บทที่ 1

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ลิมิตและความต่อเนื่องเป็นแนวคิดพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการศึกษาแคลคูลัสและการวิเคราะห์จำนวนจริง การเข้าใจเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการประยุกต์ใช้ในด้านต่าง ๆ ของแคลคูลัส เช่น การนิยามอนุพันธ์และการอินทิเกรต ซึ่งทำให้ทราบถึงพฤติกรรมของฟังก์ชันที่เราสนใจ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงความหมายของลิมิต ลิมิตซ้ายและลิมิตขวา ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลิมิต ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์ และความต่อเนื่อง

ความหมายของลิมิต

ลิมิตของฟังก์ชันเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของปริมาณสองอย่างที่มีความสัมพันธ์กันและนำไปสู่ค่าคงตัวของปริมาณทั้งสองเหล่านั้น เพื่อให้มีความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องลิมิต กมล เอกไทยเจริญ (2521: 126) ได้ให้แนวคิดเกี่ยวกับเรื่องนี้ผ่านตัวอย่างการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันที่แสดงได้ดังนี้

ตัวอย่าง 1.1 ถ้ากำหนดฟังก์ชัน

$$f(x)=x+3 \text{ และ } g(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

พิจารณาฟังก์ชัน g ถ้า $x\neq 3$ แล้ว จะได้ว่า

$$g(x)=\frac{x^2-9}{x-3}=x+3=f(x)$$

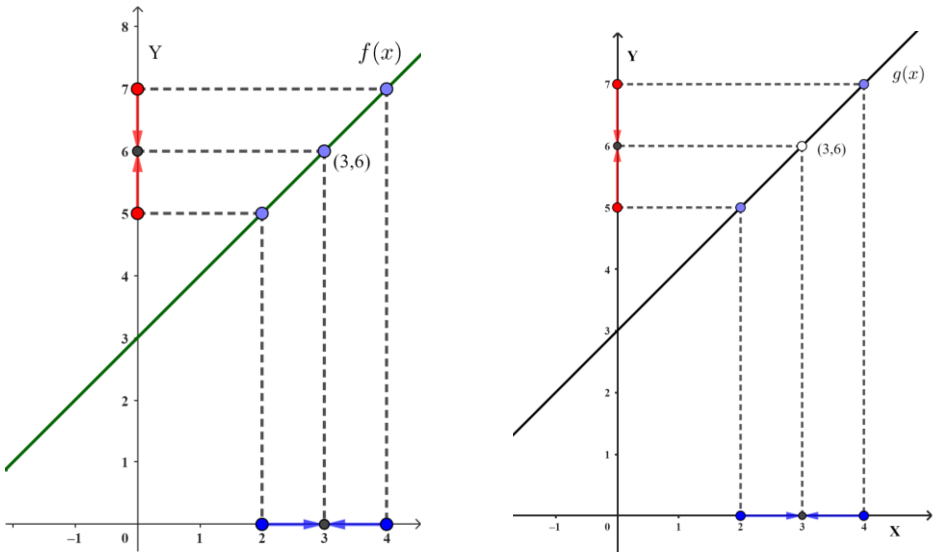
เมื่อเราคำนวณค่าของ $f(x)$ และ $g(x)$ สำหรับ x บางค่าที่มีค่าเข้าใกล้ 3 จะได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1.1 แสดงค่าของฟังก์ชัน f และ g

x	2	2.5	2.9	2.99	2.999	3.001	3.1	3.5	4
$f(x)$	5	5.5	5.9	5.99	5.999	6.001	6.1	6.5	7
$g(x)$	5	5.5	5.9	5.99	5.999	6.001	6.1	6.5	7

เมื่อพิจารณาค่าของ $f(x)$ และ $g(x)$ จากตารางที่ 1.1 จะเห็นว่า ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทั้งค่าที่เข้าใกล้ในลักษณะที่ $x<3$ ซึ่งจะกล่าวว่า x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางซ้าย หรือในลักษณะที่ $x>3$ ซึ่งจะกล่าวว่า x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางขวา เราจะได้ $f(x)$ และ $g(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 6 และเมื่อพิจารณาการหาค่าฟังก์ชัน ถ้า $x=3$ จะได้ว่า

$f(x)=6$ ส่วนฟังก์ชัน $g(x)=\frac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีค่า แต่อย่างไรก็ตาม จากรูปที่ 1.1 จะเห็นว่าทั้ง f และ g มีค่าเข้าใกล้ 6 ในขณะที่ x เข้าใกล้ 3 ดังนั้น f และ g มีลิมิตเป็น 6 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to 3} f(x)=6$ และ $\lim_{x\to 3} g(x)=6$



