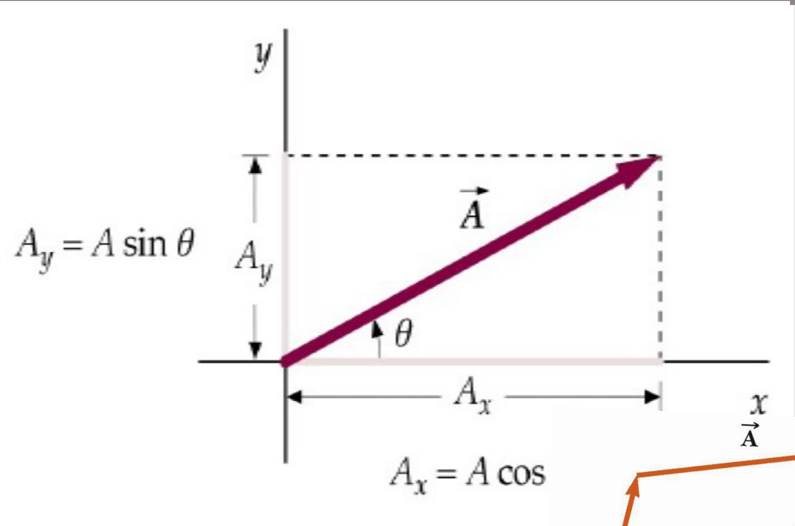
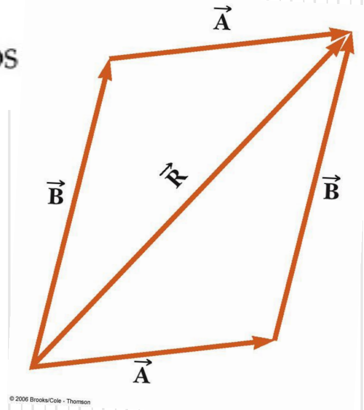
เอกสารประกอบการเรียนวิชาฟิสิกส์ 1

Chapter 2

ปริมาณทางฟิสิกส์



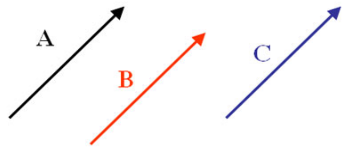


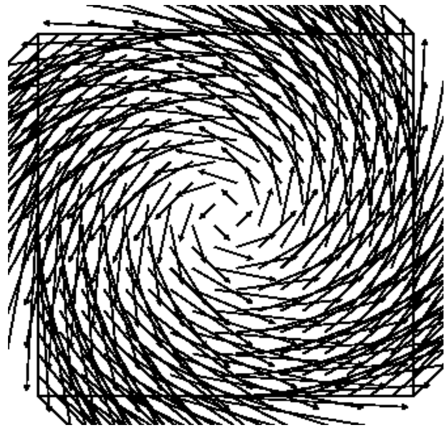
อาจารย์รัตนาภรณ์ สมฤทธิ์

สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

รายละเอียดของบทที่ 2





1. ปริมาณสเกลาร์ละปริมาณเวกเตอร์
2. สัญลักษณ์และองค์ประกอบของเวกเตอร์
3. การกระทำกันของปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์
4. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

1. ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์

ปริมาณทางฟิสิกส์แบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด คือ

ปริมาณสเกลาร์ เป็นปริมาณที่สามารถอธิบายได้โดยการบอกขนาดเพียงอย่างเดียวก็เข้าใจ เช่น ระยะทาง (s) อัตราเร็ว (v) มวล (m) กำลัง (P)

ปริมาณเวกเตอร์ เป็นปริมาณที่ประกอบด้วยขนาดและทิศทาง

เช่น *รถยนต์วิ่งด้วยความเร็ว 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ไปในทิศตะวันออก*

การกระจัด ($\vec{S}$) ความเร็ว ($\vec{V}$) ความเร่ง ($\vec{a}$) แรง ($\vec{F}$) โมเมนตัม ($\vec{P}$)

