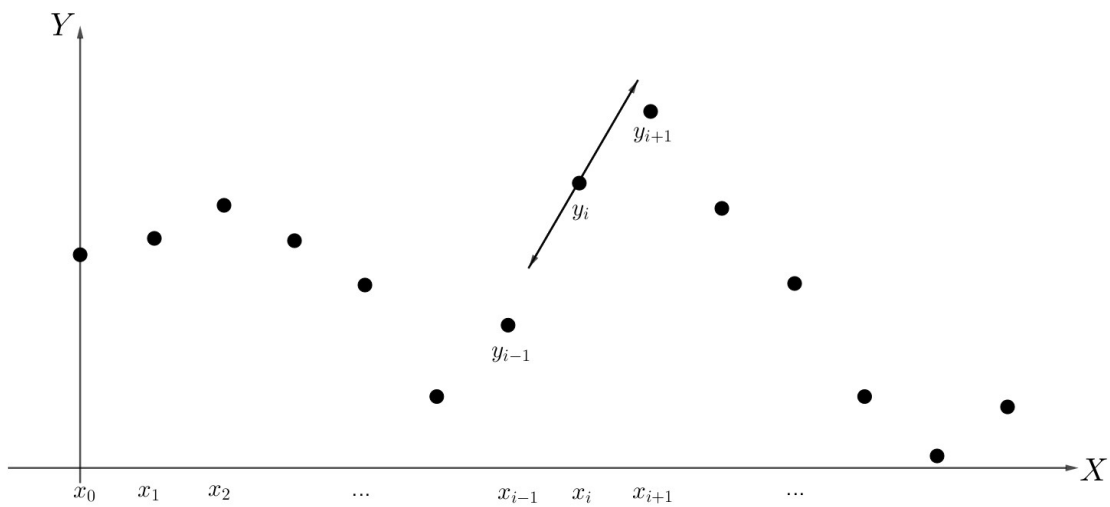
บทที่ 5
การหาอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข

สาเหตุที่ต้องใช้การประมาณค่าเชิงตัวเลขในการอินทิกรัลจำกัดเขตบางฟังก์ชันเราไม่สามารถหาค่าอินทิเกรตได้ เช่น $f(x) = x^x$, $f(x) = e^{-x^2}$ การเขียนโปรแกรมซึ่งการเขียนโปรแกรมเพื่อประมาณพื้นที่ใต้กราฟใด ๆ เป็น เรื่องไม่ง่ายในคำนวณค่าของอินทิเกรตแบบสัญลักษณ์

5.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

พิจารณา อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันของตัวแปรตาม y เทียบกับตัวแปรอิสระ x ซึ่งเขียน แทนด้วย $\frac{dy}{dx}$ เราสามารถประมาณค่าโดยตรงของ $\frac{dy}{dx}$ ได้ 3 วิธีโดยพิจารณาจากรูปต่อไปนี้



ในทางเรขาคณิตเราทราบว่า $\frac{dy_i}{dx_i}$ หมายถึงความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง y_i ที่จุด x_i ดังนั้นเราสามารถประมาณค่าของความชันของเส้นสัมผัสดังกล่าวได้ 3 วิธีโดยตรงดังนี้

1. ผลต่างทางหน้า (Forward difference) เป็นการประมาณค่าจากความชันของเส้นตรง ที่ผ่านจุด x_i และ x_{i+1} นั่นคือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} = f'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

หรือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} = f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

เมื่อ $h = x_{i+1} - x_i$

จากอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด x_i

$$f(x_i+h)=f(x_i)+f'(x_i)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

เมื่อ $\xi \in (x_i, x_i+h)$

ดังนั้น จะได้

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}-\frac{f''(\xi)}{2}h$$

พิจารณาค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย

$$E=-\frac{f''(\xi)}{2}h$$

เขียนได้เป็น

$$E(h)=-\frac{f''(\xi)}{2}h$$

พิจารณา

$$\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{f''(\xi)}{2}h}{h}=-\frac{f''(\xi)}{2}=c<\infty$$

ให้ $E(h)=O(h)$

จะได้ว่า ระเบียบวิธีอันดับหนึ่ง (First-order method) คือ

$$\boxed{f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}+O(h)}$$

2. ผลต่างทางหลัง (Backward difference) เป็นการประมารจากความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด x_{i-1} และ x_i นั่นคือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i}=f'(x_i)\approx\frac{y_i-y_{i-1}}{h}$$

หรือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i}=f'(x_i)\approx\frac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{h}$$

เมื่อ $h=x_i-x_{i-1}$

จากอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด x_i

$$f(x_i-h)=f(x_i)-f'(x_i)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

เมื่อ $\xi \in (x_i-h, x_i)$

ดังนั้น จะได้

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i)-f(x_i-h)}{h}+\frac{f''(\xi)}{2}h$$

หรือ

$$\boxed{f'(x_i)=\frac{f(x_i)-f(x_i-h)}{h}+O(h)}$$

3. ผลต่างศูนย์กลาง (Central difference) เป็นการประมารจากความชันของเส้นตรงที่ ผ่านจุด x_{i-1} และ x_{i+1}

พิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด x_i

$$f(x_i+h)=f(x_i)+f'(x_i)h+\frac{f''(x_i)}{2!}h^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3$$

และ

$$f(x_i-h)=f(x_i)-f'(x_i)h+\frac{f''(x_i)}{2!}h^2-\frac{f'''(\xi_2)}{3!}h^3$$

เมื่อ $\xi_1 \in (x_i, x_i+h)$ และ $\xi_2 \in (x_i-h, x_i)$

จะได้

$$f(x_i+h)-f(x_i-h)=2hf'(x_i)+\frac{h^3}{6}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right]$$

จัดรูปใหม่

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}-\frac{h^2}{12}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right]$$

ถ้า $f'''(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง (x_i-h, x_i+h) โดยทฤษฎีบทค่ากลาง จะได้ว่า

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right], \quad \xi \in (x_i-h, x_i+h)$$

ดังนั้น

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

หรือ

$$\boxed{f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}+O(h^2)}$$

ตัวอย่าง 5.1.1 จงประมาณค่า $f'(1)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x)=x^2$ และพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 5.1.2 จงประมาณค่า $f'(6)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x) = x\sin x$ และพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อน

ตัวอย่าง 5.1.3 จงประมาณค่า $f'(2)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x) = x^x$ และพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อน

5.2 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง

พิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด x_i

$$f(x_i+h)=f(x_i)+f'(x_i)h+\frac{f''(x_i)}{2!}h^2+\frac{f'''(x_i)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4 \quad .....(1)$$

และ

$$f(x_i-h)=f(x_i)-f'(x_i)h+\frac{f''(x_i)}{2!}h^2-\frac{f'''(x_i)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}h^4 \quad .....(2)$$

เมื่อ $\xi_1 \in (x_i, x_i+h)$ และ $\xi_2 \in (x_i-h, x_i)$

นำ $(1)+(2)$ จะได้

$$\frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}=f''(x_i)+\frac{h^2}{24}\left[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right] \quad .....(3)$$

โดยทฤษฎีบทค่ากลาง จะได้ว่า

$$f^{(4)}(\xi)=\frac{1}{2}\left[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right]$$

แทนในสมการ (3) จะได้

$$\frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}=f''(x_i)+\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

หรือ

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

ดังนั้น จะได้ระเบียบวิธีอันดับสอง (Second-order method) ดังนี้

$$\boxed{f''(x_i)=\frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}+O(h^2)}$$

ตัวอย่าง 5.2.1 จงประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x)=x^2e^{2x}$ ที่จุด $x=0$ โดยใช้ค่าความกว้างช่วง $h=0.2,\ h=0.1,\ h=0.05$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

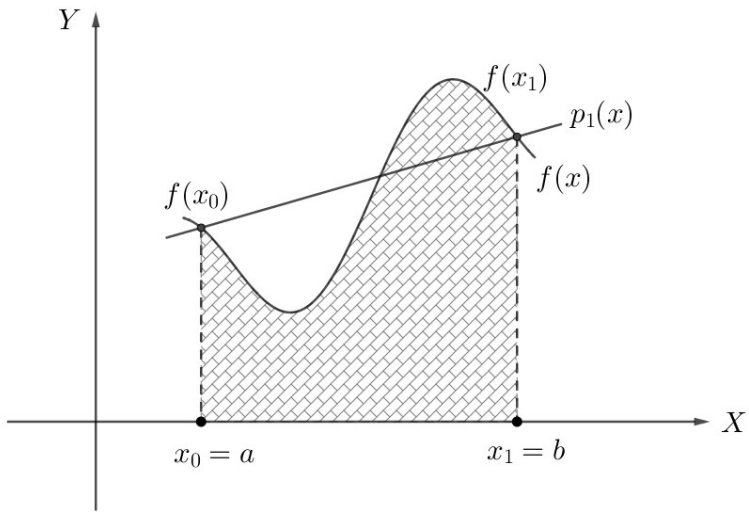
.....

