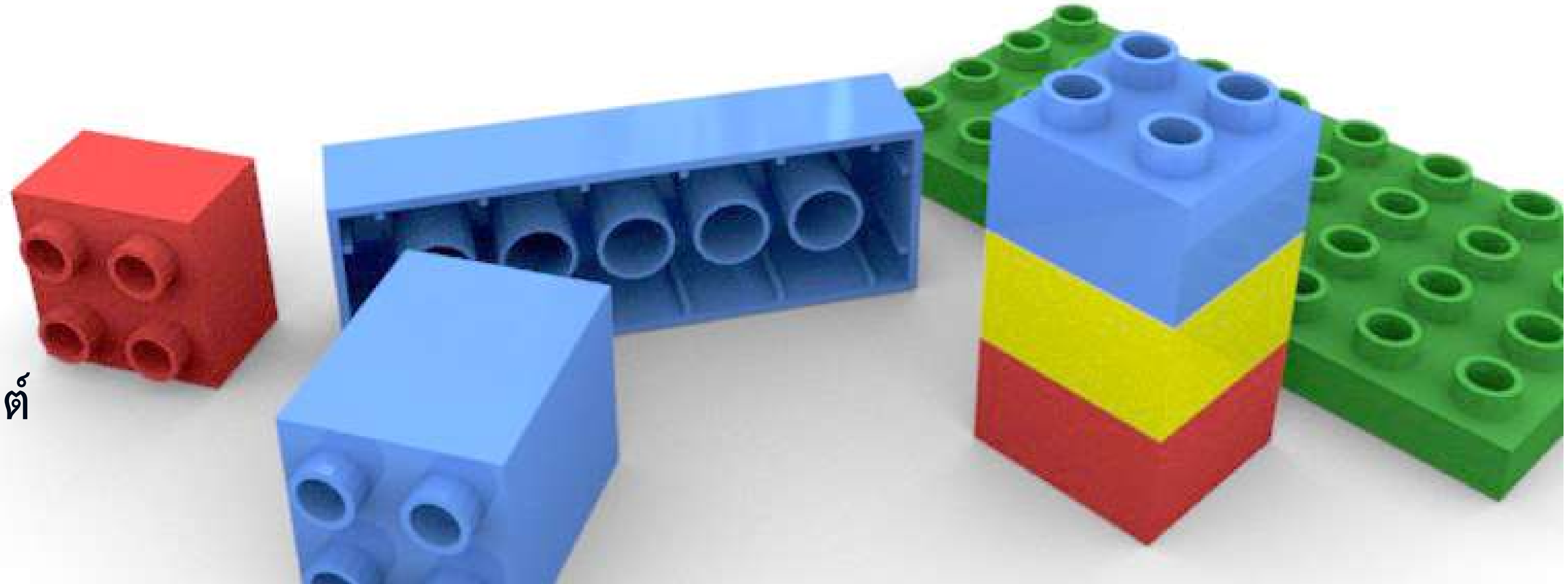
บทที่ 3

การประยุกต์ของอนุพันธ์



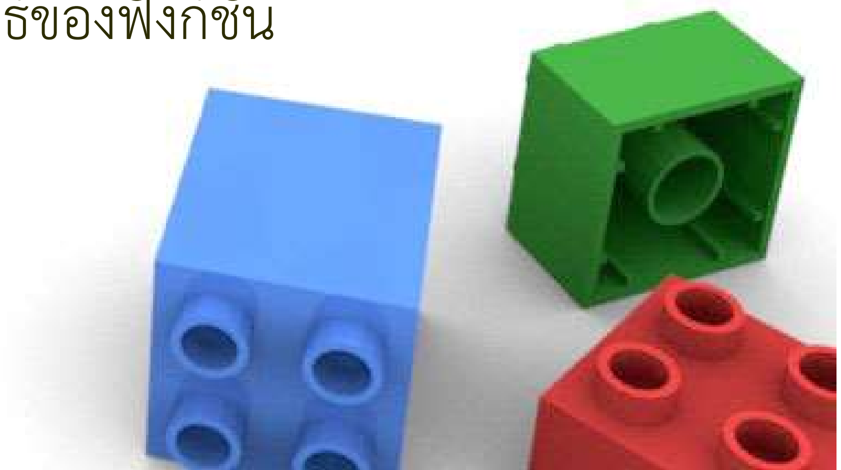
4111102

แคลคูลัสและการประยุกต์

อ.รัชนีกร ทบประดิษฐ์

เนื้อหาในบทนี้ประกอบด้วย

- 3.1 ความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติ
- 3.2 ความเร็วและความเร่ง
- 3.3 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด
- 3.4 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน
- 3.5 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า
- 3.6 จุดสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

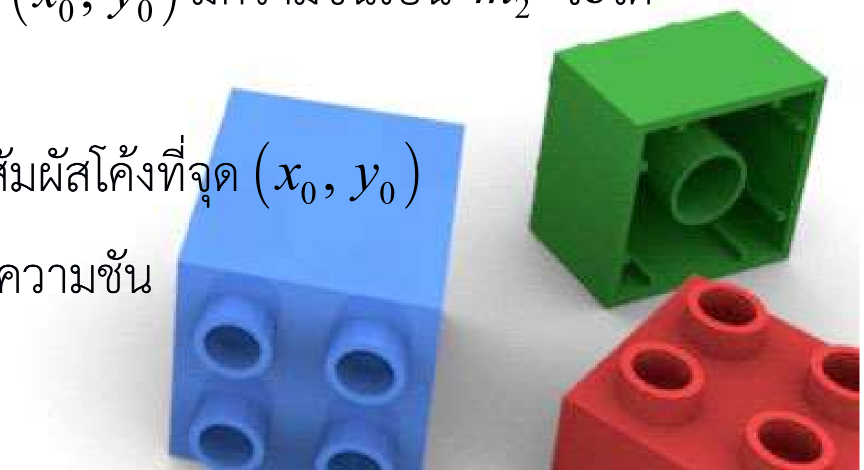


3.1 ความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติ

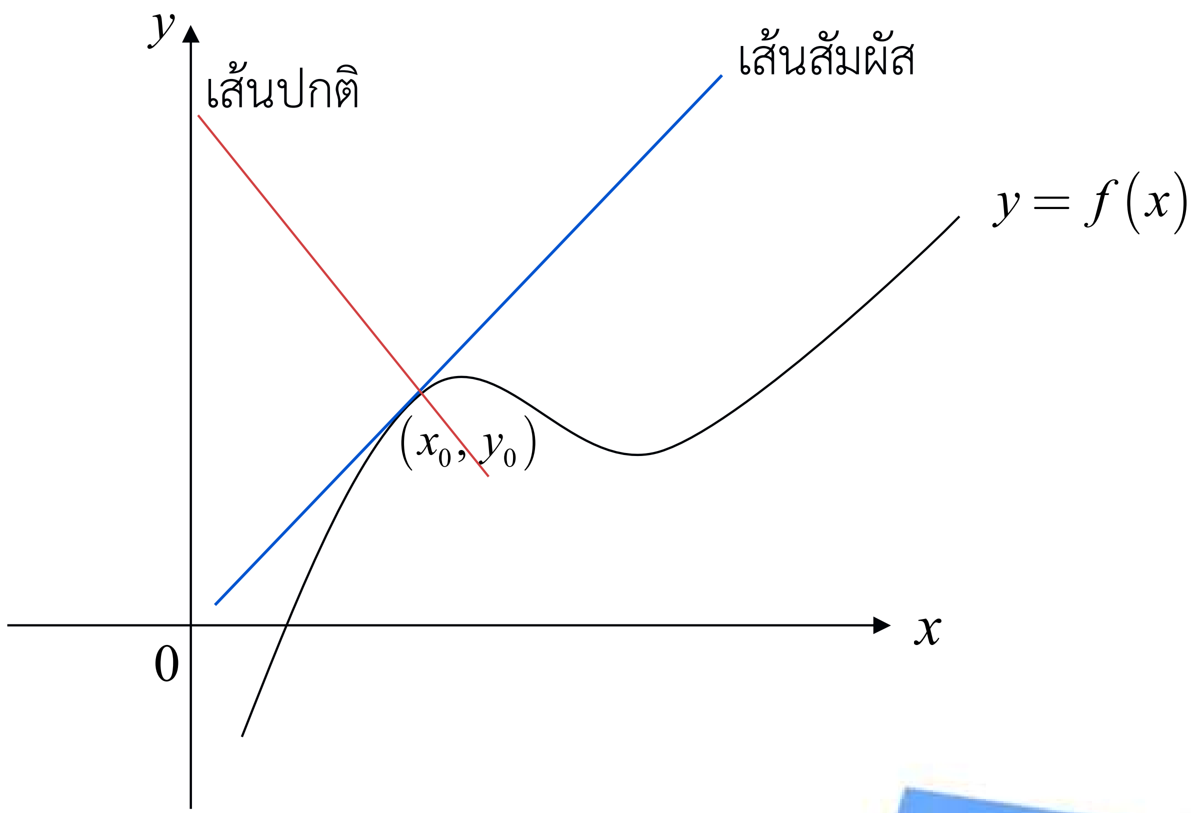
ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการเส้นโค้ง จะได้ว่า