2.สัญลักษณ์และองค์ประกอบของเวกเตอร์

เมื่อเขียนด้วยมือ ใช้ลูกศร : $\vec{A}$

เมื่อพิมพ์ จะใช้ตัวหนาพร้อมลูกศร : $\vec{\mathbf{A}}$

เมื่อแสดงขนาดของเวกเตอร์ ใช้ตัวเอียง : A หรือ $|A|$

ขนาดของเวกเตอร์มีหน่วย

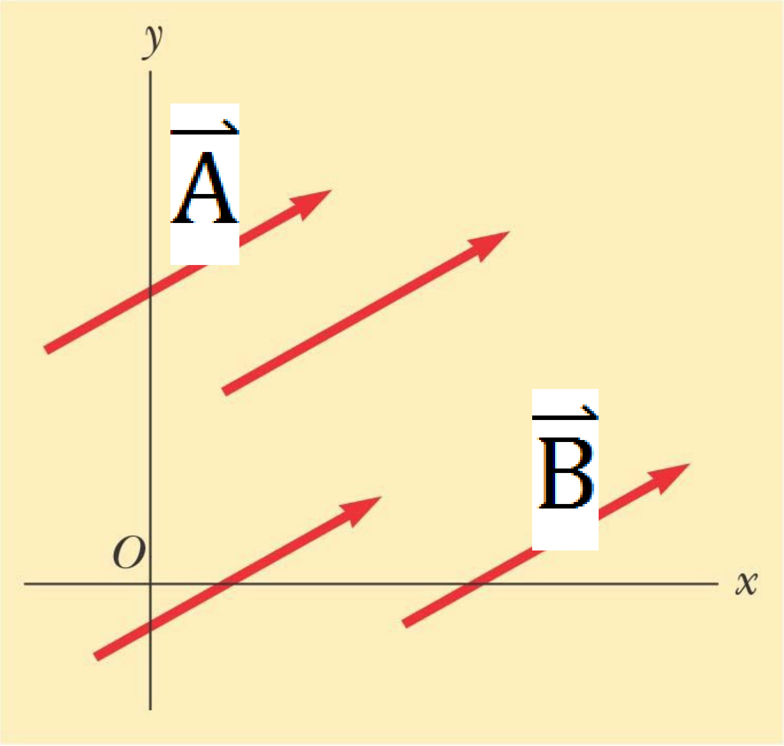
ขนาดของเวกเตอร์เป็นจำนวนบวกเสมอ

เวกเตอร์สองตัวเท่ากัน

ถ้ามีขนาดเท่ากัน และทิศทางเหมือนกัน

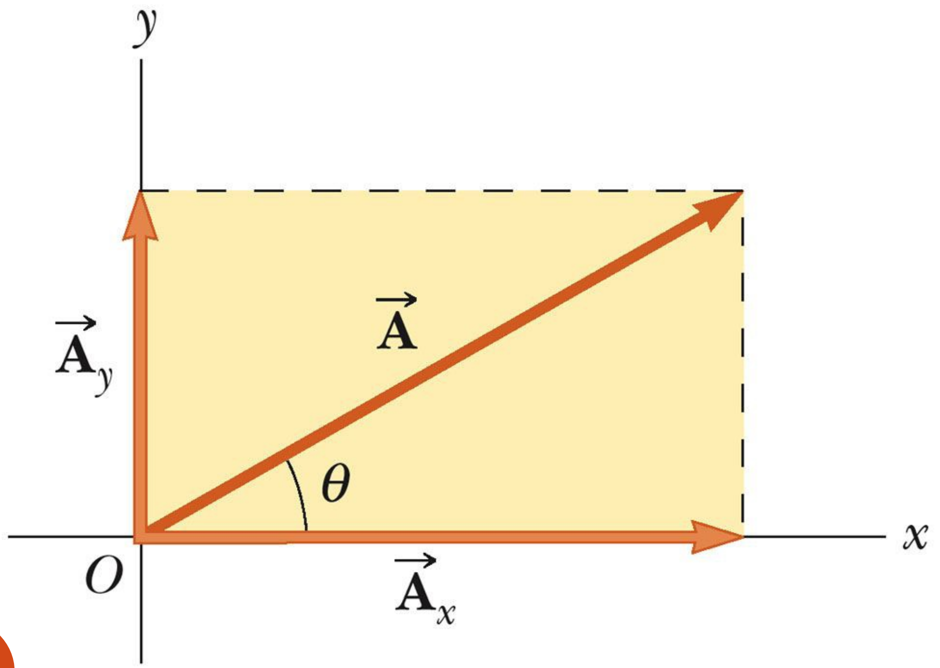
มีแนวเส้นขนานกัน

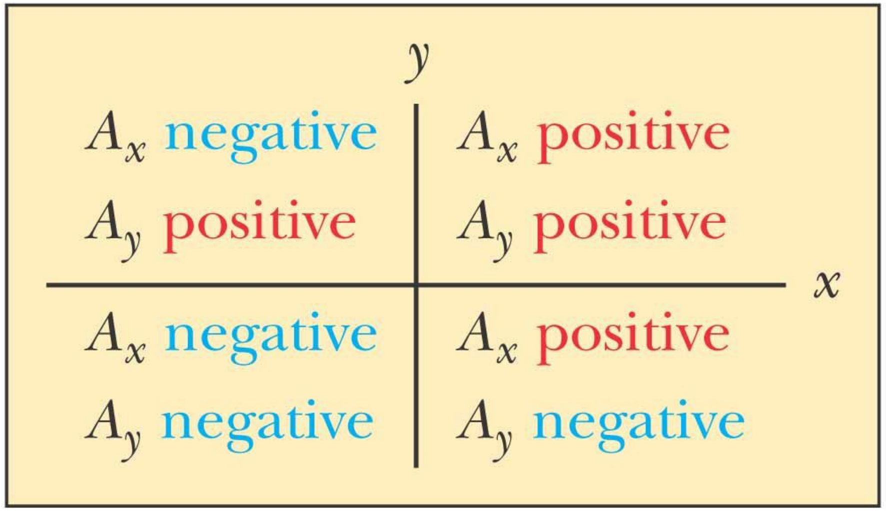
$\vec{A} = \vec{B}$ ถ้า $|A| = |B|$



องค์ประกอบของเวกเตอร์ (Vector Component) คือ ขนาดของเวกเตอร์นั้นที่เทียบกับแกนหลักในระบบพิกัดที่ใช้

- $\overrightarrow{A_x}$ และ $\overrightarrow{A_y}$ คือเวกเตอร์องค์ประกอบของ $\vec{A}$
- A_x และ A_y คือ สเกลาร์และเรียกว่าองค์ประกอบของ $\vec{A}$
- องค์ประกอบสามารถเป็นได้ทั้งบวกหรือลบและจะมีหน่วยเหมือนกับเวกเตอร์เริ่มต้น





3. การกระทำกันของปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์

3.1 ปริมาณสเกลาร์ +, -, x , ÷ กับปริมาณสเกลาร์

- ผลบวกของระยะทาง $(\sum s)$ = $s_1+s_2+s_3$ = 1m+3m+6m = 10m
- ผลต่างของเวลา (Δt) = t_2-t_1 = 15s-10s = 5s
- ผลคูณของกระแสไฟฟ้ากับความต้านทานจะได้ V = I.R = (10mA)(500Ω) = 5V
- ผลหารของประจุไฟฟ้ากับเวลาจะได้ I = Q/t = 12C/6s = 2A

3.2 ปริมาณสเกลาร์ x , ÷ กับปริมาณเวกเตอร์

เช่น $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$ $\vec{P} = m.\vec{v}$ **เวกเตอร์ทั้งสองฝั่งต้องมีทิศเดียวกัน**

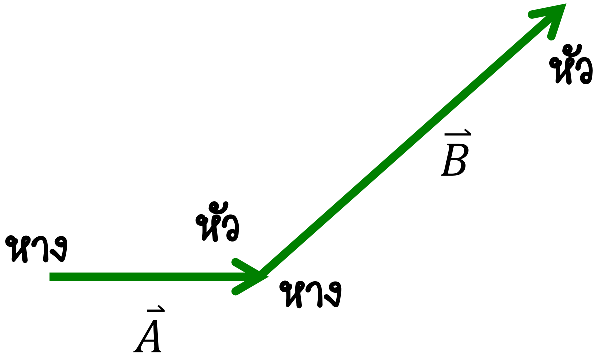
$\vec{F} = -k.\vec{s}$ **เวกเตอร์ทั้งสองฝั่งจะต้องมีทิศตรงข้ามกัน**

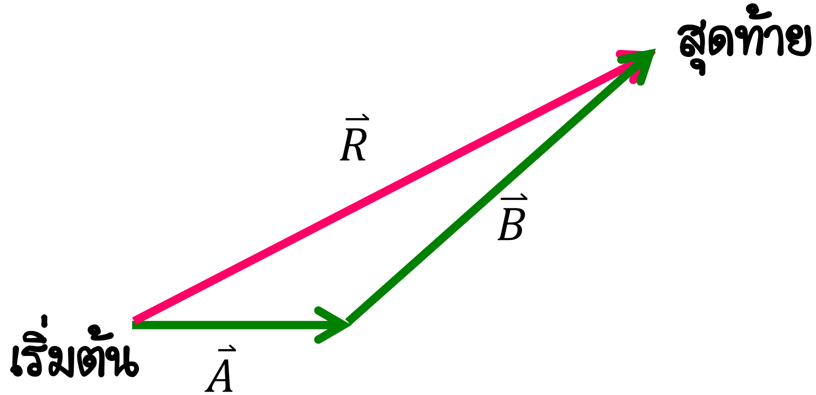
$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}$ **เวกเตอร์ทั้งสองฝั่งยังต้องมีทิศเดียวกัน**

