บทที่ 2

ตัวกำหนด (Determinants)

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรเมทริกซ์ (real – valued function of a matrix variable) ซึ่งมีโดเมนเป็นเซตของเมทริกซ์จัตุรัส และเรนจ์เป็นจำนวนจริง ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันที่กำหนดค่าให้กับเมทริกซ์จัตุรัส แต่ละเมทริกซ์จัตุรัสจะสมนัยกับจำนวนจริงจำนวนหนึ่งเท่านั้น เราจะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า ตัวกำหนด (determinant)

2.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutations)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ $S=\{1,2,3,\ldots,n\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก จะกล่าวว่า α เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutation) ของ S ก็ต่อเมื่อ α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

ถ้า $\alpha(i)=j_1$, $i=1,2,3,\ldots,n$ และ $j_i \in S$ เราจะเขียนแทน α ด้วย

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ J_1 & J_2 & J_3 & \ldots & J_n\end{pmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \alpha=\left(J_1,J_2,\ldots,J_n\right)$$

จากนิยามจะเห็นว่า $\left(J_1,J_2,\ldots,J_n\right)$ คือการจัดเรียงสับเปลี่ยนตำแหน่งของสมาชิกของ S นั่นเอง ดังนั้น ถ้า S_n เป็นเซตของวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดของ S แล้วจำนวนสมาชิกใน S_n จะเท่ากับ $n!$ วิธี

นั่นคือ $S_n=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n!}\}$

ตัวอย่าง 2.1.1 ให้ $S=\{1,2,3\}$ จงหา S_3

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.1.2 ให้ $S=\{1,2,3,4\}$ จงหา S_4

....

....

....

....

....

บทนิยาม 2.1.2 ให้ $\alpha = \left(J_1, J_2, \ldots, J_n\right)$ เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ S คู่อันดับ (J_i, J_k) เมื่อ $i < k$ จะเรียกว่า เกิดการผกผัน (inversion) ถ้า $J_i > J_k$

ให้ $\left|\alpha\right|$ แทนจำนวนการผกผันของ α ซึ่งก็คือจำนวนคู่อันดับ (J_i, J_k) ที่เกิดการผกผันนั่นเอง

ตัวอย่าง 2.1.3 ให้ $\alpha = (3,\ 4,\ 1,\ 2)$ จงหา $\left|\alpha\right|$

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.1.4 ให้ $\alpha = (2,\ 3,\ 4,\ 1)$ จงหา $\left|\alpha\right|$

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.1.5 ให้ $\alpha = (3,\ 2,\ 4,\ 1)$ จงหา $\left|\alpha\right|$

....

....

....

....

บทนิยาม 2.1.3 ให้ α เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ S ถ้า $\left|\alpha\right|$ เป็นจำนวนคู่ เราจะเรียกวิธีเรียงสับเปลี่ยน α ว่าเป็น วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบคู่ (even permutation) และถ้า $\left|\alpha\right|$ เป็นจำนวนคี่ เราจะเรียกวิธีเรียงสับเปลี่ยน α ว่าเป็น วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบคี่ (odd permutation)

ถ้าเรากำหนดเครื่องหมาย sgn ของ α ซึ่งเขียนแทนด้วย $\operatorname{sgn}\alpha$ ดังนี้ $\operatorname{sgn}\alpha = \left(-1\right)^{\left|\alpha\right|}$ จากนิยามจะได้ว่า

$\operatorname{sgn}(\alpha) = 1$ ถ้า α เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบคู่

$\operatorname{sgn}(\alpha) = -1$ ถ้า α เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบคี่

ตัวอย่าง 2.1.6 ให้ $\alpha_1 = (2,\, 4,\, 5,\, 1,\, 3)$ และ $\alpha_2 = (4,\, 1,\, 3,\, 2,\, 5)$ จงหาว่า $\alpha_1,\, \alpha_2$ เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบคู่หรือเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบคี่