1. ความชันของเส้นโค้ง $m = \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$
2. เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ผ่านจุด (x_0, y_0) ใด ๆ จะมีความชันของเส้นโค้ง คือ $m = f'(x_0)$
3. สมการเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x_0, y_0) จะมีสมการเส้นตรงเป็น $y - y_0 = m(x - x_0)$ เมื่อ m คือ ความชันของเส้นโค้ง
4. สมการเส้นตรงมีความชันเป็น m_1 **<u>ตั้งฉากกับ</u>** เส้นสัมผัสที่ (x_0, y_0) มีความชันเป็น m_2 จะได้ว่า $m_1 \times m_2 = -1$
5. สมการเส้นตรงมีความชันเป็น m_1 **<u>ขนานกับ</u>** เส้นสัมผัสที่ (x_0, y_0) มีความชันเป็น m_2 จะได้ว่า $m_1 = m_2$
6. สมการเส้นปกติ คือ สมการที่ตั้งฉากกับสมการเส้นตรงที่สัมผัสโค้งที่จุด (x_0, y_0)
7. เส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด คือ (x, y) และ (x_0, y_0) จะได้ความชัน

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$



3.1 ความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติ



ภาพแสดงสมการเส้นโค้ง เส้นสัมผัส และเส้นปกติ

3.1 ความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติ

ตัวอย่าง 1 ถ้า $y = x - 3x^2$ เป็นสมการเส้นโค้ง จงหา

1. ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(1, -1)$ 2. สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, -1)$

วิธีทำ จาก $y = x - 3x^2$

1. หาความชันของเส้นโค้ง

$$m = y' = f'(x) = 1 - 6x$$

ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(1, -1)$ คือ แทน $x = 1$ จะได้ $m = 1 - 6(1) = -5$

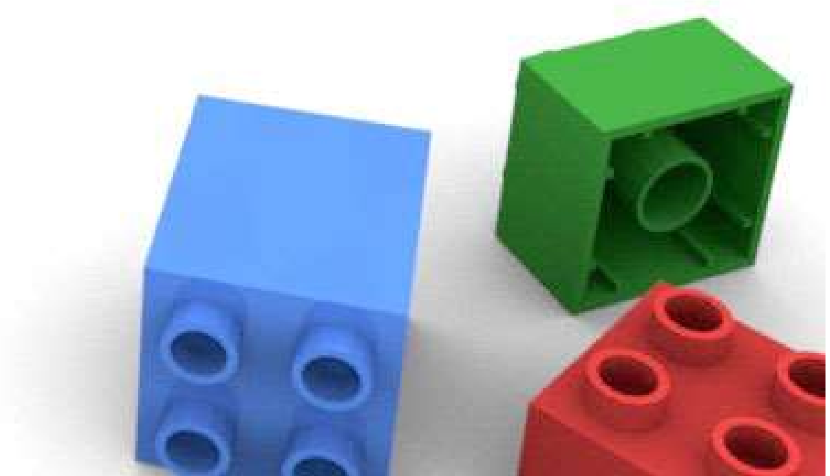
2. หาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, -1)$ และมีความชันของเส้นโค้ง $m = -5$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y - (-1) &= -5(x - 1) \\ y + 1 &= -5x + 5 \\ y &= -5x + 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, -1)$

คือ $y = -5x + 4$



3.1 ความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติ

ตัวอย่าง 2 ถ้า $y=\dfrac{2x^2+5}{x}$ เป็นสมการเส้นโค้ง จงหา

1. ความชันของเส้นโค้งที่ $x=1$ 2. สมการเส้นปกติที่ $x=1$

วิธีทำ จาก $y=x-3x^2$

1. หาความชันของเส้นโค้ง

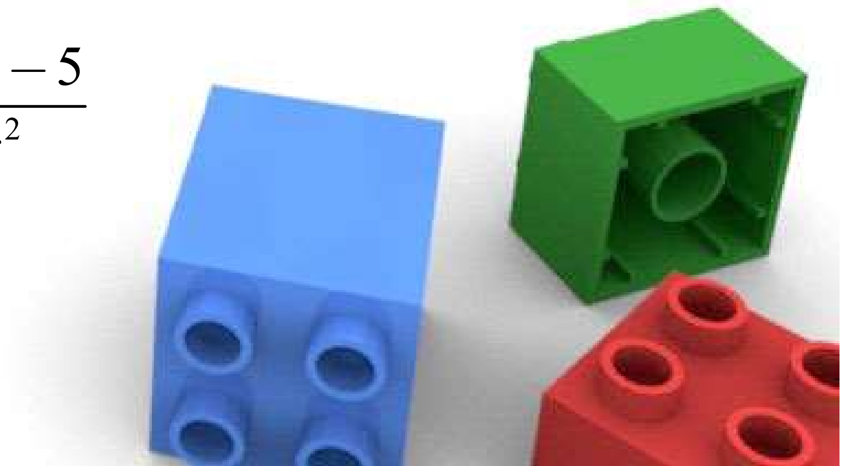
$$m=y'=\frac{x\dfrac{d}{dx}\left(2x^2+5\right)-\left(2x^2+5\right)\dfrac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$=\frac{x(4x)-\left(2x^2+5\right)(1)}{x^2}$$

$$=\frac{4x^2-2x^2-5}{x^2}=\frac{2x^2-5}{x^2}$$

ความชันของเส้นโค้งที่ $x=1$ จะได้

$$m=\frac{2(1)^2-5}{(1)^2}=-3$$



3.1 ความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติ

2. หาสมการเส้นปกติที่ $x=1$

เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัส $m=-3$ ดังนั้นความชันของเส้นปกติ $m=\frac{1}{3}$

หาค่า y จาก $y=\frac{2x^2+5}{x}$ จะได้ $y=\frac{2(1)^2+5}{1}=7$

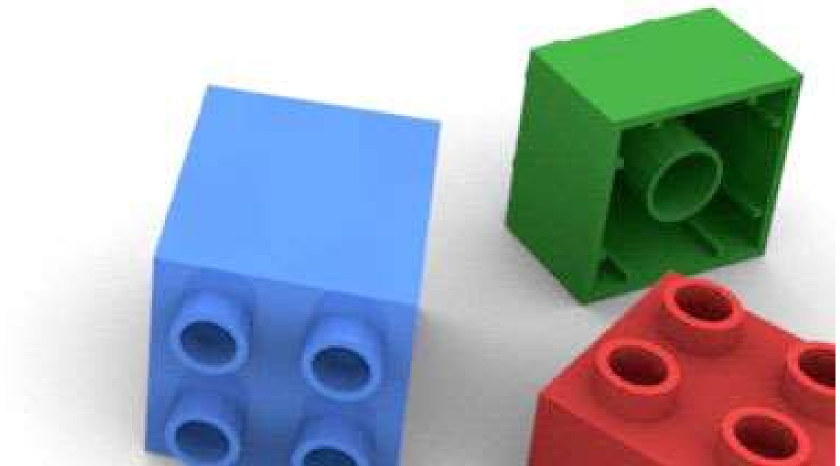
ดังนั้น สมการเส้นปกติที่ $x=1$ และมีความชันของเส้นปกติ $m=\frac{1}{3}$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
y-7 &= \frac{1}{3}(x-1) \\
y-7 &= \frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \\
y &= \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}+7 \\
y &= \frac{1}{3}x+\frac{20}{3}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สมการเส้นปกติที่ $x=1$

คือ $y=\frac{1}{3}x+\frac{20}{3}$



3.1 ความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติ

ตัวอย่าง 3 จากสมการเส้นโค้ง $y=\sqrt{7+3x}$ จงหาความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติที่ $x=3$

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

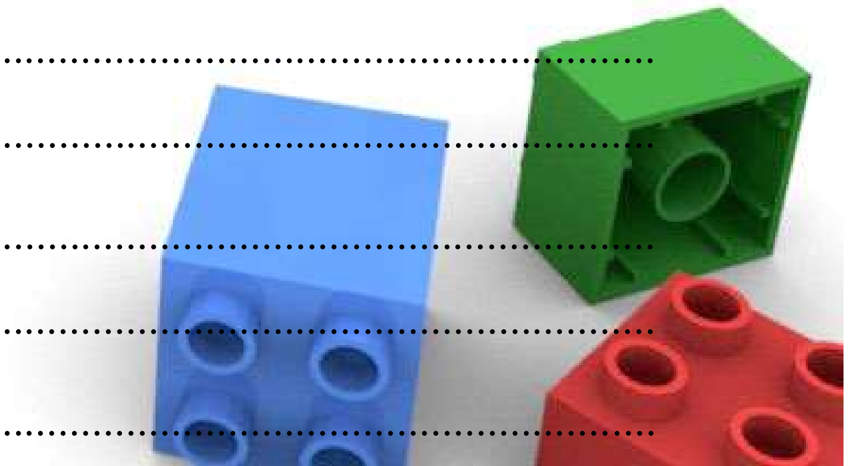
....

....

....

....

....



3.1 ความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติ

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

....

....