3.3 ปริมาณเวกเตอร์ + , - กับปริมาณเวกเตอร์

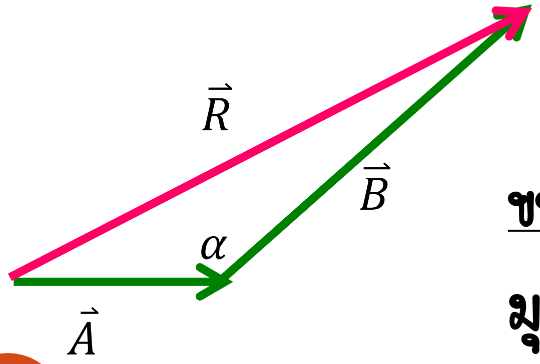
การบวก

การนาหางกับหัวของเวกเตอร์ทั้งสองมาต่อกัน เรียกวิธีนี้ว่าการรวมเวกเตอร์แบบ“**หางต่อหัว**”





นาเวกเตอร์ทั้ง 2 มาต่อกันแบบหางต่อหัว เวกเตอร์ลัพธ์ R ลากจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดสุดท้าย



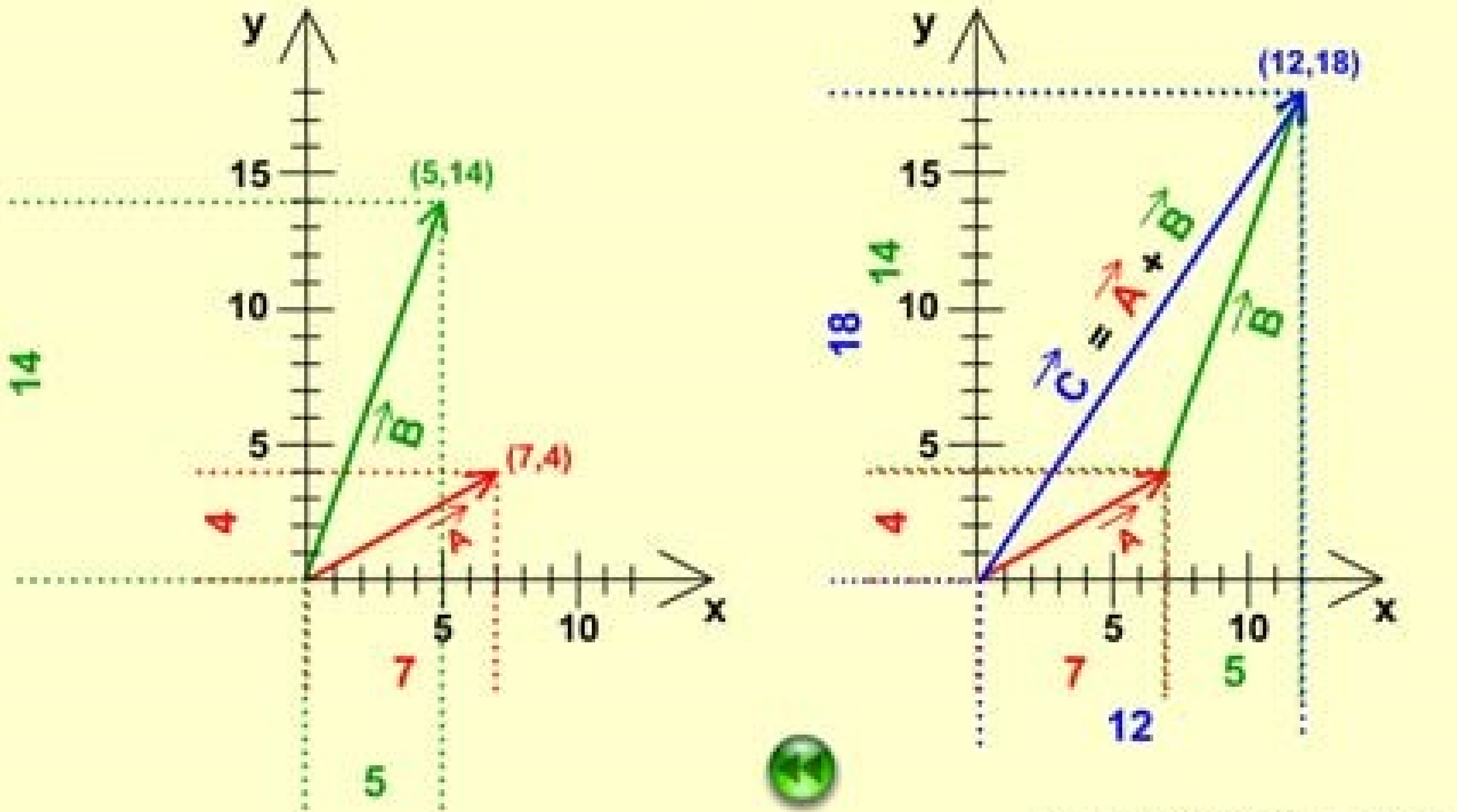
<u>ทิศทาง</u>ของ $\vec{R}$ ดูจากรูป

<u>ขนาด</u>ของ $\vec{R}$ หาจาก $R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcos\alpha}$

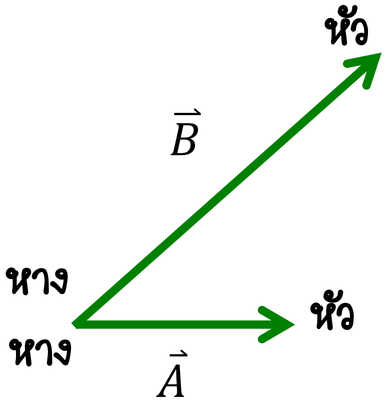
มุม α เป็นมุมที่หางกับหัวต่อกัน

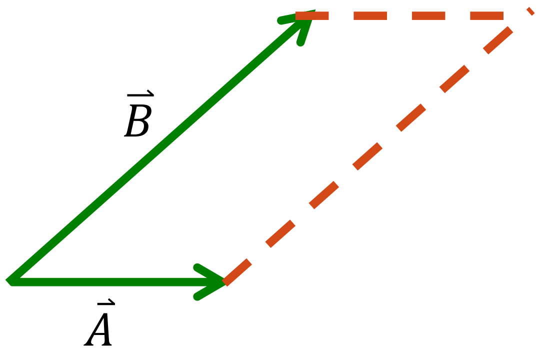
To Add 2 Vectors Numerically ...

