# บทที่ 3
# ระบบสมการเชิงเส้น

ปัญหาพื้นฐานที่พบอยู่เสมอ อย่างหนึ่งก็คือ การแก้สมการเชิงเส้นที่มีหลายสมการและหลายตัวแปร (ตัวไม่ทราบค่า) ซึ่งเรียกว่าระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations) มีรูปแบบ ทั่วไปสำหรับ $m$ สมการและมีตัวแปร $n$ ตัวดังนี้

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

ค่า $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ที่สอดคล้องกับสมการทุกสมการ เรียกว่าเป็นคำตอบ หรือผลเฉลยของระบบสมการ ระบบสมการอาจมี ผลเฉลยเดียว หลายผลเฉลย หรือไม่มีผลเฉลยก็ได้

ในทางเรขาคณิตจะเขียนแทนสมการที่มีสองตัวแปรด้วยเส้นตรง มีสองสมการก็คือมีเส้นตรงสองเส้น จุดที่เส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นตัดกันจะเป็นผลเฉลยของระบบสมการ เพราะว่าจุดนั้นสอดคล้องกับทั้งสองสมการ

สำหรับสมการที่มีสองตัวแปร ถ้าระบบสมการนั้นประกอบด้วยสมการเดียว จุดทุกจุดบนเส้นตรงจะสอดคล้องกับสมการ นั่นคือ ได้ผลเฉลยหลายผลเฉลย ถ้าระบบสมการประกอบด้วยสองสมการหากเขียนเป็นเส้นตรงถ้าเส้นตรงสองเส้นนั้นตัดกันก็แสดงว่ามีผลเฉลยเดียวคือจุดตัดที่เส้นตรงตัดกันถ้าเส้นตรงสองเส้นนั้นขนานกันและไม่ทับกันก็แสดงว่าระบบสมการไม่มีผลเฉลย ถ้าเส้นตรงสองเส้นทับกันเป็นเส้นเดียวก็แสดงว่าระบบสมการมีหลายผลเฉลย ในกรณีที่สมการมีสองตัวแปรแต่ระบบสมการประกอบด้วยสามสมการหรือมากกว่าถ้าเส้นตรงทั้งหมดตัดกันที่จุดเดียวก็แสดงว่าระบบสมการนั้นมีผลเฉลยเดียว แต่โดยทั่วไปถ้าระบบสมการมีจำนวนสมการมากกว่าจำนวนตัวแปรมักคาดว่าระบบ สมการนั้นไม่มีผลเฉลย

## 1. วิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณหาผลเฉลยของระบบสมการนั้นไม่จำเป็นต้องให้ได้เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูปในเมทริกซ์สุดท้าย การคำนวณหาผลเฉลยสามารถกระทำได้โดยง่ายจากเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน (ถ้าทำโดยคอมพิวเตอร์) เมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบนได้มาในระหว่างการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถวลดรูป ดังนั้นจึงใช้แรงงานน้อยกว่าวิธีการดังกล่าวนี้มีชื่อว่า **วิธีการกำจัดแบบเกาส์** วิธีการซึ่งใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวนี้อาจเรียกว่าเป็น วิธีตรง ผลเฉลยที่ได้จะเป็น ผลเฉลยที่แม่นตรง (exact solution) ถ้าไม่นับความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการปัดเศษ มีวิธีการที่จะลดความคลาดเคลื่อนนี้ให้น้อยที่สุดโดยการเลือกตัวยืนในการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว ซึ่งจะกล่าวต่อไป วิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการอีกวิธีหนึ่งก็คือ การกระทำซ้ำ วิธีการอย่างหลังนี้จะได้ผลเฉลยเพียงค่าประมาณเท่านั้น วิธีการกำจัดแบบเกาส์ เป็นวิธีที่นิยมใช้เป็นวิธีตรง คือใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเพื่อให้กลายเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว แล้วเขียนผลเฉลยวิธีการเป็นดังนี้ สมมุติว่าระบบสมการมีจำนวนตัวแปรและจำนวนสมการเท่ากัน (คาดว่าระบบสมการจะมีผลเฉลยชุด