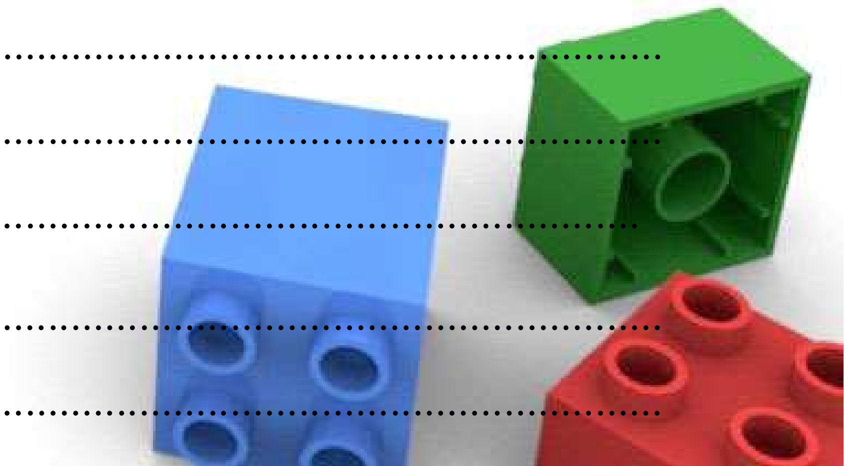
....

....

....

....

....



3.1 ความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติ

ตัวอย่าง 4 จากสมการเส้นโค้ง $y = x\ln x + 3x$ จงหาความชันของเส้นโค้งที่ $x = 1$ และสมการเส้นสัมผัสที่ $x = 1$

วิธีทำ..

....

....

....

....

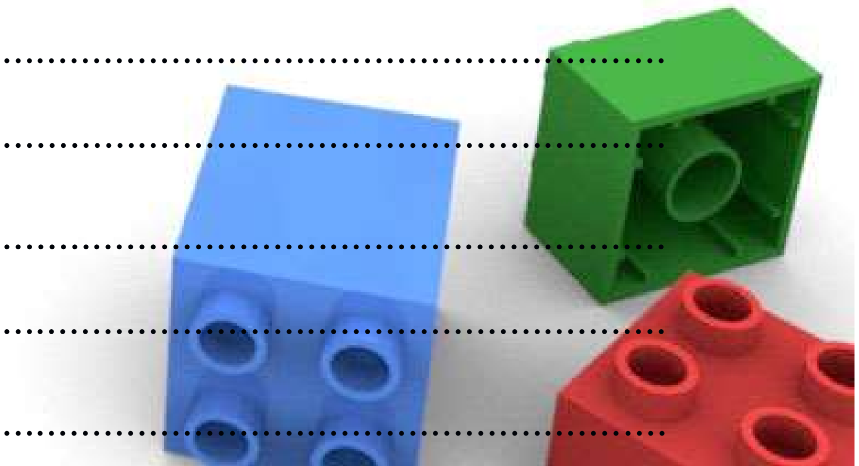
....

....

....

....

....



3.1 ความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติ

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

....

....

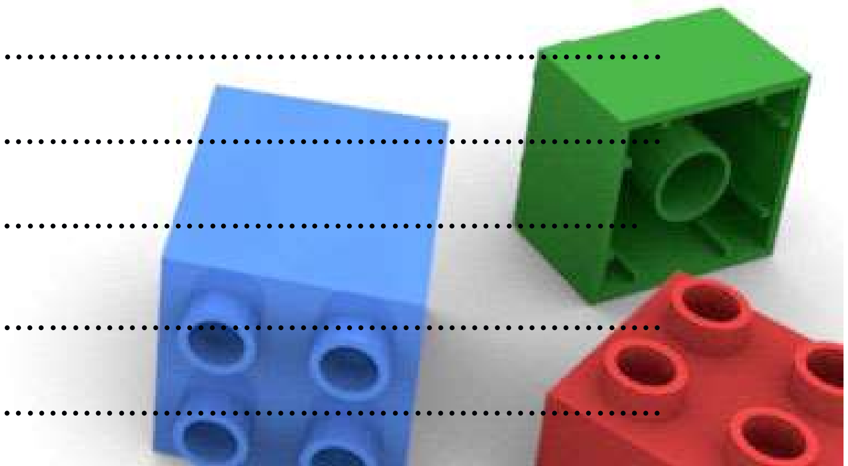
....

....

....

....

....



3.2 ความเร็วและความเร่ง

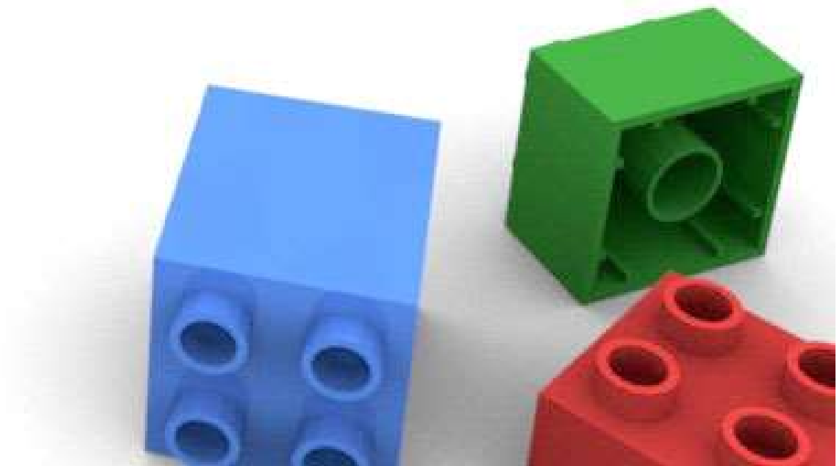
การเคลื่อนที่ของวัตถุมีการเคลื่อนที่ได้หลายวิธี ซึ่งมีทั้งการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงและไม่ใช่แนวเส้นตรง แต่สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเท่านั้น

วัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงมีสมการการเคลื่อนที่ในรูปความสัมพันธ์ของระยะทางและเวลา ให้วัตถุเคลื่อนที่ได้ทาง s หน่วยระยะทาง โดยใช้เวลาในการเคลื่อนที่ t หน่วยเวลา ดังนั้น

$s = f(t)$ แทนสมการการเคลื่อนที่

ความเร็วโดยทั่วไป หาได้จากอัตราส่วนระหว่างปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ s (ระยะทาง) กับปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ t (เวลา) แต่ถ้าต้องการความเร็วชั่วขณะหรือความเร็วที่เวลา t ใด ๆ คือ $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{ds}{dt}$ ดังนั้น

ความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $v = \frac{ds}{dt}$

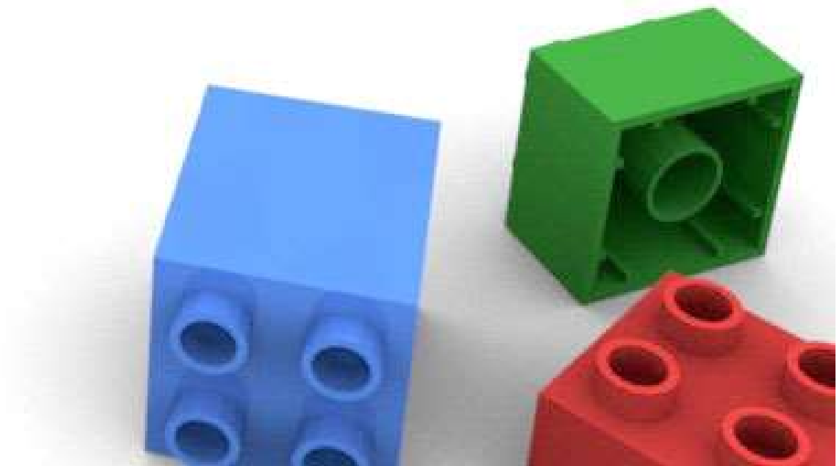


3.2 ความเร็วและความเร่ง

ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ หาได้จากอัตราส่วนระหว่างปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ v (ความเร็ว) กับปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ t (เวลา) แต่ถ้าต้องการความเร่งชั่วขณะหรือความเร่งที่เวลา t ใด ๆ คือ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{dv}{dt}$ ดังนั้น

ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $a = \frac{dv}{dt}$ แต่ $v = \frac{ds}{dt}$ ดังนั้น

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$



3.2 ความเร็วและความเร่ง

ตัวอย่าง 5 วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงมีสมการการเคลื่อนที่ $s = \frac{1}{4}t^4 - 2t + 5$ เมตร จงหาความเร็ว ความเร่งที่เวลา t ใด ๆ และหาความเร็ว ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

วิธีทำ ให้วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงมีสมการการเคลื่อนที่ $s = \frac{1}{4}t^4 - 2t + 5$