.....

.....

ตัวอย่าง 5.2.2 จงประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x) = x^2 e^x \cos x$ ที่จุด $x = 1$ โดยใช้ค่าความกว้างช่วง $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$

5.3 การประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู



จากรูปจะได้ว่า

$$f(x) \approx p_1(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx$$

พิจารณาพหุนามลากรางจ์

$$p_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)$$

ดังนั้น

$$f(x) \approx \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)$$

เขียนใหม่

$$f(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1) + \frac{1}{2}f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)$$

เมื่อ $\xi \in (x_0, x_1)$

ดังนั้น

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right] + \frac{1}{2}f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx$$

พิจารณา $\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right]dx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right]dx &= \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}f(x_1)\right]_{x_0}^{x_1} \\ &= \frac{(x_1-x_0)}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right] \\ &= \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]\end{aligned}$$

พิจารณา $\frac{1}{2}f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx$ โดยทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx &= \frac{1}{2}f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)dx \\ &= \frac{1}{2}f''(\xi)\left[\frac{x^3}{3}-\frac{(x_1+x_0)}{2}x^2+x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1} \\ &= -\frac{h^3}{12}f''(\xi)\end{aligned}$$

เมื่อ $\xi \in (x_0, x_1)$

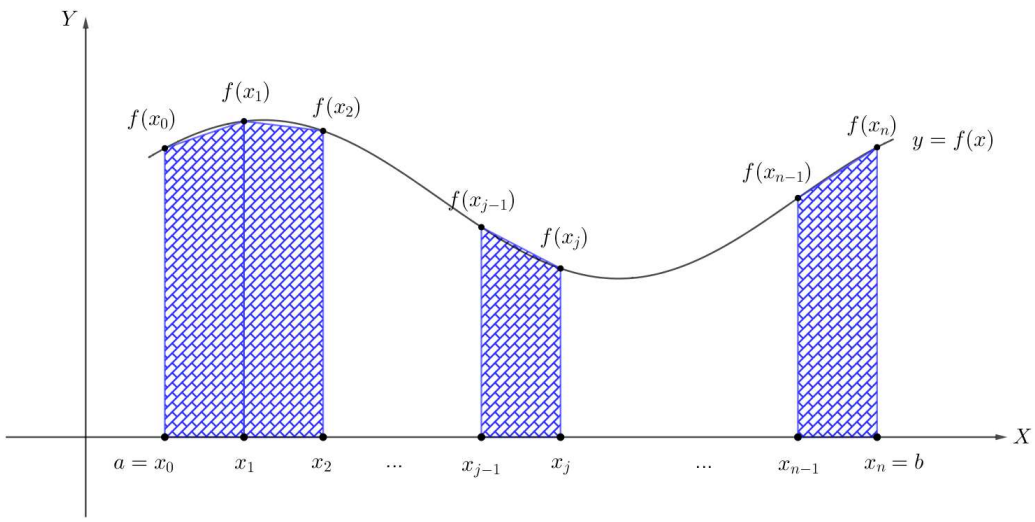
ดังนั้น

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

หรือ

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]}$$

เราจะขยายแนวคิดนี้ไปยัง การใช้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูปในการประมาณพื้นที่ใต้กราฟ



จากรูปจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \left[\frac{1}{2}(f(x_0)+f(x_1))h+\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)h+\ldots+\frac{1}{2}(f(x_{n-1})+f(x_n)h\right] \\ &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right] \\ &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)+f(x_n)\right]\end{aligned}$$