เดียว) ให้เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการคือ $[A:B]$ ต่อไปใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว พยายามทำให้เมทริกซ์แต่งเติมมีลักษณะเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว (หรือเกือบเป็นขั้นบันไดแบบแถว ตัวนำไม่จำเป็นต้องเป็น 1) ในรูป $[U:C]$ แล้วเขียนผลเฉลยจากระบบสมการที่มี $[U:C]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติมสรุปขั้นตอนวิธีได้ดังนี้

1. เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นคือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

2. ใช้วิธีการดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกระทำกับเมทริกซ์แต่งเติม จนกระทั่งได้เมทริกซ์ $[A:B]$ อยู่ในรูปเมทริกซ์(เกือบ)ขั้นบันไดแบบแถวคือ

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & \vdots & c_1 \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} & \vdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} & \vdots & c_n \end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์นี้สามารถเขียนระบบสมการและหาผลเฉลยได้ง่ายโดยการแทนค่าย้อนหลัง นั่นคือเขียนกลับเป็นระบบสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n &= c_1 \\ u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ u_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

จากสมการสุดท้ายหาค่า $x_n$ ได้เป็น

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$$

และจากสมการถัดขึ้นไป หาค่า $x_{n-1}$ โดยการแทนค่า $x_n$ ที่ได้จากสมการสุดท้าย และกระทำดังนี้ต่อไปจะได้

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{c_n}{u_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{c_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}} \\ &\vdots \\ x_2 &= \frac{c_2 - (u_{23}x_3 + u_{24}x_4 + \cdots + u_{2n}x_n)}{u_{22}} \\ x_1 &= \frac{c_1 - (u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n)}{u_{11}} \end{aligned}$$

มีข้อแม้ว่า $u_{ii}$ ทุกตัวต้องไม่เป็นศูนย์เงื่อนไขเป็นดังนี้

1. ถ้า $u_{ii} \neq 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ แสดงว่าระบบสมการมีผลเฉลย 1 ชุด

2. ถ้า $u_{ii} = 0$ และ $c_i \neq 0$ สำหรับ $i$ บางค่าและทุกค่า $j \geq i$ แสดงว่าระบบสมการไม่มีผลเฉลย

3. ถ้า $u_{ii} = 0$ และ $c_i = 0$ สำหรับ $i$ บางค่าและทุกค่า $j \geq i$ และไม่มีดังข้อ 2. แสดงว่าระบบสมการมีผลเฉลยจำนวนไม่จำกัด

**ตัวอย่าง 1.1** จงใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ในการหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้

$$1.133x_1 + 5.281x_2 = 6.414$$
$$24.14x_1 - 1.210x_2 = 22.93$$

**ตัวอย่าง 1.2** จงระบบสมการต่อไปนี้ด้วยวิธีการกำจัดแบบเกาส์

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**ตัวอย่าง 1.3** จงใช้วิธีตัดออกของเกาส์ในการหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ *ถ้าสามารถทำได้*

ก. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= -17 \\ 2x_1 - 6x_2 - 16x_3 &= -46 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -5 \end{aligned}$$

ข. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -8 \\ 4x_1 - 2x_2 + 10x_3 &= 10 \end{aligned}$$

ค. $$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 21 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 &= 12 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 &= -9 \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_4 &= -4 \end{aligned}$$

ง. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 26x_4 &= -7 \\ -2x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -10 \end{aligned}$$

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

## 2. ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู

สำหรับหัวข้อนี้เราจะทำการแยกเมทริกซ์ $A$ ออกเป็นเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมล่าง $L$ ที่มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็นหนึ่งและเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมบน $U$ ที่มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักไม่เป็นศูนย์ ในที่นี้เราจะเขียนสัญลักษณ์และเสนอแนวคิดต่าง ๆ ในรูปแบบของเมทริกซ์ขนาด $4\times 4$ แนวคิดเดียวกันนี้สามารถขยายเพื่อใช้กับเมทริกซ์ขนาด $n\times n$