ความเร็วที่เวลา t ใด ๆ คือ

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}t^4 - 2t + 5\right)$$

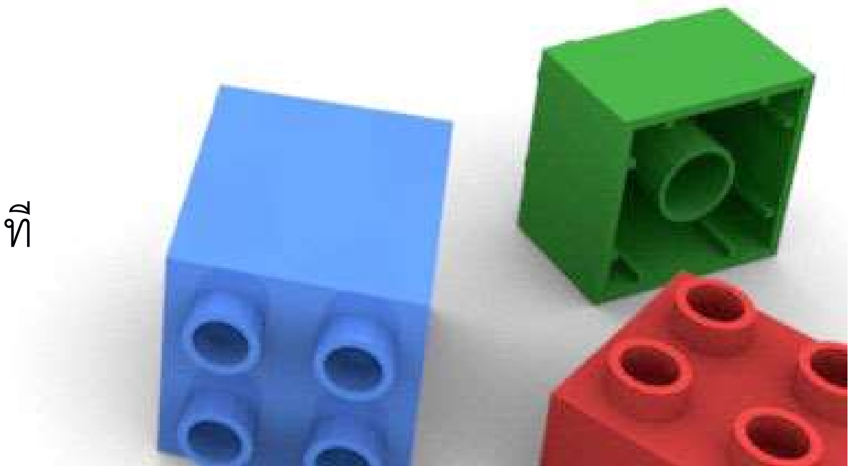
$$= t^3 - 2$$

จะได้ว่า

$$v = t^3 - 2$$

และความเร็วเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

$$v = (2)^3 - 2 = 6 \quad \text{เมตร/วินาที}$$



3.2 ความเร็วและความเร่ง

ความเร่งที่เวลา t ใด ๆ คือ

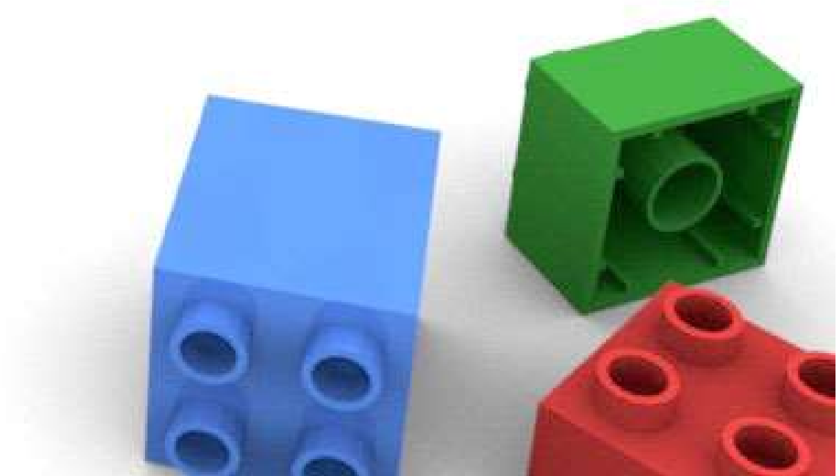
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^3 - 2\right)$$
$$= 3t^2$$

จะได้ว่า

$$a = 3t^2 \quad \text{เมตร/วินาที}$$

และความเร่งเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

$$a = 3(2)^2 = 12 \quad \text{เมตร/(วินาที)}^2$$



3.2 ความเร็วและความเร่ง

ตัวอย่าง 6 ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้เมื่อเวลา t ใด ๆ เขียนแทนด้วย $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 7$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นระยะทาง และ t มีหน่วยเป็นวินาที

1. จงหาระยะทางและความเร่ง เมื่อ $v = 0$
2. จงหาระยะทางและความเร็ว เมื่อ $a = 0$

วิธีทำ..

....

....

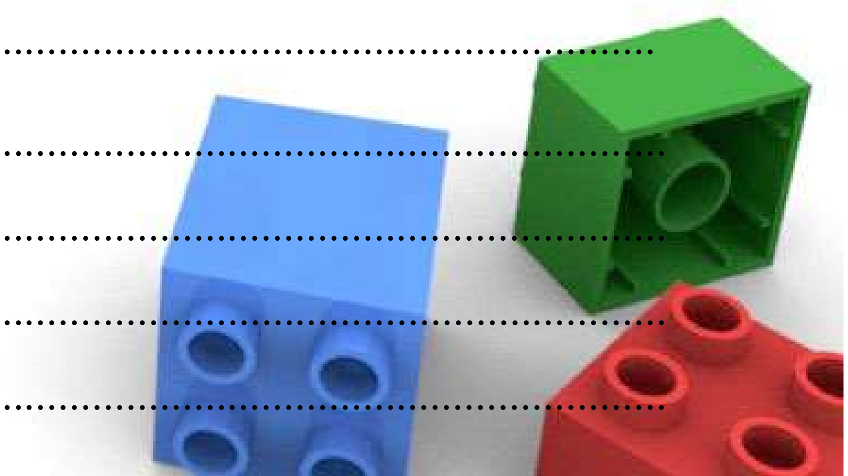
....

....

....

....

....



3.2 ความเร็วและความเร่ง

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

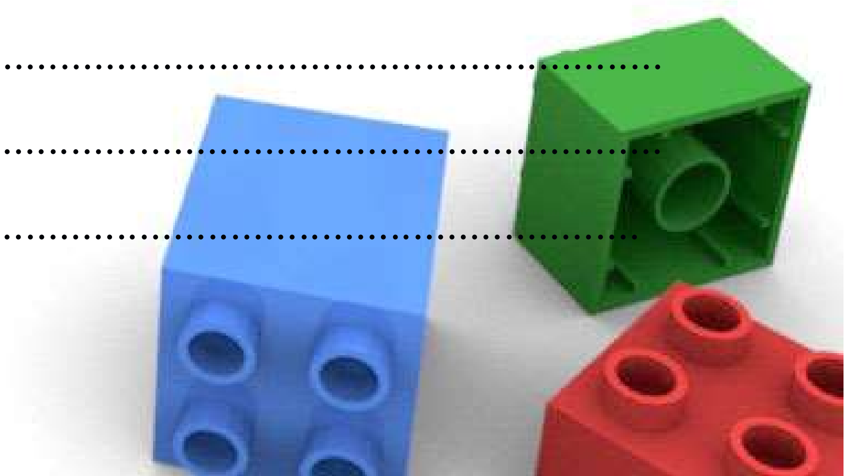
....

....

....

....

....



3.2 ความเร็วและความเร่ง

ตัวอย่าง 7 อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง โดยมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น $s = 2t^3 + 6t^2 - 7t + 15$ เมื่อ s เป็นระยะทางของการเคลื่อนที่มีหน่วยเป็นฟุต และ t เป็นเวลา มีหน่วยเป็นวินาที

1. จงหาความเร็วและความเร่งของอนุภาคเมื่อเวลา t ใด ๆ
2. จงหาความเร็วของอนุภาคเมื่อเวลา $t = 2$
3. จงหาความเร่งของอนุภาคเมื่อ $t = 1$ และ $t = 3$

วิธีทำ..

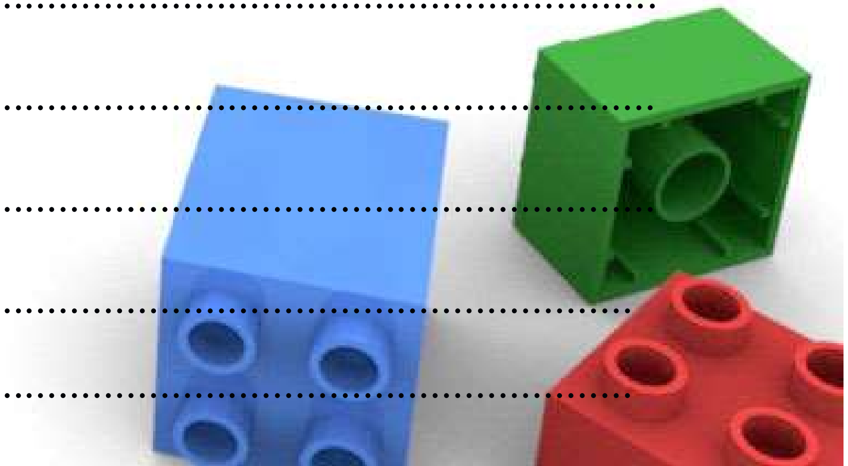
....

....

....

....

....



3.2 ความเร็วและความเร่ง

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

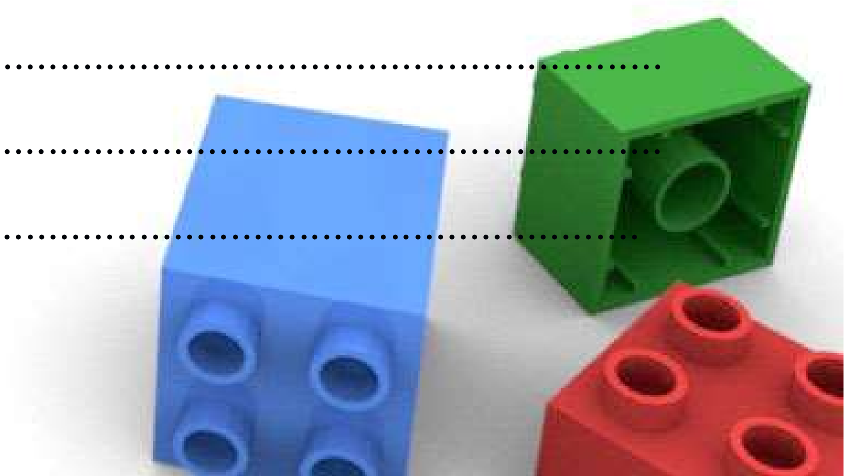
....

....

....

....

....



