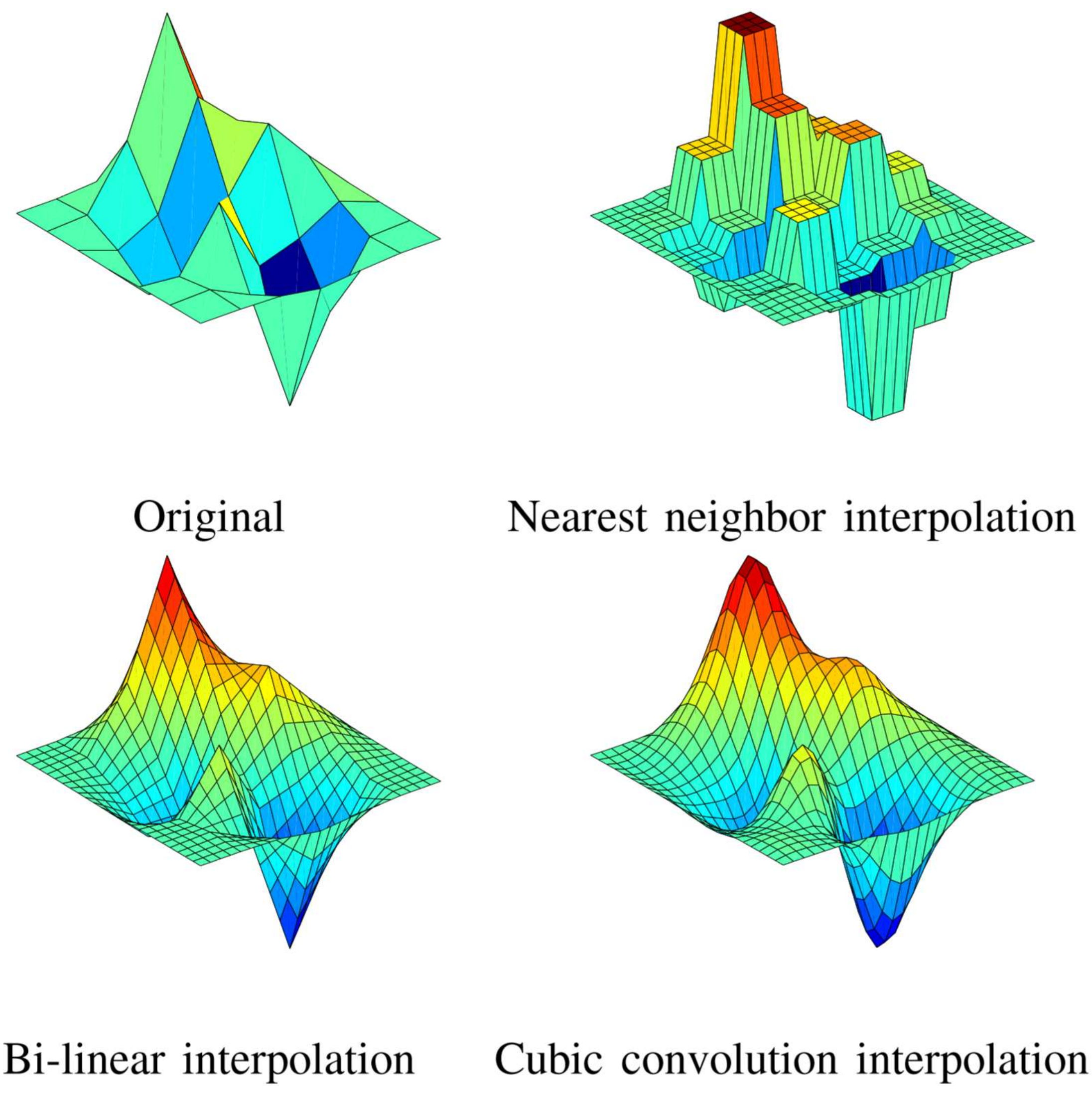
บทที่ 4
การประมาณค่าในช่วง

การใช้งานข้อมูลสำรวจระยะไกลมีความนิยมอย่างมากสำหรับงานทางด้านภูมิสารสนเทศในปัจจุบัน ก่อนการนำข้อมูลจากภาพถ่ายดาวเทียมไปใช้ประโยชน์ มีความจำเป็นต้องปรับแก้เชิงเรขาคณิตเพื่อลดข้อบกพร่องทางเครื่องรับสัญญาณและรูปลักษณะของวัตถุ ขั้นตอนหนึ่งที่สำคัญคือการประมาณค่าของจุดภาพหรือค่าความสว่างของจุดภาพใหม่ วิธีการที่ใช้ได้แก่ การประมาณค่าจากตำแหน่งใกล้สุด (Nearest neighbor interpolation) การประมาณค่าแบบเส้นคู่ (Bi-linear interpolation) และการประมาณค่าแบบการประสานเชิงลูกบาศก์ (Cubic convolution interpolation) หลังการปรับแก้ค่าความสว่างจะทำให้ข้อมูลเกิดความเรียบต่อเนื่อง แต่อาจมีรายละเอียดลดลงจากข้อมูลภาพเริ่มต้น