รูปที่ 1.1 แสดงกราฟฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g

ตัวอย่างที่ 1.2 ถ้ากำหนดฟังก์ชัน

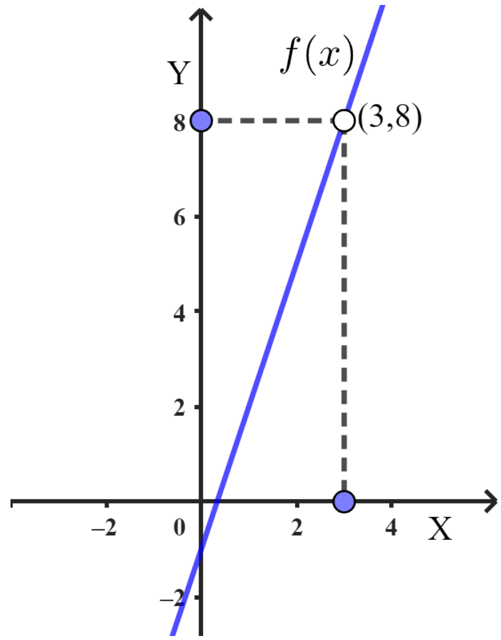
$$f(x)=\frac{3x^2-10x+3}{x-3}$$

จะได้ว่า f หาค่าได้ทุก ๆ ค่า ของ x ยกเว้น $x=3$ ทำให้ $f(x)=\frac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีค่า เมื่อเราคำนวณค่าของ $f(x)$ สำหรับ x บางค่าที่เข้าใกล้ 3 จะได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1.2 แสดงค่าของฟังก์ชัน f

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999	3.00001	3.0001	3.001	3.01
$f(x)$	7.7	7.97	7.997	7.9997	7.99997	8.00003	8.0003	8.003	8.03

และเมื่อพิจารณากราฟของฟังก์ชันดังรูปที่ 1.2 จะเห็นว่ากราฟเป็นเส้นตรงและมีจุดที่ขาดตอนอยู่ที่จุด $(3,8)$



รูปที่ 1.2 แสดงกราฟฟังก์ชัน f

อย่างไรก็ตาม ในการคำคำนวณหาลิมิตเราอาจใช้วิธีการแยกตัวประกอบของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ดังนี้

$$f(x)=\frac{(3x-1)(x-3)}{x-3}$$

ถ้า $x\neq 3$ จะได้ว่า $(x-3)\neq 0$ ดังนั้นเราสามารถหารทั้งเศษและส่วนของ $f(x)$ ด้วย $(x-3)$ ทำให้ได้ว่า

$$f(x)=3x-1; x\neq 3$$

ซึ่งจะพบว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 8 เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ดังนั้นสรุปได้ว่า $\lim_{x\to 3} f(x)=8$

ตัวอย่างที่ 1.3 ถ้ากำหนดฟังก์ชัน

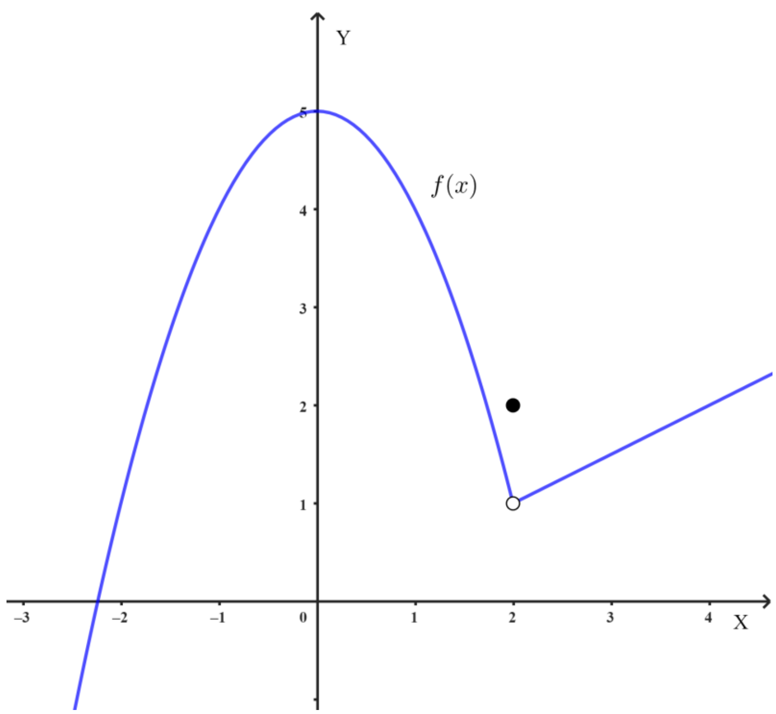
$$f(x)=\begin{cases} 5-x^2 & ; x<2 \\ 2 & ; x=2 \\ \frac{1}{2}x & ; x>2 \end{cases}$$

เราสามารถคำนวณค่าของ $f(x)$ สำหรับ x บางค่าที่มีค่าเข้าใกล้ 2 ได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1.3 แสดงค่าของฟังก์ชัน f

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.9	1.39	2.00001	1.000005
1.99	1.0399	2.0001	1.00005
1.999	1.003999	2.001	1.0005
1.9999	1.0004	2.01	1.005
1.99999	1.00004	2.1	1.05