... Add the Cartesian Components



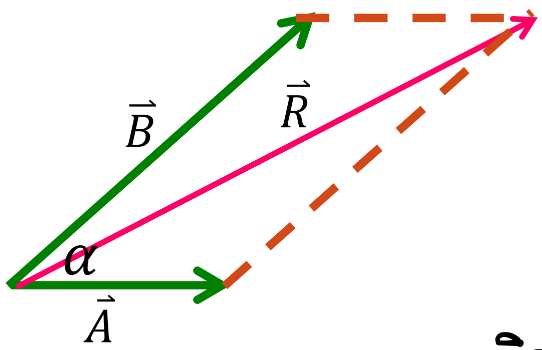
การนาหางของเวกเตอร์ทั้งสองมาต่อกัน เรียกวิธีนี้ว่า การรวมเวกเตอร์แบบ “หางต่อหาง”





นาเวกเตอร์ทั้ง 2 มาต่อกันแบบหางต่อหาง

สร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน (เส้นประ)



เวกเตอร์ลัพธ์ R ลากจากจุดที่หางต่อกันเป็นเส้นทแยงมุมขึ้นไป

มุม α เป็นมุมที่หางกับหางต่อกัน

<u>ทิศทาง</u>ของ $\overrightarrow{R}$ ดูจากรูป

<u>ขนาด</u>ของ $\overrightarrow{R}$ หาจาก $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos\alpha}$

- การบวกเวกเตอร์โดยวิธีคานวณทาได้ทีละ 2 เวกเตอร์
- หาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์โดย