รูปที่ 4.1 : พื้นผิวที่ผ่านกระบวนการคำนวณค่าความสว่างของจุดภาพใหม่

การปรับค่าของจุดภาพข้างต้นเป็นตัวอย่างหนึ่งของการประยุกต์ใช้การประมาณค่าในช่วงซึ่งเราจะกล่าวถึงแนวคิดดังกล่าวในบทนี้ การประมาณค่าในช่วง (interpolation) เป็นกระบวนการสร้างพหุนามที่มีกราฟผ่านข้อมูลที่กำหนด

ถ้ามีข้อมูลตัวเลขมาชุดหนึ่ง (อาจมาจากการวัดหรือการทดลอง) ต้องการทราบค่าอื่นที่ไม่ได้ทำการวัดในช่วงที่วัดข้างต้น จะประมาณค่าเหล่านั้นขึ้นมา โดยการประมาณค่านั้นจะสมมุติว่า พฤติกรรมของข้อมูลที่ได้สามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชันพหุนาม เรียกการประมาณค่านี้ว่า การประมาณค่าในช่วง (Interpolation) ถ้าจำนวนข้อมูลที่วัดได้มีมากพอจะทำให้การประมาณฟังก์ชันพหุนามใกล้เคียงกับพฤติกรรมของฟังก์ชันจริงที่เป็นตัวแทนของข้อมูล และทำให้การประมาณค่าข้อมูลค่าอื่นที่ไม่ได้ทำการวัดมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ควรจะเกิดขึ้นจริง ๆ

4.1 พหุนามลากรางจ์ (Lagrange Polynomial)

ถ้าทราบจุดข้อมูล 2 จุดคือ $(x_0, f(x_0))$ และ $(x_1, f(x_1))$ ต้องการหาพหุนาม ดีกรีหนึ่ง $p_1(x)$ (คือเส้นตรง) ที่ผ่านทั้งสองจุด จะได้สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดทั้งสองคือ

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

เมื่อ $x = x_0$ จะได้

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

เมื่อ $x = x_1$ จะได้

$$\begin{aligned} p_1(x_1) &= \frac{x_1 - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \\ &= f(x_1) \end{aligned}$$

จะได้พหุนาม $p_1(x)$ ที่มีสมบัติตามต้องการ

ถ้ากำหนดให้ $L_{1,0}(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ และ $L_{1,1}(x) = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_0}$ จะได้ว่า

$$\boxed{p_1(x) = L_{1,0}(x) f(x_0) + L_{1,1}(x) f(x_1)}$$

ถ้าทราบจุดข้อมูล 3 จุดคือ $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ และ $(x_2, f(x_2))$ แล้วจะสร้างพหุนาม ดีกรี 2 ที่ผ่านทั้งสามจุดได้คือ

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

ถ้ากำหนดให้ $L_{2,0}(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$, $L_{2,1}(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$

และ $L_{2,2}(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$ จะได้ว่า

$$\boxed{p_2(x) = L_{2,0}(x) f(x_0) + L_{2,1}(x) f(x_1) + L_{2,2}(x) f(x_2)}$$

ทำนองเดียวกันเมื่อทราบข้อมูล $n+1$ จุดจะสามารถสร้างพหุนามดีกรี n ได้ ดังนี้

นิยาม 4.1 พหุนามลากรองจ์ (Lagrange Polynomial) อันดับ n คือ

$$\boxed{p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x)f(x_k)}$$

เมื่อ

$$L_{n,k}(x)=\frac{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k-x_j)}$$

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดชุดข้อมูลดังตาราง

x	4.1	6.1
$f(x)$	7.1	2.3

จงหาพหุนามที่ประมาณค่าในช่วงของชุดข้อมูลในตารางข้างต้นพร้อมทั้งหา ค่าประมาณของ $f(5)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 4.2 กำหนดชุดข้อมูลดังตาราง

x	2	2.5	4
$f(x)$	0.5	0.4	0.25

จงหาพหุนามที่ใช้ประมาณค่าในช่วงของชุดข้อมูลข้างต้นพร้อมทั้งหา ค่าประมาณของ $f(3)$

