปลายทางและเกิดการผันกลับของเวอร์เทกซ์ปลายทางไปยังเวอร์เทกซ์ต้นทางได้ ดังแสดง



ภาพที่ 7.2 กราฟแบบไม่มีทิศทางแบบต่าง ๆ

ที่มา : ภาพ (ก) ดัดแปลงจาก McMillan, 2014 pp. 140 และภาพ (ข) ดัดแปลงจาก Gilberg และ Forouzan, 2005 pp. 482

จากภาพที่ 7.2 (ก) จะได้ เวอร์เทกซ์ คือ  $\{A, B, C, D, E\}$  มีเอดจ์ทั้งหมด 7 ชุด คือ เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $A$  ไป  $B$  เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $A$  ไป  $C$  เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $A$  ไป  $D$  เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $B$  ไป  $D$  เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $B$  ไป  $E$  เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $C$  ไป  $D$  เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $D$  ไป  $E$  ดังนี้

$$V = \{A, B, C, D, E\}$$

$$E = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, D), (B, E), (C, D), (D, E)\}$$

หรือ  $E = \{(B, A), (C, A), (D, A), (D, B), (E, B), (D, C), (E, D)\}$

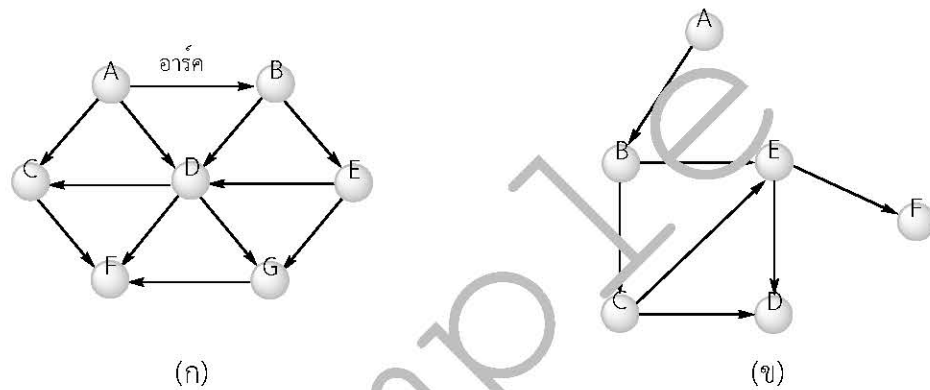
ภาพ (ข) จะได้ เวอร์เทกซ์ คือ  $\{A, B, C, D, E, F\}$  มีเอดจ์ทั้งหมด 5 ชุด คือ เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $A$  ไป  $B$  เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $A$  ไป  $C$  เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $B$  ไป  $D$  เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $B$  ไป  $E$  เส้นที่เชื่อมโยงจาก  $C$  ไป  $F$  เขียนได้ดังนี้

$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$E = \{(A, B), (A, C), (B, D), (B, E), (C, F)\}$$

หรือ  $E = \{(B,A), (C, A), (D, B), (E, B), (F, C)\}$

2. กราฟแบบมีทิศทางหรือไดกราฟ เป็นกราฟที่แสดงทิศทางหรือเส้นเชื่อมโยงระหว่างเวอร์เทกซ์มีหัวลูกศร เรียกว่า อาร์ค (Arcs) จากเวอร์เทกซ์ต้นทางไปยังเวอร์เทกซ์ปลายทางเท่านั้น ดังแสดง



ภาพที่ 7.3 กราฟแบบมีทิศทางแบบต่าง ๆ

ที่มา : (ก) ดัดแปลงจาก Weiss M. A., 2014 pp. 380 และ (ข) ดัดแปลงจาก Gilberg และ Forouzan, 2005 p. 482

จากภาพที่ 7.3 ภาพ (ก) จะได้ เวอร์เทกซ์ คือ {A B C D E F G} มีเอ็ดจ์ทั้งหมด 12 ชุด คือ เส้นที่เชื่อมโยงจาก A ไป B เส้นที่เชื่อมโยงจาก A ไป C เส้นที่เชื่อมโยงจาก A ไป D เส้นที่เชื่อมโยงจาก B ไป D เส้นที่เชื่อมโยงจาก B ไป E เส้นที่เชื่อมโยงจาก C ไป F เส้นที่เชื่อมโยงจาก D ไป C เส้นที่เชื่อมโยงจาก D ไป F เส้นที่เชื่อมโยงจาก D ไป G เส้นที่เชื่อมโยงจาก E ไป D เส้นที่เชื่อมโยงจาก E ไป G และเส้นที่เชื่อมโยงจาก G ไป F เขียนได้ดังนี้

$$V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

$$E = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, D), (B, E), (C, F), (D, C), (D, F), (D, G), (E, D), (E, G),$$

(G, F)\}