**นิยาม 2.1** ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน มีตัวประกอบเชิงสามเหลี่ยม ถ้าเมทริกซ์ $A$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลคูณระหว่างเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง $L$ ที่มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็นหนึ่ง และเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมบน $U$

ในรูปแบบของเมทริกซ์ขนาด $4\times 4$ เราอาจแยกตัวประกอบของเมทริกซ์ไม่เอกฐานได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

สมมติว่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการ $AX = B$ มีตัวประกอบเชิงสามเหลี่ยม $A = LU$ ดังนั้นสามารถเขียนระบบสมการใหม่ได้ดังนี้

$$LUX = B$$

หรืออาจแยกเป็นสองระบบสมการได้ดังนี้

$$LY = B$$

และ

$$UX = Y$$

เพราะฉะนั้นการหาผลเฉลยของระบบสมการ $LUX = B$ ในลำดับแรกจะต้องหาผลเฉลยของระบบสมการ $LY = B$ หรือ

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ l_{21}y_1 + y_2 &= b_2 \\ l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + y_3 &= b_3 \\ l_{41}y_1 + l_{42}y_2 + l_{43}y_3 + y_4 &= b_4 \end{aligned}$$

จากนั้นแทนค่า $Y$ ในสมการ $UX = Y$ แล้วหาผลเฉลยของระบบสมการ $UX = Y$ หรือ

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4 &= y_1 \\ u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + u_{24}x_4 &= y_2 \\ u_{33}x_3 + u_{34}x_4 &= y_3 \\ u_{44}x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 2.1** จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธีการแยกแบบแอลยู

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 21 \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 52 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 8x_4 &= 79 \\ 4x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 6x_4 &= 82 \end{aligned}$$

จาก $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 & 8 \\ 4 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix}$ จะได้ $LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

**ตัวอย่าง 2.2** จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธีการแยกแบบแอลยู

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\
-2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\
x_1 - x_2 - 4x_3 &= -7
\end{aligned}
$$

**ตัวอย่าง 2.3** จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธีการแยกแบบแอลยู

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &= 9 \\
6x_1 + 4x_2 - x_3 &= 25 \\
2x_1 + 4x_3 &= 20
\end{aligned}
$$

**ตัวอย่าง 2.4** จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธีการแยกแบบแอลยู

ก. $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -8 \\ 9x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 24 \end{aligned}$$

ข. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 - x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 15 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 14x_4 &= 12 \end{aligned}$$

## 3. ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบจาโคบี

สำหรับหัวข้อต่อไปนี้ จะแนะนำวิธีที่ใช้แก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยกระบวนการทำซ้ำ ซึ่งเริ่มจากการสร้างสมการทำซ้ำ คาดเดาค่าของผลเฉลย หรือการกำหนดค่าเริ่มต้น แล้วทำการคำนวณซ้ำจนกระทั่งผลลัพธ์ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ยอมรับได้

พิจารณาระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

เริ่มด้วยการเขียนแต่ละสมการย่อยใหม่ให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถคำนวณ $x_1$ ได้โดยตรงจากสมการที่ 1 คำนวณ $x_2$ ได้โดยตรงจากสมการที่ 2 และทำเช่นนี้เรื่อยไป ดังนี้

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.1)$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.2)$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.3)$$

ให้ $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ และ $x_3^{(k)}$ แทนจำนวน $x_1, x_2$ และ $x_3$ ที่ได้จากการคำนวณครั้งที่ $k$ ดังนั้นสมการการทำซ้ำสำหรับสมการ $(3.1)-(3.3)$ คือ

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}}{a_{11}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.4)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}}{a_{22}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.5)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}}{a_{33}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.6)$$