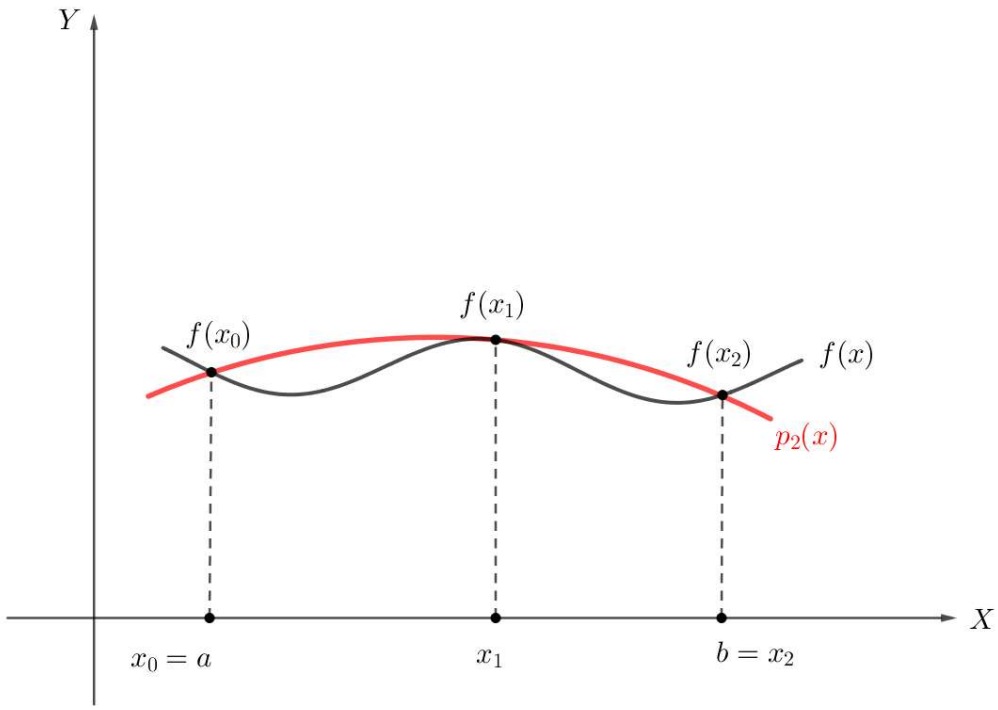
หรือ

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)+f(x_n)\right]-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)}$$

ตัวอย่าง 5.3.1 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{1}^{5} x^2 dx$ โดยใช้สูตรสี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อกำหนด $n = 4$

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ โดยใช้สูตรสี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อกำหนด $n = 5$

5.4 การประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธีซิมป์สัน



จากพหุนามลากรางจ์ดีกรีสอง

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

ดังนั้น

$$f(x) \approx p_2(x)$$

หรือ

$$f(x) = p_2(x) + \text{remainder term}$$

จาก

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right]dx +$$
$$+ \int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}f'''(\xi(x))dx$$

พิจารณาใหม่ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{3!}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-x_1)^4$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) = \left[f(x_1)x + f'(x_1)\frac{(x-x_1)^2}{2} + f''(x_1)\frac{(x-x_1)^3}{6} + f'''(x_1)\frac{(x-x_1)^3}{24}\right]_{x_0}^{x_2} +$$
$$+ \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx$$

โดยใช้สูตรผลต่างตรงกลาง และโดยใช้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย จะได้ว่า

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

หรือ

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x) \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)\right]}$$

หรือสูตรของซิมป์สันในรูปทั่วไป (Composite Simpson's Rule) คือ

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)}$$

เมื่อ $\xi \in (a,b)$

ตัวอย่าง 5.4.1 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_1^5 x^2 dx$ โดยใช้ระเบียบวิธีซิมป์สัน เมื่อกำหนด $n = 4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