จากตารางที่ 1.2 เมื่อพิจารณาค่าของ $f(x)$ ที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ในลักษณะที่ $x < 2$ ซึ่งจะกล่าวว่า x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย หรือในลักษณะที่ $x > 2$ ซึ่งจะกล่าวว่า x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา จะได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 จะได้ว่า $f(x)$ มีลิมิตเป็น 1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ แม้ว่าในกรณีนี้การแทนค่าฟังก์ชันจะมีค่าเท่ากับ 2 แต่เราไม่ได้ใช้ค่านี้เป็นค่าลิมิตดังแสดงในรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 แสดงกราฟของฟังก์ชัน f

ตัวอย่างที่ 1.4 ถ้ากำหนดฟังก์ชัน

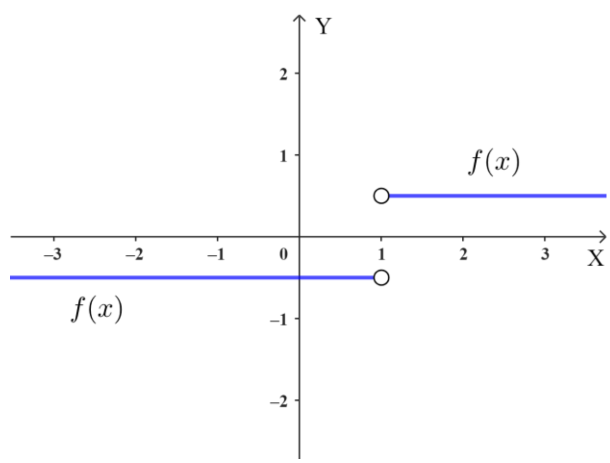
$$f(x)=\frac{x-1}{2|x-1|}$$

เราสามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ยกเว้น $x=1$ ที่ทำให้ $f(x)=\frac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีค่า และเมื่อพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับ x บางค่าที่มีค่าเข้าใกล้ 1 ได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1.4 แสดงค่าของฟังก์ชัน f

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.9	-0.5	1.00001	0.5
0.99	-0.5	1.0001	0.5
0.999	-0.5	1.001	0.5
0.9999	-0.5	1.01	0.5
0.99999	-0.5	1.1	0.5

จากตารางที่ 1.4 จะเห็นว่า ถ้า $x<1$ จะได้ว่า $|x-1|=-(x-1)$ ซึ่งทำให้ $f(x)=-0.5$ แต่ถ้า $x>1$ จะได้ว่า $|x-1|=(x-1)$ ทำให้ $f(x)=0.5$ ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 แสดงกราฟของฟังก์ชัน f

ในกรณีนี้จะได้ว่าค่าของฟังก์ชัน f มีค่าไม่เท่ากันเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 เราจะกล่าว ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ 1 นั่นเอง

จากตัวอย่างที่กล่าวมา จะเห็นได้ว่าแนวคิดเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันนั้น เราสามารถพิจารณาจากการแทนค่าฟังก์ชันและพิจารณากราฟของฟังก์ชันเพื่อประกอบแนวคิดได้ ในการพิจารณา $\lim_{x \to a} f(x)$ เราต้องคำนึงถึงค่าของ $f(x)$ ที่จุดอื่น ๆ ในโดเมนของฟังก์ชัน (D_f) ที่อยู่ใกล้ ๆ จุด a ซึ่งเรียกจุดนี้ว่า จุดลิมิต ดังนั้นเพื่อให้เข้าใจเกี่ยวกับจุดลิมิต ดำรงค์ ทิพย์โยธา ณัฏฐนาถ ไตรภพ และยุวรีย์ พันธ์กล้า (2563: 3) ได้ให้นิยามไว้ดังนี้

นิยาม 1.1 ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ และ $a \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า a เป็นจุดลิมิต (limit point) ของ E ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก δ ที่กำหนดให้ จะได้ว่า $\left((a-\delta, a+\delta)-\{a\}\right) \cap E \neq \varnothing$

ตัวอย่าง 1.5

1. ให้ $E_1 = [2,3]$ จะได้ว่า จุดทุกจุดใน E_1 เป็นจุดลิมิตของ E_1
2. ให้ $E_2 = (2,3)$ จะได้ว่า จุดทุกจุดใน E_2 รวมทั้ง $2,3$ ก็เป็นจุดลิมิตของ E_2 ด้วย
3. ให้ $E_3 = (2,3) \cup \{4\}$ จะได้ว่า จุดทุกจุดใน $[2,3]$ เป็นจุดลิมิตของ E_3 แต่ 4 ไม่เป็นจุดลิมิตของ E_3 เนื่องจากมี $\delta = 0.5$ ซึ่งทำให้ $\left((4-\delta, 4+\delta)-\{4\}\right) \cap E_3 = \left((3.5, 4.5)-\{4\}\right) \cap E_3 = \varnothing$

จากการพิจารณาจุดลิมิตในบทนิยาม 1.1.1 ทำให้ได้ความรู้พื้นฐานที่สำคัญในการนิยามลิมิตของฟังก์ชันซึ่ง คชินทร์ โกกนุทาภรณ์ (มปป.: 28) ได้ให้นิยามลิมิตของฟังก์ชันไว้ดังนี้