จากตัวอย่าง 2.1.1 และ ตัวอย่าง 2.1.2 จะได้ว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบคู่และแบบคี่มีจำนวนเท่ากัน คือ $\dfrac{3!}{2}$ และ $\dfrac{4!}{2}$ ตามลำดับ ดังนั้นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบคู่และแบบคี่ใน S_n จึงมีจำนวนเท่ากับ $\dfrac{n!}{2}$

2.2 ตัวกำหนด (determinant)

บทนิยาม 2.2.1 ให้ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ตัวกำหนด (determinant) ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\det A$ หรือ $|A|$ กำหนดโดย

$$\det A = |A| = \sum_{\alpha\in S_n} (\operatorname{sgn}\alpha) a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} a_{3\alpha(3)} \dots a_{n\alpha(n)}$$

จากนิยาม จะได้ว่า $\det A$ เป็นผลบวกของ $n!$ พจน์ ซึ่งแต่ละพจน์เป็นผลคูณของสมาชิกของ $[a_{ij}]$ ซึ่งขึ้นอยู่กับ $\alpha\in S_n$ เครื่องหมายของแต่ละพจน์ขึ้นอยู่กับวิธีเรียงสับเปลี่ยน α ว่าเป็นแบบคู่หรือแบบคี่

ตัวอย่าง 2.2.1 ให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ จงหา $|A|$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.2.2 ให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จงหา $|A|$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.3 สมบัติของตัวกำหนด

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ จะได้ว่า $\left|A^t\right| = \left|A\right|$

ตัวอย่าง 2.3.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $\left|A\right|$ และ $\left|A^t\right|$

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 2.3.2 ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากเมทริกซ์ A โดยการคูณแถว(หลัก) ใดแถว(หลัก) ของเมทริกซ์ A ด้วยค่าคงที่ k แล้วจะได้ว่า $\left|B\right| = k\left|A\right|$

ตัวอย่าง 2.3.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ -14 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ จงหา $\left|A\right|$

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 2.3.3 ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากเมทริกซ์ A โดยการสลับที่ 2 แถว(หลัก) ใด ๆ ของ A แล้วจะได้ว่า $\left|B\right| = -\left|A\right|$

ตัวอย่าง 2.3.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ จงหา $\left|A\right|$

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 2.3.4 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีแถว(หลัก) 2 แถว(หลัก) เหมือนกันจะได้ $\left|A\right| = 0$

ตัวอย่าง 2.3.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $\left|A\right| = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 2.3.5 ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากเมทริกซ์ A โดยการบวกแถว(หลัก)ใดแถว(หลัก)หนึ่งด้วย k เท่าของอีกแถว(หลัก)ใดแถว(หลัก)หนึ่งของ A แล้วจะได้ว่า $\left|B\right| = \left|A\right|$

ตัวอย่าง 2.3.5 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 2.3.6 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกในแถว(หลัก)ใดแถว(หลัก)หนึ่งเป็นศูนย์หมดแล้ว จะได้ว่า $\left|A\right| = 0$

ตัวอย่าง 2.3.6 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $\left|A\right| = 0$

ทฤษฎีบท 2.3.7 ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนหรือสามเหลี่ยมล่างแล้ว $\left|A\right|$ จะเท่ากับผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ A นั่นคือ $\left|A\right|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

ตัวอย่าง 2.3.7 ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$ จงหา $\left|A\right|$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 2.3.8 ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ แล้วจะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\left|A\right|\neq 0$

ตัวอย่าง 2.3.8 จงหาตัวผกผันของเมทริกซ์ A (ถ้ามี) เมื่อ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 8\end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 2.3.9 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n แล้ว $\left|AB\right| = \left|A\right|\left|B\right|$

ตัวอย่าง 2.3.9 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $\left|AB\right| = \left|A\right|\left|B\right|$

ทฤษฎีบท 2.3.10 ถ้า A ป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานแล้ว $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{\left|A\right|}$

ตัวอย่าง 2.3.10 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{\left|A\right|}$

ทฤษฎีบท 2.3.11 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n และ $c \in R$ แล้ว $\left|cA\right| = c^n \left|A\right|$