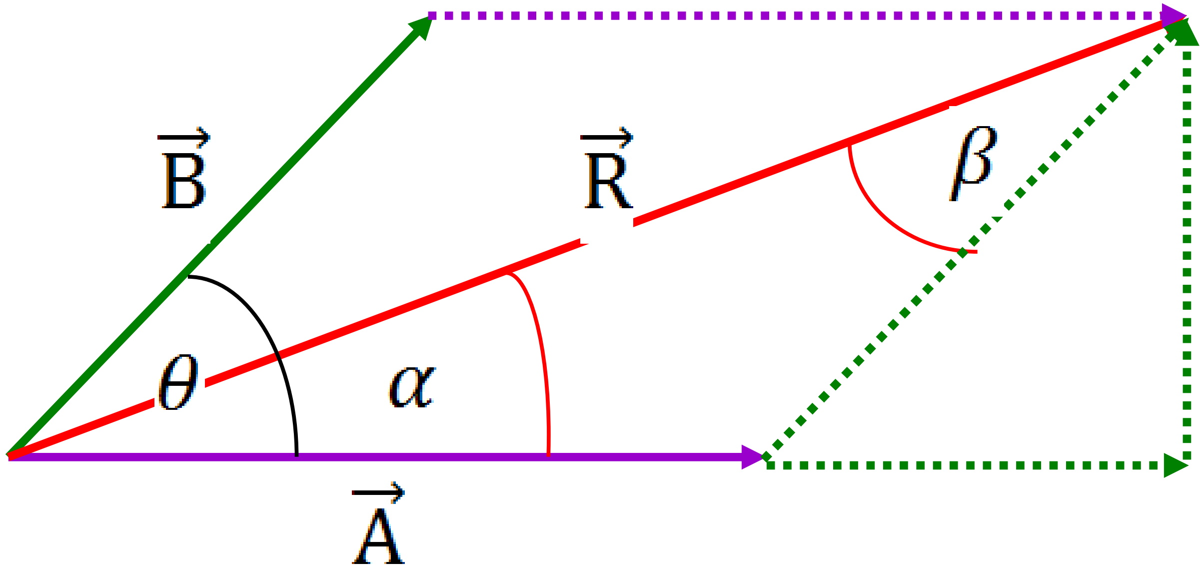
$$|R| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$ *กฎของโคไซน์ (law of cosine)*

- หาทิศทางจาก

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha}$$

กฎของไซน์ (law of sines)