3.3 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

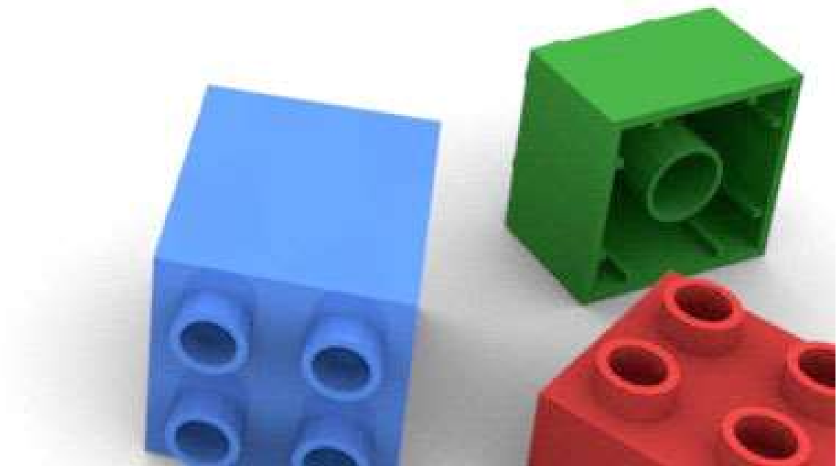
บทนิยาม : ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น (Increasing function) บนช่วง (a,b) ถ้า

$f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุกค่า $a < x_1 < x_2 < b$

บทนิยาม : ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลดลง (Decreasing function) บนช่วง (a,b) ถ้า

$f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุกค่า $a < x_1 < x_2 < b$

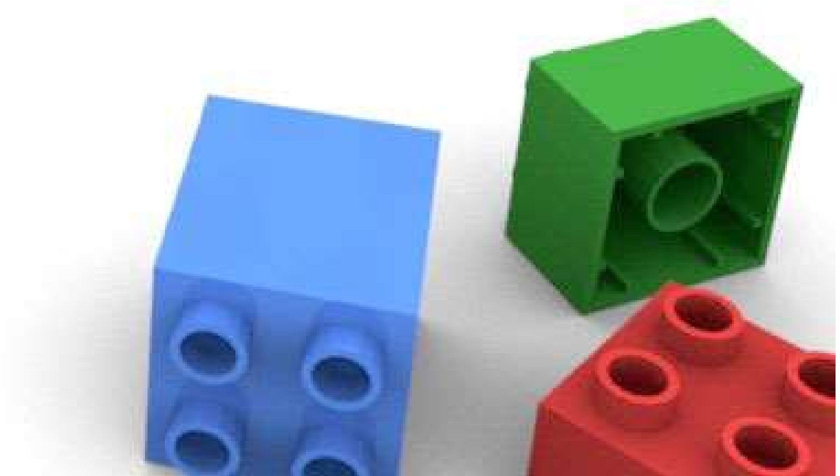
เนื่องจากการพิจารณาฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือฟังกันลดลงจากกราฟนั้นจะค่อนข้างยาก และเสียเวลาในการวาดกราฟ ดังนั้นเราสามารถพิจารณาโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง มาช่วยในการพิจารณาโดยใช้ทฤษฎีต่อไปนี้



3.3 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ทฤษฎีบท : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง (a,b) และต่อเนื่องบน $[a,b]$ แล้ว

1. ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วง (a,b) แล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง (a,b)
2. ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วง (a,b) แล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง (a,b)



3.3 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ตัวอย่างที่ 8 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นและลดลงช่วงใด

วิธีทำ หาอนุพันธ์ของ $f(x)$

จะได้ว่า $f'(x) = x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$

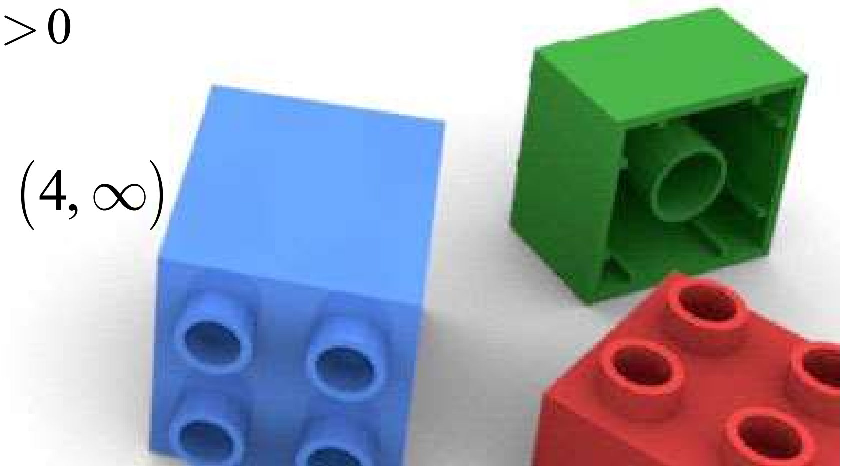
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น เมื่อ $(x-2)(x-4)>0$

และ f เป็นฟังก์ชันลดลง เมื่อ $(x-2)(x-4)<0$

+++		---		+++
$f'(x)>0$	2	$f'(x)<0$	4	$f'(x)>0$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, 2)$ หรือ $(4, \infty)$

f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $(2, 4)$



3.3 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ตัวอย่างที่ 9 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=x^3-6x^2+20$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นและลดลงช่วงใด

วิธีทำ..

....

....

....

....

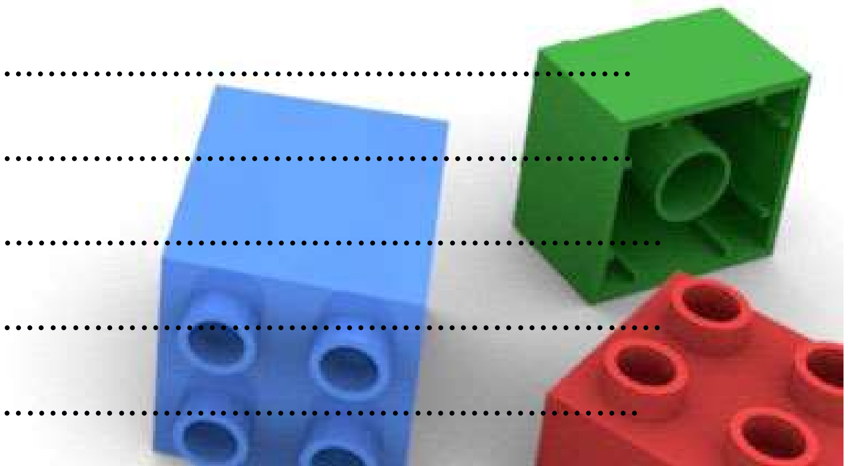
....

....

....

....

....



3.3 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ตัวอย่างที่ 10 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=x^3+1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นและลดลงช่วงใด

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

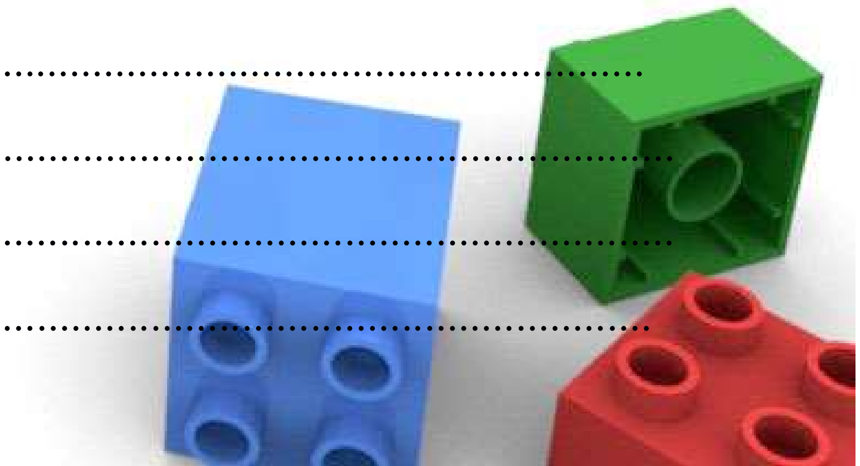
....

....

....

....

....



3.3 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ตัวอย่างที่ 11 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=2x^3+3x^2-36x+5$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นและลดลงช่วงใด

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

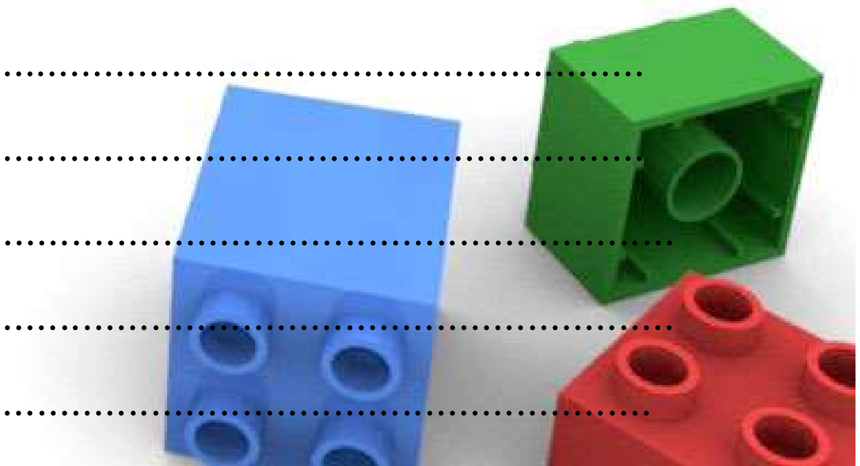
....