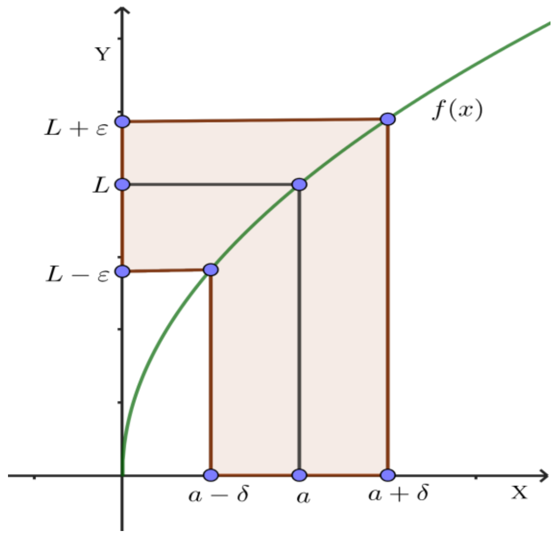
บทนิยาม 1.2 ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ และ $a \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า a เป็นสมาชิกของ E และ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดค่าที่ทุกจุด a กล่าวว่า f มีลิมิตที่จุด a เท่ากับ L ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกค่าของ $\varepsilon > 0$ จะต้องมีค่า $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ทุก ๆ ค่า $x \in E$

$$0 < |x-a| < \delta \text{ แล้ว } |f(x)-L| < \varepsilon$$

เป็นจริง (โดยปกติ เซต E คือโดเมนของฟังก์ชันที่กล่าวถึง) เพื่อให้เข้าใจเกี่ยวกับนิยาม 1.1.2 มากยิ่งขึ้น รูปภาพและตัวอย่างถูกแสดงไว้ดังนี้



รูปที่ 1.5 แสดงนิยามลิมิตของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 1.6 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 2}(x+3)=5$ โดยใช้นิยามของลิมิต

วิธีทำ สำหรับทุกค่าของ $\varepsilon>0$ จะต้องมีค่า $\delta>0$ ซึ่งทำให้ $0<|x-2|<\delta$ แล้ว $|(x+3)-5|<\varepsilon$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ เลือก $\delta=\varepsilon$ โดยที่ $0<|x-2|<\delta$

พิจารณา

$$|(x+3)-5|=|x+3-5|$$

$$=|x-2|$$

เนื่องจาก $|x-2|<\delta$ จะได้ว่า

$$|(x+3)-5|=|x+3-5|<\delta$$

เลือก $\delta=\varepsilon$ จะได้ว่า

$$|(x+3)-5|<\varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะมี $\delta=\varepsilon$ ที่ทำให้ $0<|x-2|<\delta$ แล้ว $|(x+3)-5|<\varepsilon$

นั่นคือ $\lim_{x\to 2}(x+3)=5$

ตัวอย่าง 1.7 จงแสดงว่า $\lim_{x\to -1}(4x+5)=1$ โดยใช้นิยามของลิมิต

วิธีทำ สำหรับทุกค่าของ $\varepsilon > 0$ จะต้องมีค่า $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $0<|x-(-1)|<\delta$ แล้ว $|(4x+5)-1|<\varepsilon$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ เลือก $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$ โดยที่ $0<|x+1|<\delta$

พิจารณา

$$\begin{aligned}|(4x+5)-1| &= |4x+5-1|\\ &= |4x+4|\\ &= 4|x+1|\end{aligned}$$

เนื่องจาก $|x+1|<\delta$ จะได้ว่า

$$|(4x+5)-1| = 4|x+1|$$

เลือก $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$ จะได้ว่า

$$|(4x+5)-1| = 4|x+1| < \delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)=\varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$ ที่ทำให้ $0<|x-(-1)|<\delta$ แล้ว $|(4x+5)-1|<\varepsilon$ นั่นคือ $\lim_{x\to -1}(4x+5)=1$

ลิมิตซ้ายและลิมิตขวา

ในการพิจารณาองค์ประกอบของลิมิตเพิ่มเติม ธีรศักดิ์ อุรัจนานนท์ (2556: 11) ได้ให้นิยามเกี่ยวกับลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาไว้ดังนี้

บทนิยาม 1.3 ให้ f นิยามบนช่วงเปิด (c,a) จะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ M_1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้าย และเขียน $\lim_{x\to a^-} f(x)=M_1$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε จะสามารถหาจำนวนจริงบวก δ ได้อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ $|f(x)-M_1|<\varepsilon$ สำหรับทุกค่า x ที่ $a-\delta<x<a$ และเรียก M_1 ว่า ลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a

บทนิยาม 1.4 ให้ f นิยามบนช่วงเปิด (a,b) จะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ M_2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา และเขียน $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=M_2$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε จะสามารถหาจำนวนจริงบวก δ ได้อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ $|f(x)-M_2|<\varepsilon$ สำหรับทุกค่า x ที่ $a-\delta<x<a$ และเรียก M_2 ว่า ลิมิตขวาของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a

