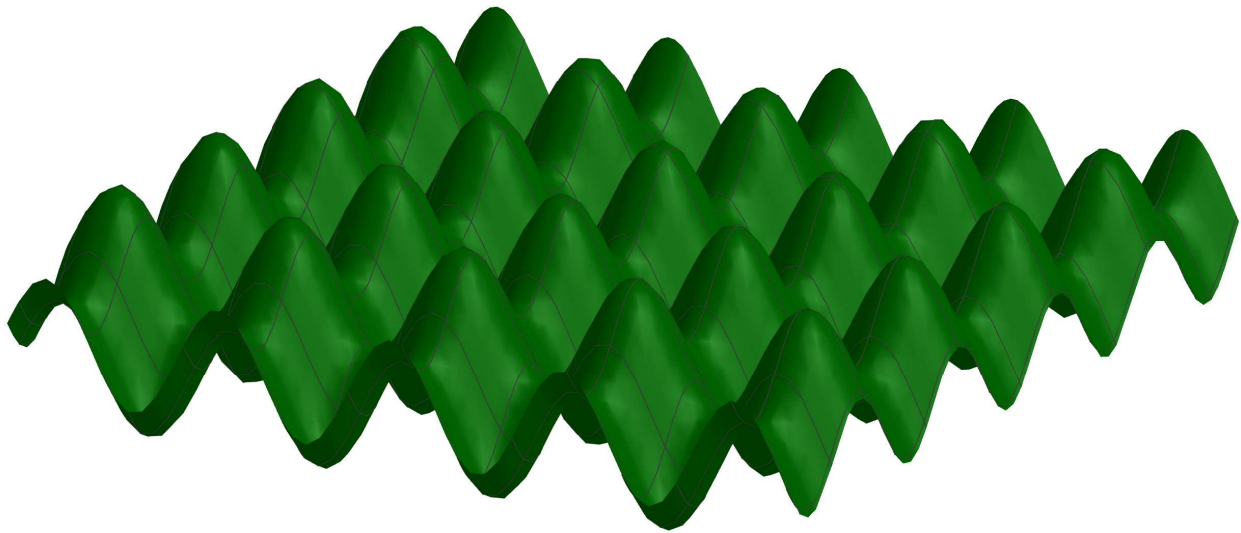
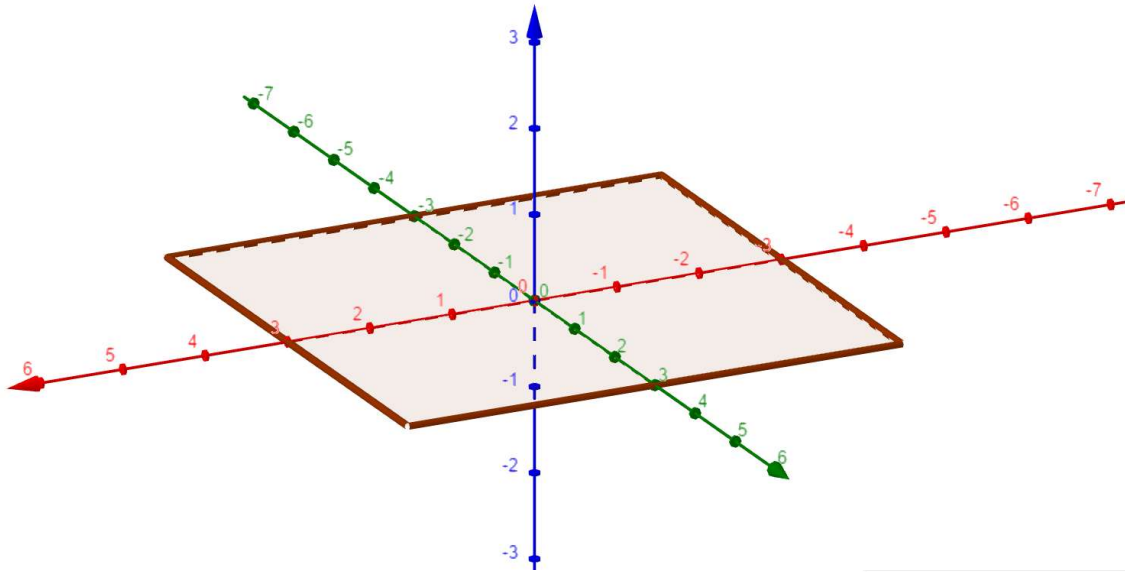


เอกสารประกอบการเรียน
รหัสวิชา 1142301 รายวิชา พีชคณิตเชิงเส้น



ผู้สอน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ไพรัช จันทรงาม

สำหรับนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562

แผนการสอน

รายวิชา : 1142301 พีชคณิตเชิงเส้น

จำนวนหน่วยกิต : 3 (2-2-5)

อาจารย์ผู้สอน : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ไพรัชช์ จันทร์งาม

สาขาวิชา : คณิตศาสตร์

คณะ : ครุศาสตร์

ติดต่อ : [0878767663](tel:0878767663)