หรือ $\theta = tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$

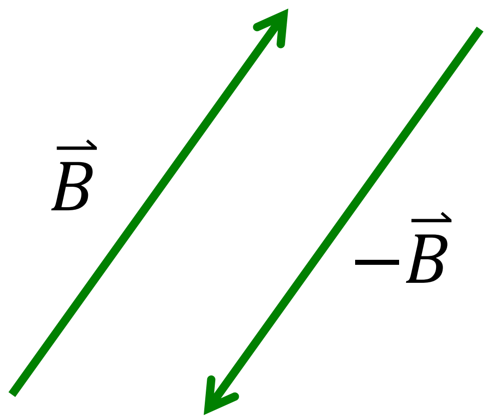


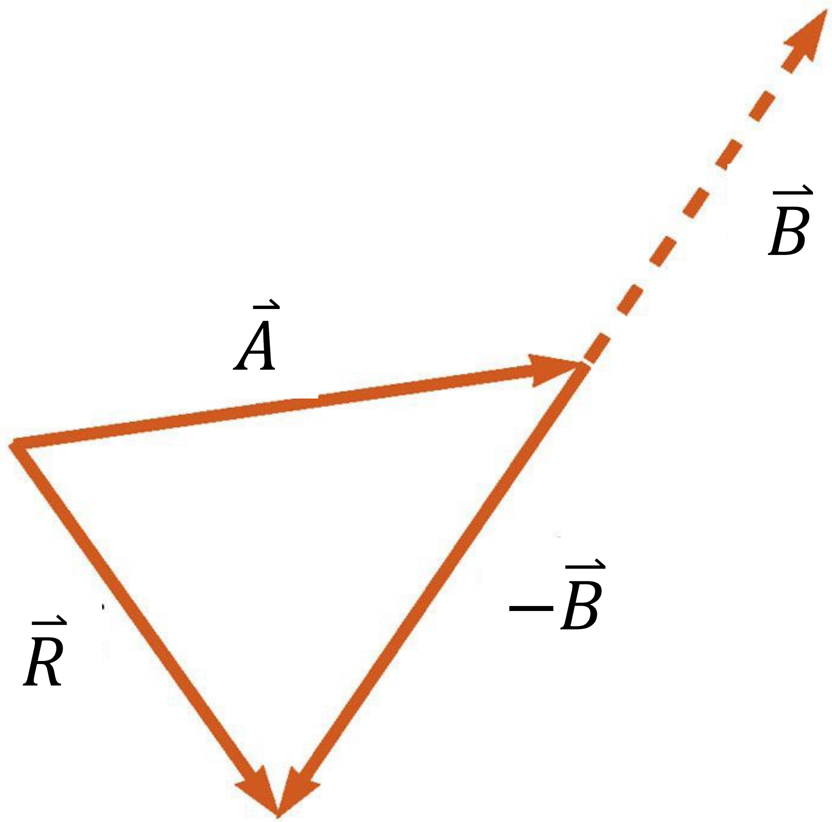
การลบ

- การหา $\vec{A}-\vec{B}$ ก็คือ การนาเวกเตอร์ A มาบวกกับเวกเตอร์ -B

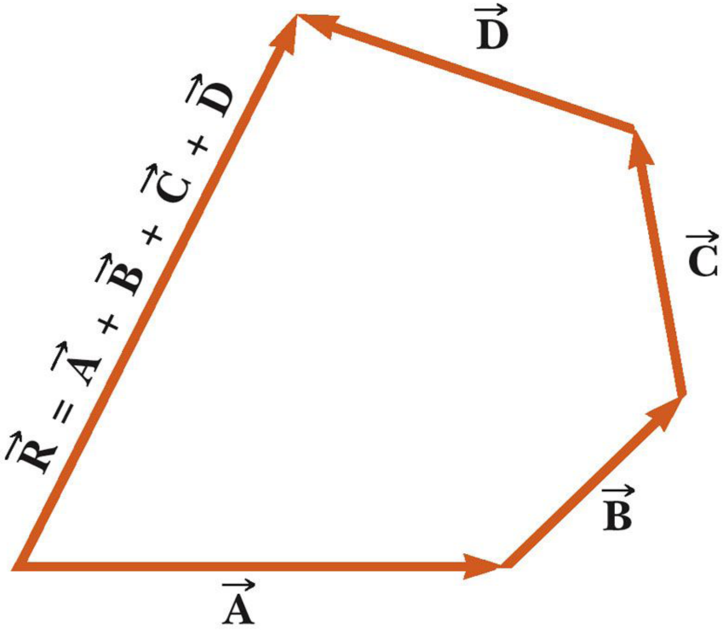
$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

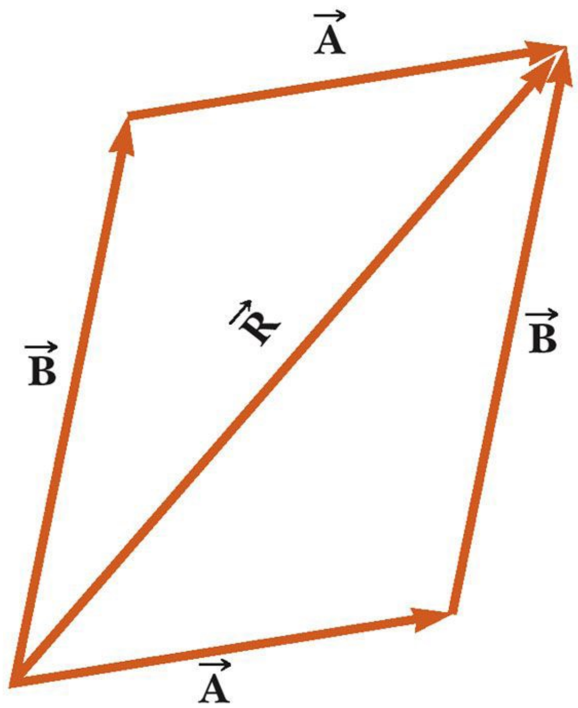
- เวกเตอร์ -B คือเวกเตอร์ B แต่มีทิศทางตรงกันข้าม