ตัวอย่าง 1.8 จงหา $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ พบว่าอยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนดนั่นคือ $\dfrac{0}{0}$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}&=\frac{\sqrt{3^2-6(3)+9}}{3-3}\\&=\frac{\sqrt{9-18+9}}{3-3}\\&=\frac{0}{0}\end{aligned}$$

ดังนั้นจึงเปลี่ยนแปลงรูปแบบฟังก์ชันใหม่ดังนี้

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$$

เนื่องจาก $\sqrt{a^2}=|a|$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x-3}$$

เนื่องจาก $x<3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x-3}&=\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{x-3}\\&=\lim_{x\to 3^-}(-1)\\&=-1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=-1$

ตัวอย่าง 1.9 จงหา $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ พบว่าอยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนดนั่นคือ $\dfrac{0}{0}$

เนื่องจาก
$$\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\frac{\sqrt{3^2-6(3)+9}}{3-3}$$
$$=\frac{\sqrt{9-18+9}}{3-3}$$
$$=\frac{0}{0}$$

ดังนั้นสามารถเปลี่ยนแปลงรูปแบบฟังก์ชันใหม่ดังนี้

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{\sqrt{x^2-3^3}}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$$

เนื่องจาก $\sqrt{a^2}=|a|$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{|x-3|}{x-3}$$

เนื่องจาก $x>3$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3^+}1$$
$$=1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=1$

ตัวอย่าง 1.10 จงหา $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} \neq \lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

ดังนั้น $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ หาค่าไม่ได้

จากการพิจารณาลิมิตซ้ายและลิมิตขวาทำให้พบว่าการหาลิมิตเมื่อค่าลิมิตซ้ายและลิมิตขวาไม่เท่ากันจะทำให้ไม่ลิมิตในจุดนั้นหาค่าไม่ได้ ดังนั้นเราสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการหาลิมิตของฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วงได้ โดยที่ลิมิตทั้งสองด้านที่จุดซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขจะใช้การหาลิมิตในแต่ละด้านก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.11 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4}, x>2\\ 2x-4, x\le 2\end{cases}$ จงหา $\lim_{x\to 2} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $x=2$ เป็นจุดเปลี่ยนเงื่อนไขของฟังก์ชัน จึงต้องพิจารณาหาลิมิตฟังก์ชันออกเป็นส่วน

นั่นคือ $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ และ $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}(2x-4)\\ &= 2(2)-4\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}\sqrt{x^2-4}\\ &= \sqrt{2^2-4}\\ &= 0\end{aligned}$$

จากการพิจารณาลิมิตทั้งสองด้านของฟังก์ชันทำให้พบว่า $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x)=0$

ตัวอย่าง 1.12 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(x-1)^2}, x\le 0\\ \dfrac{x^3-1}{x+1}, x>0\end{cases}$ จงหา $\lim_{x\to 0} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $x=0$ เป็นจุดเปลี่ยนเงื่อนไขของฟังก์ชัน จึงต้องพิจารณาหาลิมิตฟังก์ชันออกเป็นส่วน

นั่นคือ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ และ $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

$$= \sqrt[3]{(0-1)^2}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-1}{x+1}$$

$$= \frac{0-1}{0+1}$$

$$= -1$$

จากการพิจารณาลิมิตทั้งสองด้านของฟังก์ชันทำให้พบว่า $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

เพื่อความสะดวกในการหาลิมิต คชินทร์ โกกนุทาภรณ์ (มปป.: 30-31) ได้นำเสนอทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันไว้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว นั่นคือ $f(x) = c,\ x \in \mathbb{R}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า ลิมิตของ f ที่จุด a ใด ๆ เท่ากับ c กล่าวคือ

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \text{ หรือ } \lim_{x\to a} c = c$$

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ นั่นคือ $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า ลิมิตของ f ที่จุด a ใด ๆ เท่ากับ a กล่าวคือ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

ทฤษฎีบท 1.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันกรณฑ์ที่สอง นั่นคือ $f(x) = \sqrt{x},\ x > 0$ และให้ $a > 0$ จะได้ว่า ลิมิตของ f ที่จุด a เท่ากับ $\sqrt{a}$ กล่าวคือ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

ทฤษฎีบท 1.4 ถ้าลิมิตของฟังก์ชัน f และ g ที่จุด a หาค่าได้จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$
2. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$

ทฤษฎีบท 1.5 ถ้าลิมิตของฟังก์ชัน f และ g ที่จุด a หาค่าได้ จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=\dfrac{1}{\lim_{x\to a}f(x)}$ โดยที่ $\lim_{x\to a}f(x)\neq 0$
2. $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$ โดยที่ $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$

ทฤษฎีบท 1.6 ถ้าลิมิตของฟังก์ชัน f และ g ที่จุด a หาค่าได้ ถ้า $\lim_{x\to a}g(x)=0$ และ $\lim_{x\to a}f(x)\neq 0$ แล้ว $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ หาค่าไม่ได้

บทแทรก 1.1 ถ้าลิมิตของฟังก์ชัน f ที่จุด a หาค่าได้ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ว่า

$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n$

บทแทรก 1.2 ถ้าลิมิตของฟังก์ชัน f ที่จุด a หาค่าได้ และ c เป็นค่าคงตัวแล้ว $\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)$