คำอธิบายรายวิชา

เมทริกซ์ ระบบสมการเชิงเส้น เวกเตอร์และปริภูมิเวกเตอร์ การแปลงเชิงเส้น ค่าเฉพาะเวกเตอร์เฉพาะ และการประยุกต์ และสามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์หาคำตอบเบื้องต้นได้

จุดมุ่งหมายรายวิชา

เพื่อให้ นักศึกษามี

- ความรู้ ความเข้าใจในเรื่องเมทริกซ์
- ความรู้ ความเข้าใจในเรื่องระบบสมการเชิงเส้น
- ความรู้ ความเข้าใจในเรื่องเวกเตอร์และปริภูมิเวกเตอร์
- ความรู้ ความเข้าใจในเรื่องการแปลงเชิงเส้น
- ความรู้ ความเข้าใจในเรื่องค่าเฉพาะเวกเตอร์เฉพาะ และการประยุกต์
- ความรู้ ความเข้าใจ และสามารถนำโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์หาคำตอบเบื้องต้นของเมทริกซ์และเวกเตอร์ได้

การวางแผนการสอน

1. เมทริกซ์

- สมบัติทางพีชคณิตของการดำเนินการบนเมทริกซ์
- เมทริกซ์สลับเปลี่ยน
- เมทริกซ์เอกลักษณ์
- เมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์สมมาตรเสมือน
- การดำเนินการขั้นมูลฐานและเมทริกซ์มูลฐาน
- เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวและเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถว
- การแบ่งส่วนย่อยของเมทริกซ์
- เมทริกซ์ทแยงมุม
- เมทริกซ์สามเหลี่ยม
- เมทริกซ์ไม่เอกฐานและเมทริกซ์เอกฐาน

2. ตัวกำหนด

- วิธีเรียงสับเปลี่ยน
- สมบัติของตัวกำหนด
- เมทริกซ์ผกผัน
- ตัวกำหนด
- ตัวประกอบร่วมเกี่ยว
- เมทริกซ์ผกผัน

บทที่ 1

เมทริกซ์ (Matrices)

1. สมบัติทางพีชคณิตของการดำเนินการบนเมทริกซ์

บทนิยาม 1.1 เมทริกซ์ (Matrix) คือการจัดเรียงจำนวนใด ๆ ในรูปของแถว (row) และหลัก (column) เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากภายในเครื่องหมาย [] หรือ () ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เรียก a_{ij} ว่า สมาชิก (element หรือ entry) ในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A โดยที่ $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ถ้าเมทริกซ์ A ประกอบด้วย m แถวและ n หลักเราจะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์มิติ (dimension) หรืออันดับ (order) $m \times n$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 1.2 เมทริกซ์ที่มีมิติ $1 \times n$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิก 1 แถว เรียกว่า เมทริกซ์แถว (row matrix) หรือเวกเตอร์แถว (row vector) และเมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times 1$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิก 1 หลัก เรียกว่า เมทริกซ์หลัก (column matrix) หรือเวกเตอร์หลัก (column vector)

บทนิยาม 1.3 เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เรียกว่า เมทริกซ์ศูนย์ (zero matrix) เขียนแทนด้วย 0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 1.4 ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ถ้า $m = n$ แล้วเราจะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) มิติ n สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A มิติ n เรานิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A_n

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 2 หรือ } E_2$$

บทนิยาม 1.5 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เมทริกซ์ A จะเท่ากับเมทริกซ์ B ก็ต่อเมื่อ A และ B มีมิติเดียวกัน และ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n$ เขียนแทนด้วย $A = B$

ถ้า A ไม่เท่ากับ B เขียนแทนด้วย $A \neq B$

บทนิยาม 1.6 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ผลบวกของ A และ B เขียนแทนด้วย

$A + B$

$$\text{นิยามโดย } A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -5 & 6 & 4 \end{bmatrix} =$$

บทนิยาม 1.7 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ ผลคูณระหว่างสเกลาร์ c และเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย cA

$$\text{นิยามโดย } cA = [ca_{ij}]_{m \times n} \text{ และเราจะเขียน } -A \text{ ด้วย } (-1)A$$

บทนิยาม 1.8 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ผลต่างระหว่างเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย $A - B$

บทนิยาม 1.9 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ แล้วผลคูณของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย AB

คือเมทริกซ์ $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ โดยที่ $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$

$$\text{นั่นคือ } AB = [c_{ij}]_{m \times p} \text{ โดยที่ } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ แล้ว $A + B = B + A$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

$$\text{จากนิยามการบวกเมทริกซ์ จะได้ } A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

เนื่องจาก a_{ij} และ b_{ij} เป็นจำนวนจริง ซึ่งมีสมบัติสลับที่

$$\text{ดังนั้น } A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

$$= [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= B + A$$

2. การแบ่งส่วนย่อยของเมทริกซ์

บทนิยาม 2.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ เมทริกซ์ย่อย (Submatrices) ของ A คือเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวบางแถวหรือตัดหลักบางหลักของเมทริกซ์ A ออกไป

ตัวอย่าง 2.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a. ถ้าตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ A ออกไปจะได้เมทริกซ์ย่อย คือ

.....