....

....

....

....

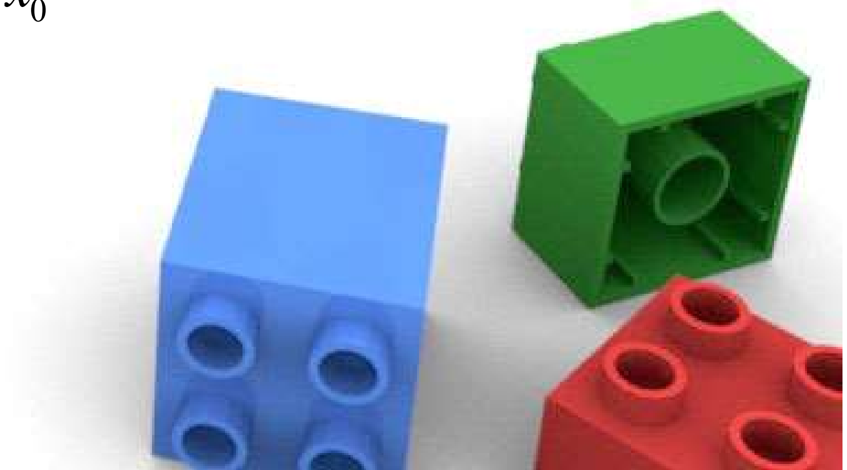


3.4 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

บทนิยาม : จุดวิกฤต คือ จุด $x_0 \in [a,b]$ ซึ่ง $f'(x_0)=0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้

ทฤษฎีบท : ให้ x_0 เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f บนช่วง (a,b) ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบนช่วง $a \le x \le b$ และมีอนุพันธ์ที่ทุกจุดบนช่วง $a < x < b$ (อาจจะไม่มีอนุพันธ์ที่จุด x_0 เองก็ได้) แล้ว

1. ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับทุกค่า x ใน (a,x_0) และ $f'(x)<0$ สำหรับทุกค่า x ใน (x_0,b) แล้ว f **จะมีค่าสูงสุดเฉพาะที่ที่** x_0
2. ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับทุกค่า x ใน (a,x_0) และ $f'(x)>0$ สำหรับทุกค่า x ใน (x_0,b) แล้ว f **จะมีค่าต่ำสุดเฉพาะที่ที่** x_0



3.4 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 12 จงหาจุดที่ฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 2x + 4$ มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

วิธีทำ หาอนุพันธ์ของ $f(x)$

จะได้ว่า $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

หาจุดวิกฤต ให้ $f'(x) = 0$

$$2(x-1) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\therefore \quad x = 1$$

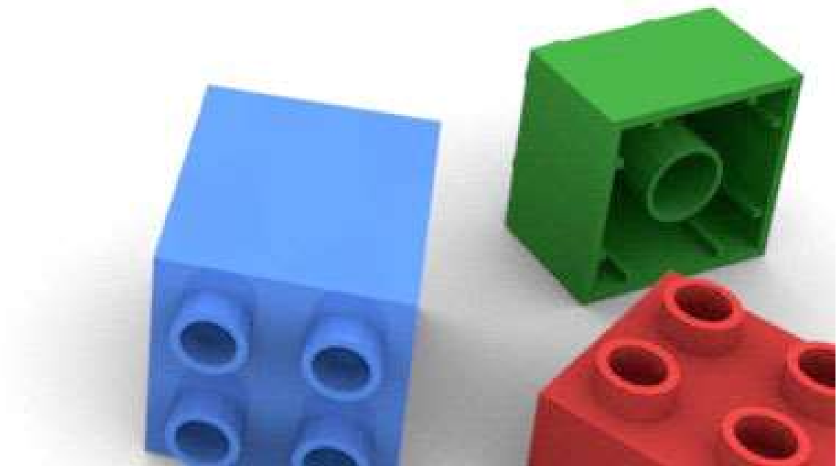
--- +++

$f'(x) < 0$ 1 $f'(x) > 0$

จะเห็นได้ว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(1, \infty)$

และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-\infty, 1)$

ดังนั้น $x = 1$ ทำให้ f มีค่าต่ำสุดเฉพาะที่



3.4 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 13 จงหาจุดที่ฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 22$ มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

วิธีทำ...

....

....

....

....

....

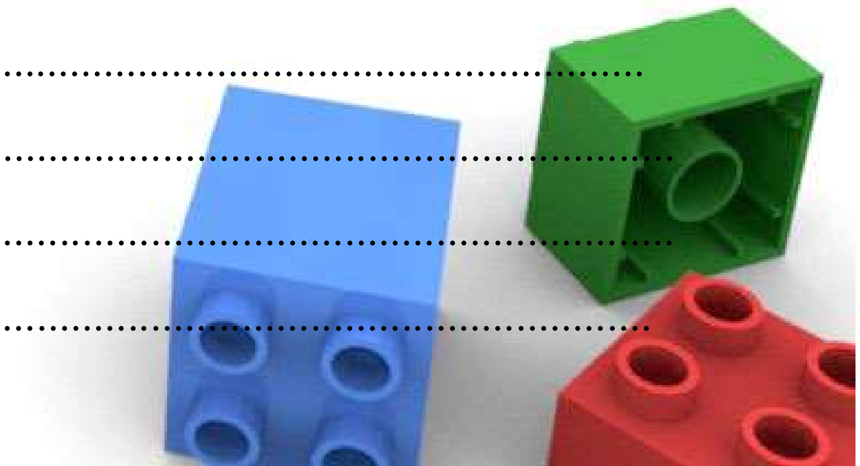
....

....

....

....

....



3.4 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 14 จงหาจุดที่ฟังก์ชัน $f(x)=x^3-3x^2-24x+4$ มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

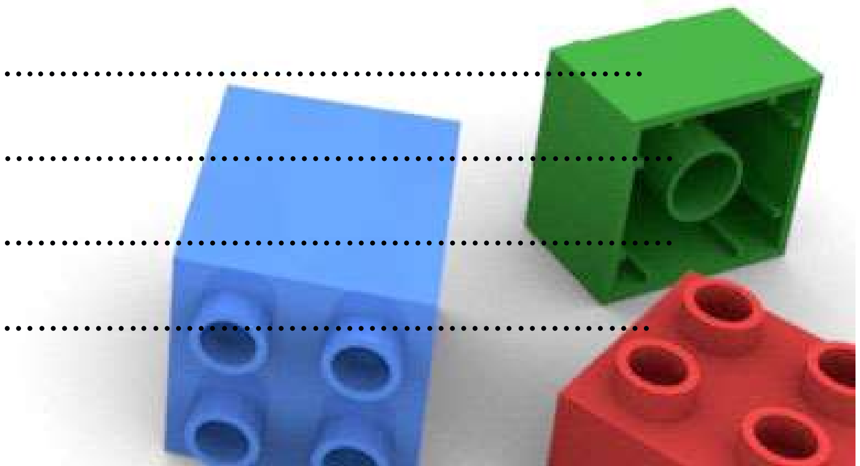
....

....

....

....

....



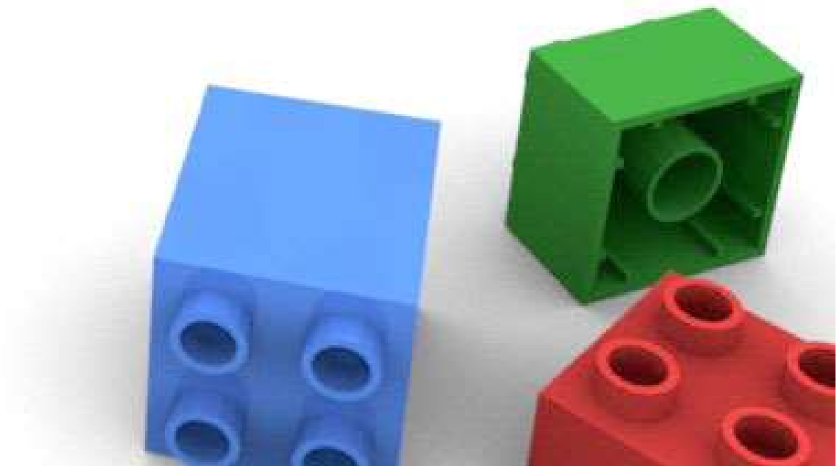
3.4 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

สรุป : เมื่อต้องการหาจุดที่ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดหรือสูงสุดจะต้องดำเนินการดังนี้

1. หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันนั้น

2. หาจุดที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งเป็นศูนย์หรือหาค่าไม่ได้

3. ตรวจสอบดูว่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งทางซ้ายและขวาของจุดนั้น มีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายหรือไม่ ถ้ามีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายจุดนั้นจะเป็นจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด



3.5 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

1. ความเว้า

บทนิยาม : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดบนช่วง (a,b) แล้ว

1. f จะมีกราฟ "**เว้าขึ้น**" บนช่วง (a,b) ถ้า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วงนั้น ($f''(x)>0$ บน (a,b))
2. f จะมีกราฟ "**เว้าลง**" บนช่วง (a,b) ถ้า f' เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วงนั้น ($f''(x)<0$ บน (a,b))