บทแทรก 1.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันพหุนาม กำหนดโดย $f(x)=a_0+a_1x+a_2x+...+a_nx^n$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)=a_0+a_1c+a_2c^2+...+a_nc^n$$

บทแทรก 1.4 ถ้าลิมิตของฟังก์ชัน f ที่จุด a หาค่าได้ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ว่า

$\lim_{x\to a}f(x)^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n$

ทฤษฎีบท 1.7 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ เมื่อ $a>0$ และ n เป็นจำนวนคู่

บทแทรก 1.5 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$ เมื่อ $\lim_{x\to a}f(x)>0$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่

ตัวอย่าง 1.13 กำหนดให้ $f(x)=3$ จงหา $\lim_{x\to 2} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} 3=3$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x)=3$

ตัวอย่าง 1.14 กำหนดให้ $f(x)=5$ จงหา $\lim_{x\to 3} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3} 5=5$

ดังนั้น $\lim_{x\to 3} f(x)=5$

ตัวอย่าง 1.15 กำหนดให้ $f(x)=10$ จงหา $\lim_{x\to -1} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1} 10=10$

ดังนั้น $\lim_{x\to -1} f(x)=10$

ตัวอย่าง 1.16 กำหนดให้ $f(x)=x$ จงหา $\lim_{x\to -1} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1} x=-1$

ดังนั้น $\lim_{x\to -1} f(x)=-1$

ตัวอย่าง 1.17 กำหนดให้ $f(x)=2x$ จงหา $\lim_{x\to 1} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} 2x=2(1)=2$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

ตัวอย่าง 1.18 กำหนดให้ $f(x)=3x$ จงหา $\lim_{x\to 2} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} 3x=3(2)=6$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x)=6$

ตัวอย่าง 1.19 กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{x}$ จงหา $\lim_{x\to 16} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to16} f(x) = \lim_{x\to16}\sqrt{x} = \sqrt{16} = 4$

ดังนั้น $\lim_{x\to16} f(x) = 4$

ตัวอย่าง 1.20 กำหนดให้ $f(x) = 3\sqrt{x}$ จงหา $\lim_{x\to9} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to9} f(x) = \lim_{x\to9} 3\sqrt{x} = 3\sqrt{9} = 3(3) = 9$

ดังนั้น $\lim_{x\to9} f(x) = 9$

ตัวอย่าง 1.21 กำหนดให้ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10$ จงหา $\lim_{x\to-1} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1} f(x) &= \lim_{x\to-1} 2x^3 + \lim_{x\to-1} 3x^2 + \lim_{x\to-1} 5x + \lim_{x\to-1} 10 \\ &= 2(-1)^3 + 3(-1)^2 + 5(-1) + 10 \\ &= 6\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to-1} f(x) = 6$

ตัวอย่าง 1.22 กำหนดให้ $f(x) = (2x^3 + 1)(x^2 + 6x + 10)$ จงหา $\lim_{x\to2} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2} f(x) &= \lim_{x\to2}(2x^3 + 1) \times \lim_{x\to2}(x^2 + 6x + 10) \\ &= (2(2)^3 + 1) \times ((2)^2 + 6(2) + 10) \\ &= 17 \times 58 \\ &= 986\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to2} f(x) = 986$

ตัวอย่าง 1.23 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x - 1}$ จงหา $\lim_{x\to1} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \dfrac{x^3 + 1}{x - 1}$

$$= \frac{\lim_{x \to 1}(x^3+1)}{\lim_{x \to 1}(x-1)}$$

$$= \frac{1^3+1}{1-1}$$

$$= \frac{2}{0}$$

ดังนั้น $\lim_{x \to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 1.24 กำหนดให้ $f(x) = (2x+1)^5$ จงหา $\lim_{x \to 1} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(2x+1)^5$

$$= \left(\lim_{x \to 1}(2x+1)\right)^5$$

$$= \left(2(1)+1\right)^5$$

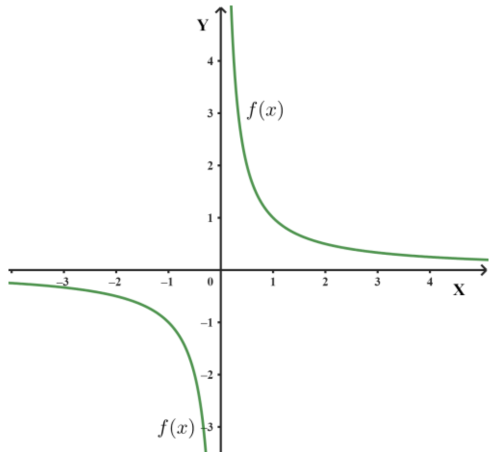
$$= 243$$

ดังนั้น $\lim_{x \to 1} f(x) = 243$

แต่อย่างไรก็ตาม จากที่ยกตัวอย่างเกี่ยวกับฟังก์ชันที่ผ่านมานั้นยังมีฟังก์ชันที่แตกต่างจากที่กล่าวมา ดังนั้นในการลิมิตฟังก์ชันจึงได้มีการศึกษาในกรณีที่ค่าฟังก์ชันเข้าสู่อนันต์หรือจุดลิมิตเป็นค่าอนันต์ ซึ่ง สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ (2558: 27-33) ได้ให้กล่าวถึงลิมิตเกี่ยวกับอนันต์ดังนี้

ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์

พิจารณาลิมิตเมื่อ x เพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด จะทำให้ค่าฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้ค่าจำนวนจริงจำนวนใดจำนวนหนึ่ง ดังกราฟในรูปที่ 1.6

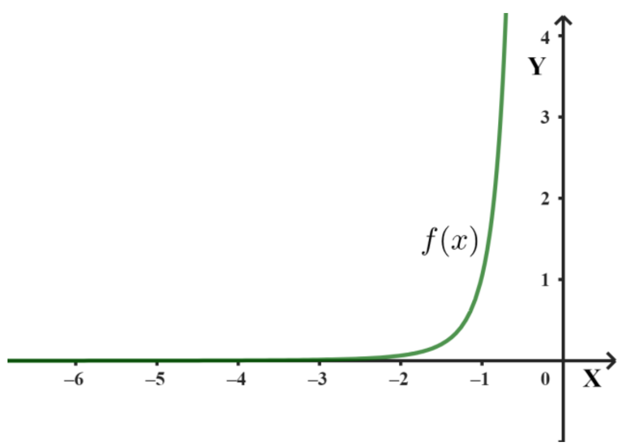


รูปที่ 1.6 แสดงกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{x}$

จากกราฟในรูปที่ 1.6 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่จำกัด ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ 0 ซึ่งจะกล่าวได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เท่ากับ 0 เมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ แต่ในกรณีที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่จำกัด ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ 0 ซึ่งจะกล่าวได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เท่ากับ 0 เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ตัวอย่าง 1.25 จงหา $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^5}$

วิธีทำ สังเกตพฤติกรรมของฟังก์ชันจากการสร้างกราฟของ $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$ ได้ดังรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.7 แสดงกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{x}$

เนื่องจาก $\dfrac{1}{x^5}=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}$

โดยที่ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

จะได้ว่า $$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$$

$$=0\times0\times0\times0\times0$$

$$=0$$

ดังนั้น $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}=0$

ตัวอย่าง 1.26 จงหา $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x+3}{2x^2-3x+5}$

วิธีทำ เนื่องจาก $$\frac{3x^2+2x+3}{2x^2-3x+5}=\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}$$

จะได้ว่า $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x+3}{2x^2-3x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to+\infty}3+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim_{x\to+\infty}2-\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}}$$

$$=\frac{3+0+0}{2-0+0}$$

$$= \frac{3}{2}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x+3}{2x^2-3x+5} = \frac{3}{2}$

ตัวอย่าง 1.27 จงหา $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4x^2+3x+2}{2x^2+3x+6}$

วิธีทำ เนื่องจาก
$$\frac{x^3+4x^2+3x+2}{2x^2+3x+6} = \frac{x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}$$

จะได้ว่า
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4x^2+3x+2}{2x^2+3x+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3}}{\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x^3}}$$

$$= \frac{1+0+0+0}{0+0+0}$$

$$= \frac{1}{0}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4x^2+3x+2}{2x^2+3x+6}$ หาค่าไม่ได้

นอกจากนี้ยังมีพฤติกรรมของฟังก์ชันที่แตกต่างจากตัวอย่างที่กล่าวมา โดยที่ x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง a แล้วฟังก์ชันมีค่ามากอย่างไม่จำกัด จะเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ในทางกลับกัน เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง a แล้วฟังก์ชันมีค่าน้อยอย่างไม่จำกัด จะเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ซึ่งสามารถตรวจสอบพฤติกรรมทั้งสองนี้ด้วยการพิจารณาว่า $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0$ หรือไม่ โดยพิจารณาเป็นกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $f(x) > 0$ ที่รอบ ๆ จุด a และ $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0$ จะได้ว่า $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

กรณีที่ 2 ถ้า $f(x) < 0$ ที่รอบ ๆ จุด a และ $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0$ จะได้ว่า $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

แต่จากทั้งสองกรณีที่กล่าวมานี้ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ มีค่าหรือไม่

ตัวอย่าง 1.28 จงหา $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก รอบ ๆ จุด $x = 1$ ทำให้ $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 1}(x-1)^2$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

ตัวอย่าง 1.29 จงหา $\lim_{x\to 2}\frac{1-2x}{|x-2|}$

วิธีทำ เนื่องจาก รอบ ๆ จุด $x = 2$ ทำให้ $f(x) = \frac{1-2x}{|x-2|} < 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{1-2x}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2}\frac{1-2x}{|x-2|} = -\infty$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

เรานำความรู้เกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันเพื่อนำมาประยุกต์ใช้ในการหาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยการพิจารณานิยามดังต่อไปนี้

นิยาม กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง และ $a \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous function) ที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ตัวอย่าง 1.30 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$