.....

.....

.....

.....

b. ถ้าตัดแถวที่ 2, 3 และหลักที่ 3, 4 ของเมทริกซ์ A ออกไปจะได้เมทริกซ์ย่อย คือ

.....

.....

.....

.....

.....

c. ถ้าตัดแถวที่ 1, 2, 3 ของเมทริกซ์ A ออกไปจะได้เมทริกซ์ย่อย คือ

.....

.....

.....

.....

.....

d. ถ้าตัดหลักที่ 2, 3, 4 ของเมทริกซ์ A ออกไปจะได้เมทริกซ์ย่อย คือ

.....

.....

.....

.....

.....

9. การดำเนินการขั้นมูลฐานและเมทริกซ์มูลฐาน

การดำเนินการตามแถว(หลัก) ขั้นมูลฐานของเมทริกซ์ใด ๆ ทำได้ 3 แบบดังนี้

บทนิยาม 9.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ การดำเนินการตามแถว(หลัก) ขั้นมูลฐาน(elementary row(column) operation) ของเมทริกซ์ A คือการดำเนินการอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. การสลับที่ระหว่างแถว(หลัก) ที่ i กับแถว(หลัก) ที่ j ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $R_i \leftrightarrow R_j (C_i \leftrightarrow C_j)$ เรียกว่า การดำเนินการขั้นมูลฐานแบบที่ 1 (type I operation)
2. การคูณแถว(หลัก) ที่ i ของเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง k ที่ไม่เท่ากับศูนย์ เขียนแทนด้วย $R_i \rightarrow kR_i (C_i \rightarrow kC_i)$ เรียกว่า การดำเนินการขั้นมูลฐานแบบที่ 2 (type II operation)
3. การคูณแถว(หลัก) ที่ i ของเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง k ที่ไม่เท่ากับศูนย์ แล้วนำไปบวกกับแถว(หลัก) ที่ j ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $R_j \rightarrow kR_i + R_j (C_j \rightarrow kC_i + C_j)$ เรียกว่า การดำเนินการขั้นมูลฐานแบบที่ 3 (type III operation)

ตัวอย่าง 9.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & -6 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad R_2 \rightarrow 3R_2$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 \rightarrow 2R_1 + R_3$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad C_2 \rightarrow -2C_2$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix} \quad C_3 \rightarrow 3C_1 + C_3$$

บทนิยาม 9.2 เมทริกซ์ A สมมูลตามแถว(หลัก) (row(column) equivalent) กับเมทริกซ์ B ถ้าเมทริกซ์ B ได้มาจากการดำเนินการตามแถว(หลัก)ขั้นมูลฐานบนเมทริกซ์ A เป็นจำนวนครั้งจำกัด

เมทริกซ์ A สมมูลตามแถว(หลัก)กับเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย $A \underset{R(C)}{\sim} B$

ตัวอย่าง 9.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

บทนิยาม 9.3 เมทริกซ์ A สมมูล (equivalent) กับเมทริกซ์ B ถ้าเมทริกซ์ B ได้มาจากการดำเนินการตามแถวหรือตามหลักขั้นมูลฐาน หรือทั้งสองอย่างบนเมทริกซ์ A เป็นจำนวนครั้งจำกัด

เมทริกซ์ A สมมูลตามแถว(หลัก)กับเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย $A \sim B$

ตัวอย่าง 9.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

บทนิยาม 9.4 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ และ $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ แล้วจะได้ว่า

1. [แถวที่ i ของ AB] = [แถวที่ i ของ A] B

2. [หลักที่ j ของ AB] = A [หลักที่ j ของ B]

ตัวอย่าง 9.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาแถวที่ 2 ของ AB

.....

.....

.....

.....

.....

10. เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวและเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถว

บทนิยาม 10.1 เมทริกซ์ A มิติ $m \times n$ จะเรียกว่าเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถว (row echelon matrix)

ถ้า A มีสมบัติดังนี้

1. แถวที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์(ถ้ามี) จะอยู่ด้านล่างของเมทริกซ์
2. สมาชิกตัวแรกในแถวใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์จะเท่ากับ 1 เรียก 1 ว่าตัวนำ 1
3. สำหรับแถวสองแถวใดที่ติดกันและมีตัวนำ 1 อยู่ ตัวนำ 1 ในแถบบนจะอยู่เยื้องไปทาง

ขวามือของแถวล่าง

ตัวอย่าง 10.1 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 10.2 เมทริกซ์ A มิติ $m \times n$ จะเรียกว่า เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถว(reduced row echelon matrix) ก็ต่อเมื่อ

1. A เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถว
2. ถ้าตัวนำ 1 ในแต่ละแถวอยู่ในหลักใด สมาชิกตัวอื่นในหลักนั้นจะต้องเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 10.2 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