ทฤษฎีบท : ให้ f มีอนุพันธ์อันดับที่สองที่ทุกจุดบน (a,b)

1. ถ้า $f''(x)>0$ สำหรับทุกค่า x บนช่วง (a,b) แล้วเส้นกราฟของ f จะ**เว้าขึ้น** บนช่วง (a,b)
2. ถ้า $f''(x)<0$ สำหรับทุกค่า x บนช่วง (a,b) แล้วเส้นกราฟของ f จะ**เว้าลง** บนช่วง (a,b)

3.5 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

ตัวอย่างที่ 15 กำหนดให้ $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$ จงพิจารณาว่ากราฟ $f(x)$ มีลักษณะเว้าขึ้นและเว้าลงบนช่วงใด

วิธีทำ จาก $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$

จะได้ว่า $f'(x)=6x^2-6x-12$

และ $f''(x)=12x-6=6(2x-1)$

พิจารณา $f''(x)=0$

$$6(2x-1)=0$$

$$2x-1=0$$

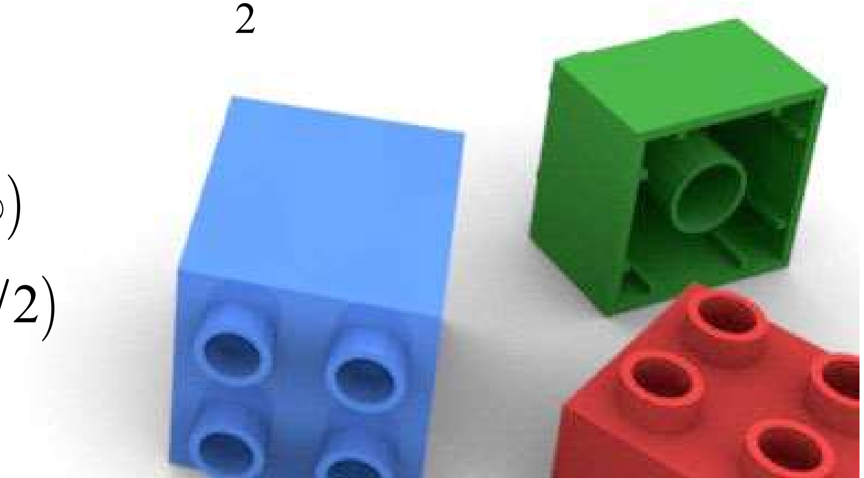
$$\therefore \quad x=\frac{1}{2}$$

--- +++

$f''(x)<0$ $\quad \frac{1}{2} \quad$ $f''(x)>0$

ดังนั้น $f(x)$ มีลักษณะเว้าขึ้นบนช่วง $(1/2,\infty)$

และ $f(x)$ มีลักษณะเว้าลงบนช่วง $(-\infty,1/2)$



3.5 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดให้ $f(x)=x^3-6x^2+20$ จงพิจารณาว่ากราฟ $f(x)$ มีลักษณะเว้าขึ้นและเว้าลงบนช่วงใด

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

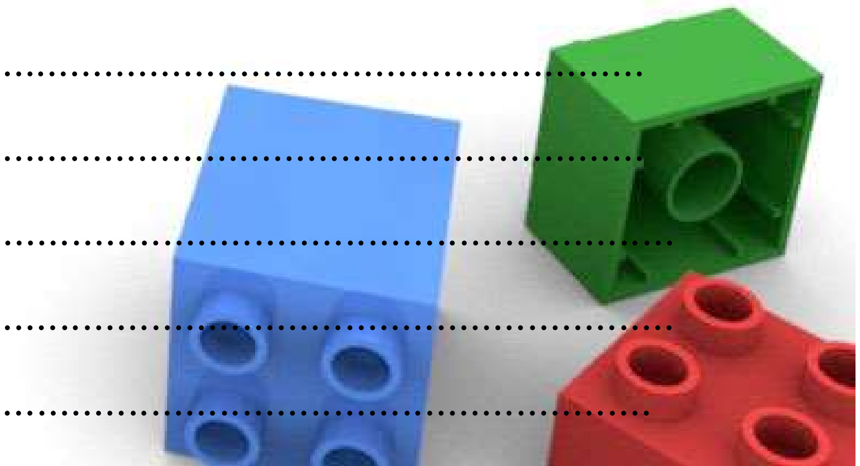
....

....

....

....

....



3.5 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 1$ จงพิจารณาว่ากราฟ $f(x)$ มีลักษณะเว้าขึ้นและเว้าลงบนช่วงใด

วิธีทำ...

....

....

....

....

....

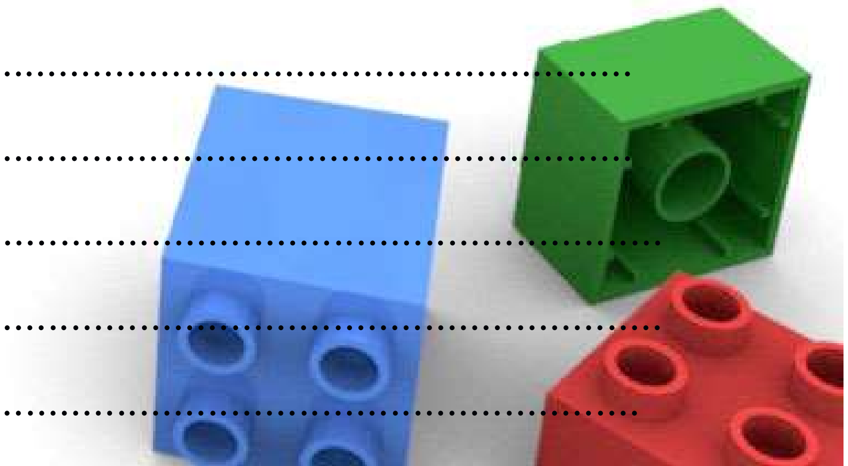
....

....

....

....

....



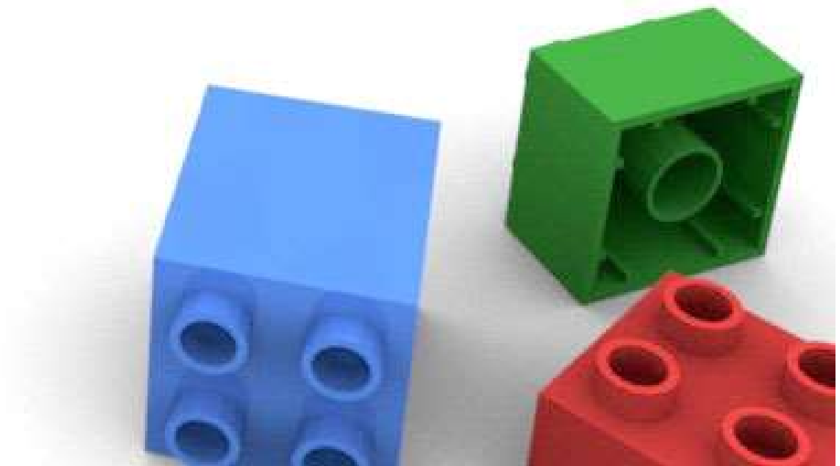
3.5 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

2. จุดเปลี่ยนเว้า

บทนิยาม : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กราฟมีเส้นสัมผัสที่จุด $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ เราเรียกจุดนี้ว่า “**จุดเปลี่ยนเว้า**” ของกราฟ f ก็ต่อเมื่อ กราฟ f เปลี่ยนความเว้าจากเว้าขึ้นเป็นเว้าลง (เว้าลงเป็นเว้าขึ้น) ที่จุด $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$

เนื่องจากจุดเปลี่ยนเว้าจะเกิดขึ้น ณ จุดที่ความเว้าของกราฟเปลี่ยนไปหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าจุดเปลี่ยนเว้าจะเกิดขึ้น ณ จุดที่เครื่องหมาย f'' เปลี่ยนเครื่องหมาย

ทฤษฎีบท : ถ้า $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของกราฟแล้ว $f''\left(x_0\right) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้



3.5 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

ตัวอย่างที่ 18 จงหาจุดเปลี่ยนเว้า และพิจารณาว่า $f(x)$ มีลักษณะเว้าขึ้นและเว้าลงบนช่วงใด เมื่อกำหนด $f(x) = x^4 - 2x^3$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^4 - 2x^3$