วิธีทำ จากนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่อง เราจะพิจารณาเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. $f(2) = 2(2)^2 + 3(2) - 1 = 13$ นั่นคือ $f(2)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(2x^2 + 3x - 1)$

   $= 2(2)^2 + 3(2) - 1 = 13$

   นั่นคือ $\lim_{x \to 2} f(x)$ หาค่าได้
3. จะเห็นว่า $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่าง 1.31 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & ; x < 2 \\ 2 & ; x = 2 \\ \frac{1}{2}x & ; x > 2 \end{cases}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ จากนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่อง เราจะพิจารณาเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. $f(2) = 2$ นั่นคือ $f(2)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-}(5 - x^2) = 5 - 2^2 = 1$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}(2) = 1$$

จะได้ว่า $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ นั่นคือ $\lim_{x\to 2} f(x)$ หาค่าได้

3. เนื่องจาก $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

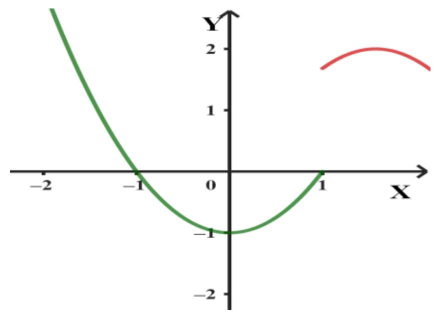
สรุปท้ายบท

ลิมิตของฟังก์ชันเป็นแนวคิดที่สำคัญในแคลคูลัสสำหรับวิเคราะห์พฤติกรรมของฟังก์ชันโดยมีลิมิตซ้ายและลิมิตขวาเพื่อพิจารณาบนจุดลิมิตสำหรับฟังก์ชันต่าง ๆ ลิมิตสามารถมีค่าเป็นอนันต์ หรือไม่มีค่าในบางกรณี โดยหลักการของลิมิตสามารถประยุกต์ใช้ในการคำนวณอนุพันธ์และอินทิเกรตของฟังก์ชัน การหาลิมิตสามารถใช้วิธีต่างๆ เช่น การแทนค่าโดยตรง การแยกส่วน หรือกฎของโลปิตาลที่จะได้ศึกษาในเนื้อหาขั้นสูงต่อไป เนื่องจากลิมิตเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการวิเคราะห์ฟังก์ชัน ดังนั้นจึงถูกนำมาประยุกต์ใช้ในความต่อเนื่องของฟังก์ชันเพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมและประเมินค่าของฟังก์ชันในสถานการณ์ต่าง ๆ ทางด้าน ฟิสิกส์ เศรษฐศาสตร์ และวิศวกรรม

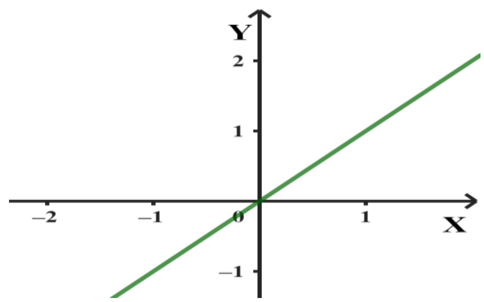
แบบฝึกหัด

1. จากกราฟของฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ จงพิจารณาว่า f หาลิมิตในจุดที่กำหนด $x=a$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

1.1 $x=-1$



1.2 $x=1$



2. จากบทนิยามของลิมิต จงแสดงว่า

2.1 $\lim_{x\to 5} x = 5$ 2.2 $\lim_{x\to 2} 4 = 4$

2.3 $\lim_{x\to 1}(x+3) = 4$ 2.4 $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-1) = 9$

3. จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $\lim_{x\to 5}(-1)$ 1.2 $\lim_{x\to 1}(2x+1)$

1.3 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x+3}$ 1.4 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

1.5 $\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x-3}$

1.6 $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{|x-3|}$

1.7 $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4x+4}{x-2}$

1.8 $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x+1}{|x-2|}$

1.9 $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-4x+4}{x-2}$

1.10 $\lim_{x\to +\infty}\frac{4x+4}{2x-2}$

1.11 $\lim_{x\to -\infty}\frac{4}{|x-3|}$

1.12 $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3+4x^2+2x+1}{2x^2-3x-1}$

4. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องสำหรับจุดที่กำหนดให้หรือไม่

4.1 $f(x)=x^2+3x+1; x=0$

4.2 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}; x=-1$

4.3 $f(x)=|x-1|; x=1$

4.4 $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x<0 \\ 2x+1 & ; x\geq 0 \end{cases}; x=0$

เอกสารอ้างอิง

กมล เอกไทยเจริญ. (2521). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** กรุงเทพมหานคร : กราฟิคอาร์ต.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา ณัฏฐนาถ ไตรภพ และยุวรีย์ พันธ์กล้า. (2563). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

คชินทร์ โกกนุทาภรณ์. (มปป.) **แคลคูลัส.** ปทุมธานี : ม.ป.ท.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2556). **แคลคุลัส 1.** ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์ จำกัด.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา อนัญญา อภิชาตบุตร และอรุณี เจริญราช. (2558). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : วิทยพัฒน์ จำกัด.