ตัวอย่าง 4.3 จงคำนวณค่าของ $\ln 9.2$ โดยสร้างพหุนามลากรางจ์จาก

$$\ln 9.0 = 2.1972,\ \ln 9.5 = 2.2513 \text{ และ } \ln 10.0 = 2.3026$$

ตัวอย่าง 4.4 กำหนดชุดข้อมูลดังตาราง

x	1	2.5	4	5.5	7
y	0	0.916	1.386	1.705	1.950

จงหาพหุนามดีที่ใช้ประมาณค่าในช่วงของชุดข้อมูลข้างต้นพร้อมทั้งหาค่าประมาณของ y ที่ $x = 6$

ตัวอย่าง 4.5 กำหนดชุดข้อมูลดังตาราง

x	1	2	3	4	5	6
y	3.31	18.28	57.97	134.44	259.75	445.96

จงหาพหุนามดีที่ใช้ประมาณค่าในช่วงของชุดข้อมูลข้างต้นพร้อมทั้งหาค่าประมาณของ y ที่ $x = 4.5$

4.2 การประมาณค่าในช่วงโดยระเบียบวิธีผลต่างย่อยของนิวตัน (Newton's divided – difference interpolating polynomials)

กำหนดให้ $p_n(x)$ เป็นพหุนามประมาณค่าดีกรี n ของฟังก์ชัน f ที่แต่ละจุด $x_0, x_1, \ldots, x_n$ และสมมติให้ $p_n(x)$ อยู่ในรูป

$$\boxed{p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})}$$

โดยที่ $p_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n$

ถ้าทราบ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เราจะได้ $p_n(x)$ สำหรับประมาณ f ที่ต้องการ

พิจารณาหาค่า a_0

จาก $p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$

แทน $x = x_0$ จะได้ $p_n(x_0) = a_0$

และจาก $p_n(x_0) = f(x_0)$ จะได้

$$a_0 = f(x_0)$$

แทนค่า a_0 จะได้

$$p_n(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

พิจารณาหาค่า a_1

แทน $x = x_1$ จะได้ $p_n(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$

และจาก $p_n(x_1) = f(x_1)$ จะได้

$$f(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$$
$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

แทนค่า a_0 และ a_1 จะได้

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

พิจารณาหาค่า a_2

แทน $x = x_2$ จะได้ $p_n(x_2) = f(x_0) + \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

และจาก $p_n(x_2) = f(x_2)$ จะได้

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$
$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{x_2 - x_0}$$

พิจารณาความสัมพันธ์ a_0, a_1 และ a_2

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$
$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{x_2 - x_0}$$

นิยามสัญลักษณ์ผลต่างย่อย

ผลต่างย่อยอันดับที่ 0 แทนด้วย $f[x_i] = f(x_i)$

ผลต่างย่อยอันดับที่ 1 แทนด้วย $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$

ผลต่างย่อยอันดับที่ k แทนด้วย $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \dfrac{f[x_{i+1}, ..., x_{i+k}] - f[x_{i+1}, ..., x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$

จากนิยามจะเห็นว่า

$$a_0 = f[x_0]$$
$$a_1 = f[x_0, x_1]$$
$$\vdots$$
$$a_n = f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \\ &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ... + \\ &\quad f[x_0, x_1, ..., x_k](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \\ &= f[x_0] + \left(\sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})\right) \end{aligned}$$

เราสามารถเขียนสูตรการประมาณค่าในช่วงโดยระเบียบวิธีผลต่างย่อยของนิวตัน ให้อยู่ในรูปของตารางเพื่อสะดวกในการคำนวณได้ดังนี้

i	x_i	$f(x_i)$	อันดับ 0	อันดับ 1	อันดับ 2	...	อันดับ n
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_0]$				
				$f[x_0, x_1]$			
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
				$f[x_1, x_2]$			
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
				$f[x_2, x_3]$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_0, x_1, ..., x_n]$
				$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$			
$n-1$	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f[x_{n-1}]$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
				$f[x_{n-1}, x_n]$			
n	x_n	$f(x_n)$	$f[x_n]$				

ตัวอย่าง 4.6 จงประมาณค่าภายในช่วงที่ $x = 5$ โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างย่อยของนิวตัน เมื่อกำหนดข้อมูลดังตาราง

x	4.1	6.1
$f(x)$	7.1	2.3

ตัวอย่าง 4.7 จงประมาณค่าภายในช่วงที่ $x = 3$ โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างย่อยของนิวตัน เมื่อกำหนดข้อมูลดังตาราง

x	2	2.5	4
$f(x)$	0.5	0.4	0.25

ตัวอย่าง 4.8 จงประมาณค่าภายในช่วงที่ $x = 6$ โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างย่อยของนิวตัน เมื่อกำหนดข้อมูลดังตาราง

x	1	2.5	4.1	5.5	7
y	0	0.916	1.386	1.705	1.950