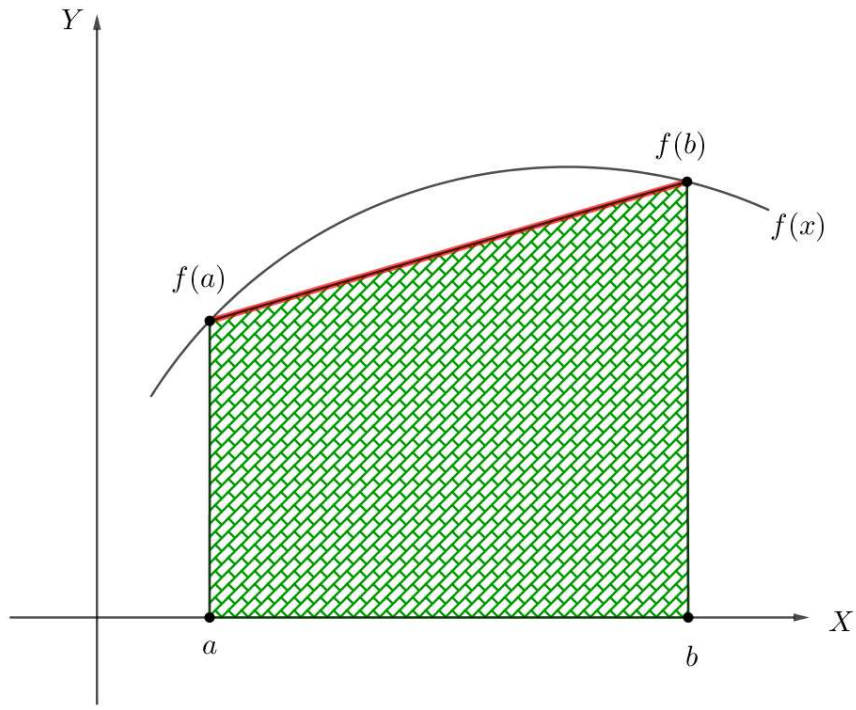
.....

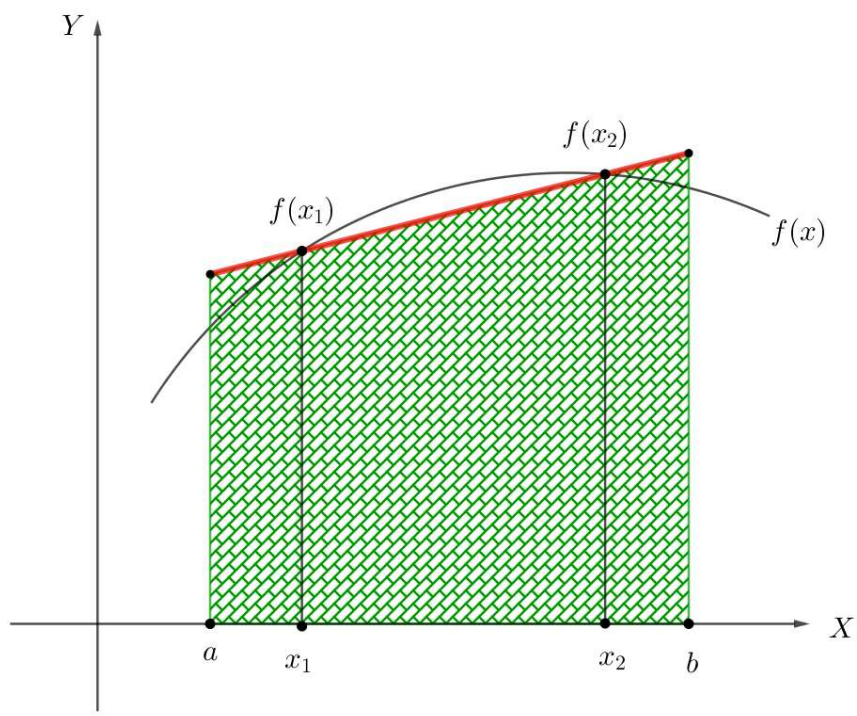
.....

.....

ตัวอย่าง 5.4.2 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ โดยใช้ระเบียบวิธีซิมป์สัน เมื่อกำหนด $n = 5$

5.5 การประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบเกาส์ควอดราเจอร์





สมมติการประมาณค่าปริพันธ์

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

เมื่อ c_i เป็นค่าคงที่

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

ถ้า $n = 2,\ 2n - 1 = 3$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

เมื่อ $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ เป็นค่าคงที่

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x) &= \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)dx \\ &= a_0 \int_{-1}^{1} 1dx + a_1 \int_{-1}^{1} xdx + a_2 \int_{-1}^{1} x^2 dx + a_3 \int_{-1}^{1} x^3 dx \\ &= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)\end{aligned}$$