จากนั้นจึงเริ่มทำการคำนวณโดยเริ่มจากการเดาค่าเริ่มต้น $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ และ $x_3^{(0)}$ และแทนค่าเหล่านี้ในสมการ $(3.4)-(3.6)$ แล้วทำเช่นนี้เรื่อยไปจนผลลัพธ์ของ $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ และ $x_3^{(k)}$ ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่มีความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ เราสามารถหยุดกระบวนการทำซ้ำโดยสมการ $(3.4)-(3.6)$ เมื่อ

$$\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| < \varepsilon$$

หรือ

$$\frac{\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right|}{\left| x^{(k+1)} \right|} < \varepsilon$$

**ตัวอย่าง 3.1** จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธีทำซ้ำแบบจาโคบี

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่เกิน $\varepsilon = 0.01$ และค่าเริ่มต้นเท่ากับ $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^t$

**ตัวอย่าง 3.2** จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธีทำซ้ำแบบจาโคบี

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ค่าเริ่มต้นเท่ากับ $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^t$

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

**ตัวอย่าง 3.3** จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธีทำซ้ำแบบจาโคบี

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่เกิน $\varepsilon = 0.05$ และค่าเริ่มต้นเท่ากับ $x^{(0)} = [100\ 100\ 100]^t$

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

## 4. ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

จากวิธีจาโคบีเราคำนวณค่าของ $x_2^{(k+1)}$ จากค่า $x_1^{(k)}$ แม้ว่าในขณะนั้นได้หาค่า $x_1^{(k)}$ แล้วก็ตามในความเป็นจริง การหาค่าของ $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)},\ldots, x_n^{(k+1)}$ นี้ใช้ค่าประมาณ $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)},\ldots, x_n^{(k)}$ ทุกตัว วิธีจาโคบีจึงมีชื่อเรียกว่า วิธีการแทนค่าพร้อมกัน (Simultaneous Displacement) แต่วิธีเกาส์-ไซเดล ถูกปรับปรุงขึ้นเพื่อให้การคำนวณลู่เข้าหาคำตอบเร็วขึ้น หลักของวิธีเกาส์ไซเดลอยู่ที่การนำค่า $x_1^{(k+1)}$ ที่เกิดจากการคำนวณครั้งที่ $k+1$ จากสมการที่ 1 ไปใช้ในการคำนวณค่าของ $x_2^{(k+1)}$ จากสมการที่ 2 จากนั้นนำค่า $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}$ ที่ได้ไปใช้ในการคำนวณค่า $x_3^{(k+1)}$ จากสมการที่ 3 และดำเนินกระบวนการเช่นนี้เรื่อยไป

**ตัวอย่าง 4.1** จงใช้วิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล หาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**ตัวอย่าง 4.2** จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธีทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \\
5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\
-x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

**ตัวอย่าง 4.3** จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธีทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

.........................................................................................................................................................

**ตัวอย่าง 4.4** จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ด้วยระเบียบวิธีต่อไปนี้

ก. การกำจัดแบบเกาส์ ข. การแยกแบบแอลยู

ค. การทำซ้ำแบบจาโคบี ง. การทำซ้ำแบบเกาส์ – ไซเดล

พร้อมทั้งสังเกตข้อดีและข้อจำกัดของแต่ละวิธี

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**นิยาม 4.1** ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์ขนาด เรียก $A$ ว่าเมทริกซ์เด่นชัดแนวทแยงโดยแท้ (strictly diagonally dominant matrix) ถ้าค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกในตำแหน่งแนวเส้นทแยงมุมหลักมีค่ามากกว่าผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของแต่ละสมาชิกที่เหลือบนแถวเดียวกัน

**ตัวอย่าง 4.5** ระบบสมการใดต่อไปนี้ มีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์เด่นชัดแนวทแยงโดยแท้

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

**ตัวอย่าง 4.6** ระบบสมการใดต่อไปนี้ มีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์เด่นชัดแนวทแยงโดยแท้

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

**ทฤษฎีบท 4.1** ถ้าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $A$ ของระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ เป็นเมทริกซ์เด่นชัดแนวทแยงโดยแท้แล้ว สำหรับค่าเริ่มต้นใด ๆ ระเบียบวิธีจาโคบี และระเบียบวิธีของเกาส์ - ไซเดล ลู่เข้าสู่ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น