ตัวอย่าง 2.3.11 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $c = 3$ จงแสดงว่า $\left|cA\right| = c^n \left|A\right|$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 2.3.12 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n และ $k \in I$ แล้ว $\left|A^k\right| = \left|A\right|^k$

ตัวอย่าง 2.3.12 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A^3

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.3.13 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ จงหา

ก. $\left|ABC\right|$ ข. $\left|A^t B^t C^t\right|$ ค. $\left|A^3 B^2 C^{-2}\right|$ ง. $\left|2AB^{-1}C\right|$

ตัวอย่าง 2.3.14 ถ้า $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ แล้ว $\begin{vmatrix} -b & -a & -c \\ 2e & 2d & 2f \\ 4h & 4g & 4i \end{vmatrix}$ เท่ากับเท่าไร

2.4 ตัวประกอบร่วมเกี่ยว (Cofactor)

บทนิยาม 2.4.1 ให้ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ สำหรับ $i=1,2,3,\ldots,n$ และ $j=1,2,3,\ldots,n$ โดยที่ M_{ij} คือเมทริกซ์ย่อยที่ได้จาก A โดยการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A ออกไป จะได้ว่า

$$C_{ij}(A)=(-1)^{i+j}\left|M_{ij}(A)\right|$$

$\left|M_{ij}(A)\right|$ เรียกว่า ไมเนอร์ (minor) ของ a_{ij} และ $C_{ij}(A)$ เรียกว่า โคแฟกเตอร์ (cofactor) ของ a_{ij}

จาก $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|A\right| &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{33}a_{21})+a_{13}(a_{32}a_{21}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\end{aligned}$$

จากสมการข้างต้น เราสามารถจัดรูปของสมการให้อยู่ในรูปของโคแฟกเตอร์ได้หลายรูปแบบ ดังนั้น

$$\left|A\right|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\ ,\ i=1,2,3,\ldots,n \text{ และ}$$

$$\left|A\right|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\ ,\ j=1,2,3,\ldots,n$$

จะเห็นได้ว่า $\left|A\right|$ ได้มาจากผลบวกของผลคูณระหว่างสมาชิกในแถวที่ i ของ A กับโคแฟกเตอร์ของสมาชิกนั้น ๆ หรือ ได้มาจากผลบวกของผลคูณระหว่างสมาชิกในหลักที่ j ของ A กับโคแฟกเตอร์ของสมาชิกนั้น ๆ

ตัวอย่าง 2.4.1 จงหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

....

2.5 เมทริกซ์ผูกพัน (Adjoint of matrix)

บทนิยาม 2.5.1 ให้ $A=[a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n เรานิยามให้เมทริกซ์ $\mathrm{adj}A$ ซึ่งเรียกว่า เมทริกซ์ผูกพันของ A (adjoint of matrix A) เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j เป็นตัวประกอบร่วมเกี่ยว C_{ji} ของ a_{ji} นั่นคือ

$$\mathrm{adj}A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

จากนิยามจะเห็นว่า $\mathrm{adj}A$ คือเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของตัวประกอบร่วมเกี่ยวของเมทริกซ์ A นั่นเอง นั่นคือ $\mathrm{adj}A=\left[C_{ij}(A)\right]^t$

ตัวอย่าง 2.5.1 จงหาเมทริกซ์ผูกพัน $(\mathrm{adj}A)$ ของ $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.5.2 จงหาเมทริกซ์ผูกพัน $(\mathrm{adj}A)$ ของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 2.5.2 ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n แล้วจะได้ว่า $A(\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A)\,\mathrm{A} = \left|A\right|\mathrm{I}_n$

ตัวอย่าง 2.5.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A(\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A)\,\mathrm{A} = \left|A\right|\mathrm{I}_n$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.6 เมทริกซ์ผกผัน (Inverse matrix)

ทฤษฎีบท 2.6.1 ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และ $\left|A\right| \neq 0$ แล้ว $A^{-1} = \dfrac{1}{\left|A\right|}\left(\mathrm{adj}A\right)$

ตัวอย่าง 2.6.1 จงหา A^{-1} ของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$