เงื่อนไขในการหา c_1, c_2, x_1, x_2

$$f(x) = 1,\ f(x) = x,\ f(x) = x^2,\ f(x) = x^3$$

<u>กรณีที่ 1</u> $f(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1$$

ดังนั้นจะได้เงื่อนไขแรกคือ $c_1 + c_2 = 2$ ..... (1)

<u>กรณีที่ 2</u> $f(x) = x$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

ดังนั้นจะได้เงื่อนไขแรกคือ $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ ..... (2)

<u>กรณีที่ 3</u> $f(x) = x^2$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2$$

ดังนั้นจะได้เงื่อนไขแรกคือ $c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \dfrac{2}{3}$ ..... (3)

<u>กรณีที่ 4</u> $f(x) = x^3$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3$$

ดังนั้นจะได้เงื่อนไขแรกคือ $c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0$ ..... (4)

แก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$c_1 + c_2 = 2 \quad ..... (1)$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \quad ..... (2)$$
$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 = \frac{2}{3} \quad ..... (3)$$
$$c_1x_1^3 + c_2x_2^3 = 0 \quad ..... (4)$$

จะได้

$$c_1 = 1, c_2 = 1, x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ดังนั้น

$$\int_{-1}^{1} f(x) \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$
$$= 1 \cdot f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

จุดเกาส์สองจุดบนช่วง $(-1,1)$ คือ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ หรือ -0.5773 , 0.5773

ถ้าเราเพิ่มจุดเกาส์เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จะได้ว่า

n	ค่าถ่วงน้ำหนัก	ตำแหน่งจุดเกาส์
2	$c_1 = 1.0000$	$x_1 = -0.5773$
	$c_2 = 1.0000$	$x_2 = 0.5773$

n	ค่าถ่วงน้ำหนัก	ตำแหน่งจุดเกาส์
3	$c_1 = 0.5556$	$x_1 = -0.7746$
	$c_2 = 0.8889$	$x_2 = 0.0000$
	$c_3 = 0.5556$	$x_3 = 0.7746$

n	ค่าถ่วงน้ำหนัก	ตำแหน่งจุดเกาส์
4	$c_1 = 0.3479$	$x_1 = -0.8611$
	$c_2 = 0.6521$	$x_2 = -0.3400$
	$c_3 = 0.6521$	$x_3 = 0.3400$
	$c_4 = 0.3479$	$x_4 = 0.8611$

n	ค่าถ่วงน้ำหนัก	ตำแหน่งจุดเกาส์
5	$c_1 = 0.2369$	$x_1 = -0.9062$
	$c_2 = 0.4786$	$x_2 = -0.5385$
	$c_3 = 0.5689$	$x_3 = 0.0000$
	$c_4 = 0.0.4786$	$x_4 = 0.5385$
	$c_5 = 0.2369$	$x_5 = 0.9062$

ตัวอย่าง ถ้า $n = 3$

$$\int_{-1}^{1} f(x) \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$
$$= 0.556 \cdot f\left(-0.7746\right) + 0.8889 \cdot f\left(0.0000\right) + 0.5556 \cdot f(0.7746)$$

การเปลี่ยนช่วงการอินทิเกรต

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$
$$t = \frac{2x-a-b}{b-a}$$

เขียนในรูปของ x ได้เป็น

$$x = \frac{1}{2}\Big[(b-a)t + a + b\Big]$$
$$t = -1 \rightarrow x = a$$
$$t = 1 \rightarrow x = b$$

หาอนุพันธ์

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(b-a)$$

หรือ

$$dx = \frac{1}{2}(b-a)dt$$

ดังนั้น

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}(b-a)dt$$

ตัวอย่าง 5.5.1 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{1}^{5} x^2 dx$ โดยใช้ระเบียบเกาส์ควอดราเจอร์ เมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์เป็น 2, 3, 4 และ 5 ตามลำดับ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 5.5.2 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ โดยใช้ระเบียบเกาส์ควอดราเจอร์ เมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์เป็น $2,\ 3,\ 4$ และ 5 ตามลำดับ

ตัวอย่าง 5.5.3 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{-3}^{3} x\cos x dx$ โดยใช้ระเบียบเกาส์ควอดราเจอร์ เมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์เป็น $2,\ 3,\ 4$ และ 5 ตามลำดับ (ค่าจริงมีค่า 1.9691)