จะได้ว่า $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

และ $f''(x) = 12x^2 - 12x$

หาจุดเปลี่ยนเว้า ให้ $f''(x) = 0$

$$12x^2 - 12x = 0$$

$$12x(x-1) = 0$$

$$12x = 0 \quad , \quad x - 1 = 0$$

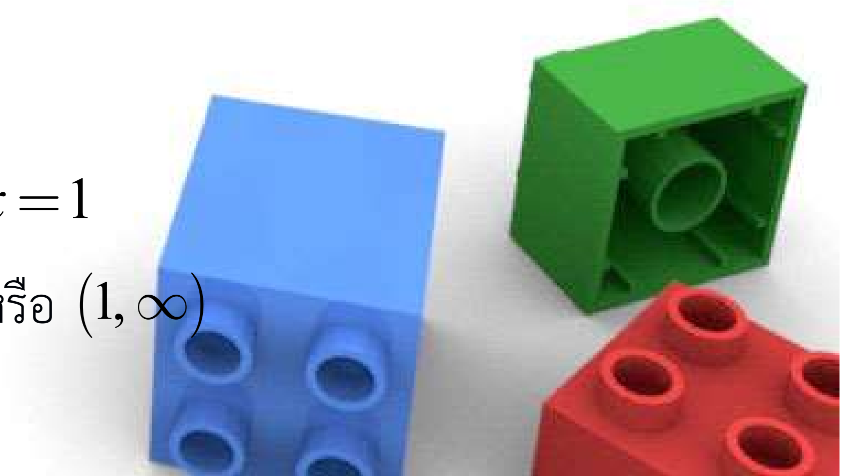
$$\therefore \quad x = 0, 1$$

+++		---		+++
$f''(x) > 0$	0	$f''(x) < 0$	1	$f''(x) > 0$

ดังนั้น จุดเปลี่ยนเว้าจะเกิดขึ้นที่จุด $x = 0$ และ $x = 1$

$f(x)$ มีลักษณะเว้าขึ้นบนช่วง $(-\infty, 0)$ หรือ $(1, \infty)$

และ $f(x)$ มีลักษณะเว้าลงบนช่วง $(0, 1)$



3.5 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

ตัวอย่างที่ 19 จงหาจุดเปลี่ยนเว้า และพิจารณาว่า $f(x)$ มีลักษณะเว้าขึ้นและเว้าลงบนช่วงใด เมื่อกำหนด $f(x) = x^4 - 4x^3$

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

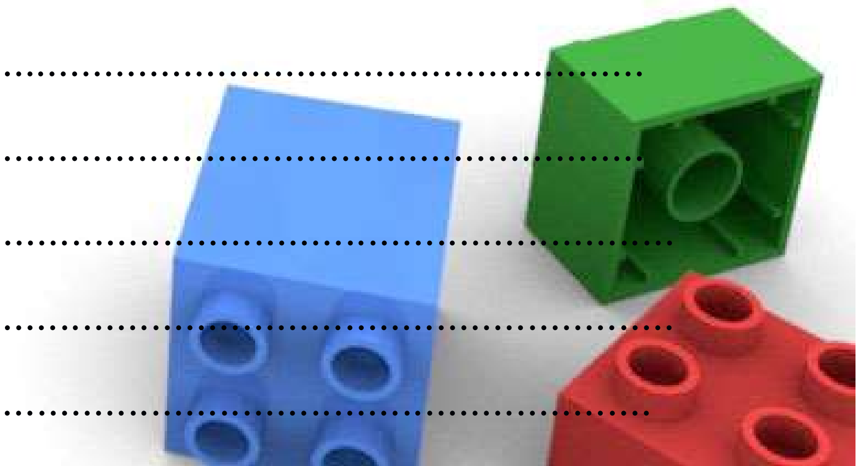
....

....

....

....

....



3.5 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

ตัวอย่างที่ 20 จงหาจุดเปลี่ยนเว้า และพิจารณาว่า $f(x)$ มีลักษณะเว้าขึ้นและเว้าลงบนช่วงใด เมื่อกำหนด $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 3$

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

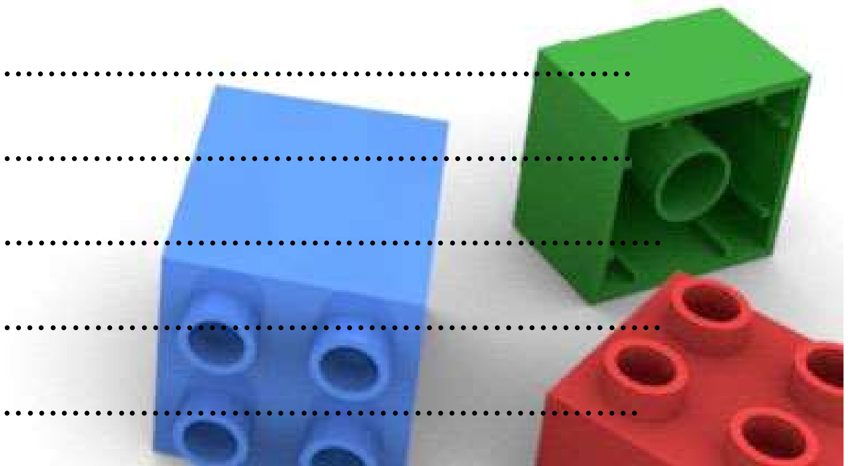
....

....

....

....

....



3.6 จุดสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท : ถ้า f หาอนุพันธ์อันดับที่สองได้ ที่จุดวิกฤต x_0 แล้ว

1. ถ้า $f''(x_0) > 0$ แล้ว $f(x_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และ $(x_0, f(x_0))$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

2. . ถ้า $f''(x_0) < 0$ แล้ว $f(x_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์และ $(x_0, f(x_0))$ เป็นจุดสูงสุดสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

หมายเหตุ : ถ้า $f''(x_0) = 0$ ไม่สามารถสรุปผลได้ ต้องตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

สาเหตุที่ใช้อนุพันธ์อันดับที่สอง เพราะ $f'(x)$ หมายถึงความชัน และอนุพันธ์หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลง ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันก็คือ $f''(x)$ หากมีค่าเป็นบวก แสดงว่าความชันของกราฟมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ กราฟมีลักษณะโค้งขึ้น จุดวิกฤตจึงเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และในทางตรงกันข้าม ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันมีค่าติดลบ แสดงว่าความชันของกราฟมีค่าลดลง กราฟมีลักษณะโค้งลง จุดวิกฤตจึงเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์นั่นเอง

3.6 จุดสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 21 กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=2x^3+3x^2-36x$ จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ จาก $f(x)=2x^3+3x^2-36x$

จะได้ $f'(x)=6x^2+6x-36$

หาจุดวิกฤต ให้ $f'(x)=0$

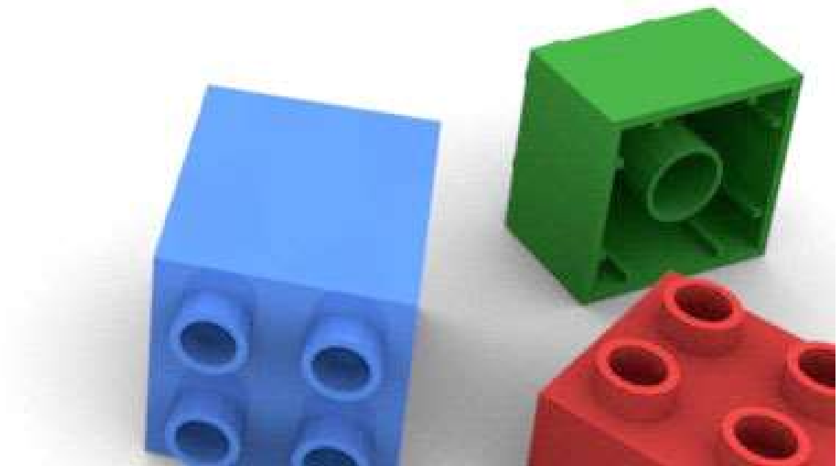
$$6x^2+6x-36=0$$

$$6(x^2+x-6)=0$$

$$6(x-2)(x+3)=0$$

$$x-2=0 \quad , \quad x+3=0$$

$$\therefore \quad x=2,-3$$



3.6 จุดสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

ตรวจสอบค่าวิกฤตโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สอง $f''(x) = 12x + 6$

1. ตรวจสอบที่ $x = 2$

   $f''(2) = 12(2) + 6 = 24 + 6 = 30 > 0$

   แสดงว่า $f(x_0) = f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 36(2) = -44$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

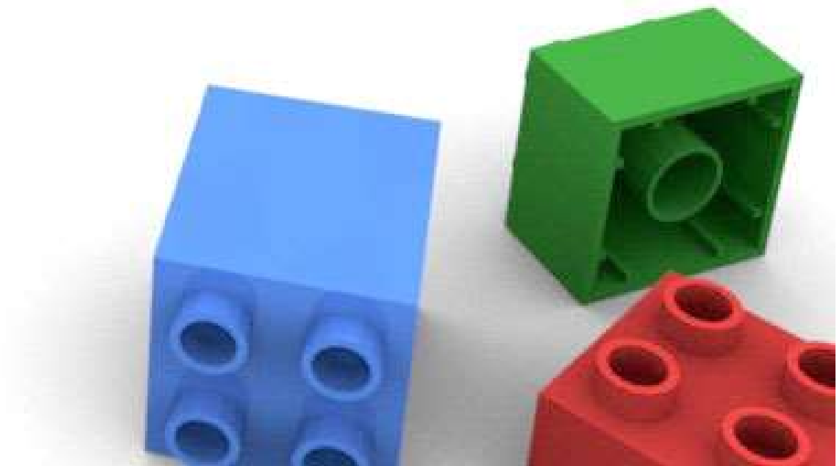
2. ตรวจสอบที่ $x = -3$

   $f''(-3) = 12(-3) + 6 = -36 + 6 = -30 < 0$

   แสดงว่า $f(x_0) = f(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 36(-3) = 81$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ดังนั้น จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ $(-3, 81)$

และ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ $(2, -44)$



3.6 จุดสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 22 กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=2x^3+3x^2-12x-7$ จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....