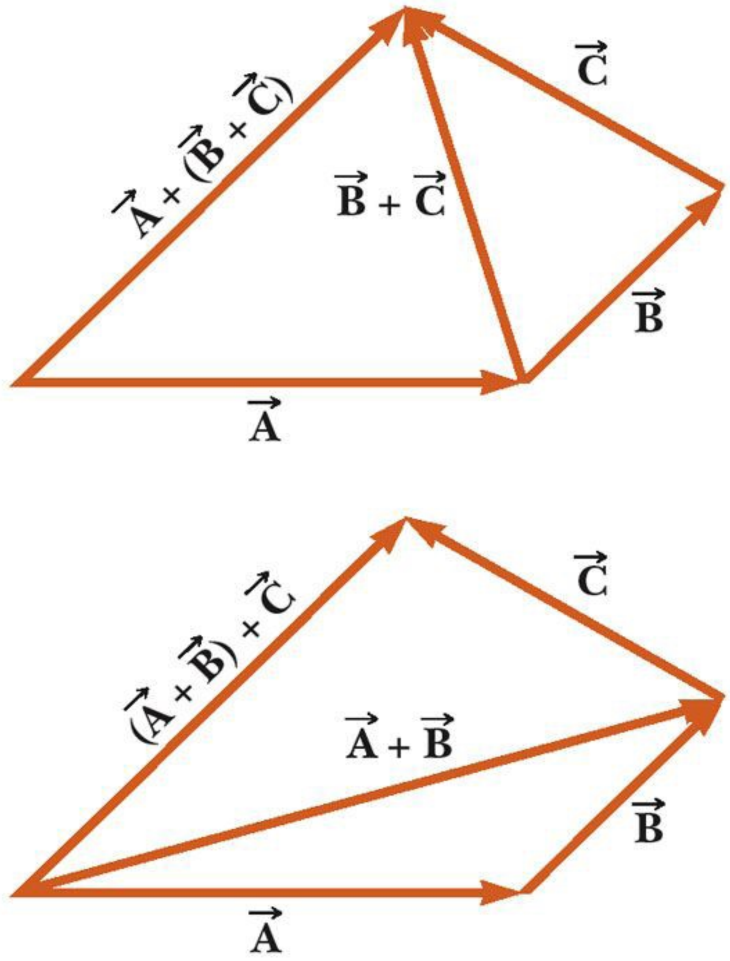


$$\vec{A}+(-\vec{B})=\vec{R}$$



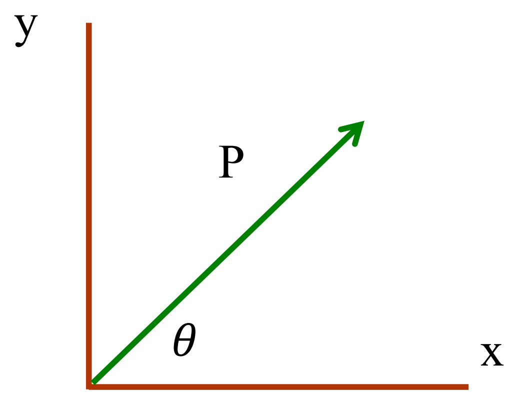


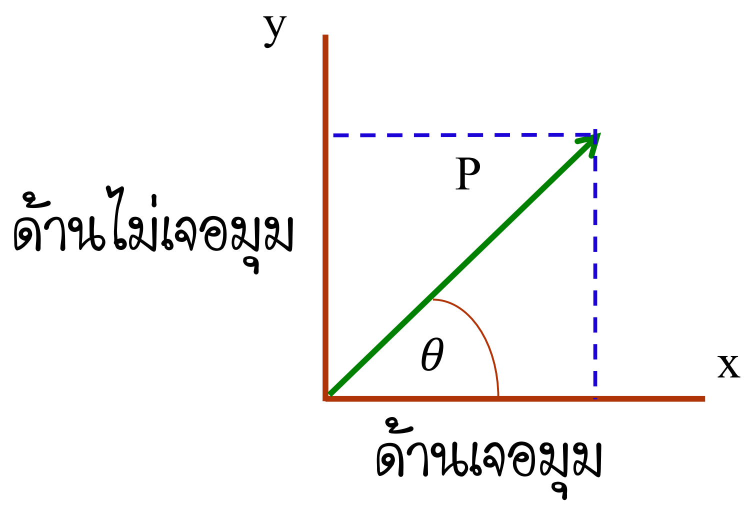
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

การแตกเวกเตอร์

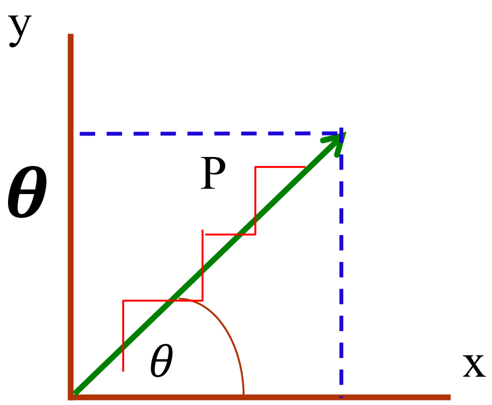




เวกเตอร์ P ทามุม θ ไดๆกับแกน x

แตกเวกเตอร์เข้าสู่แกน x และแกน y

$$P_x = P\sin\theta$$

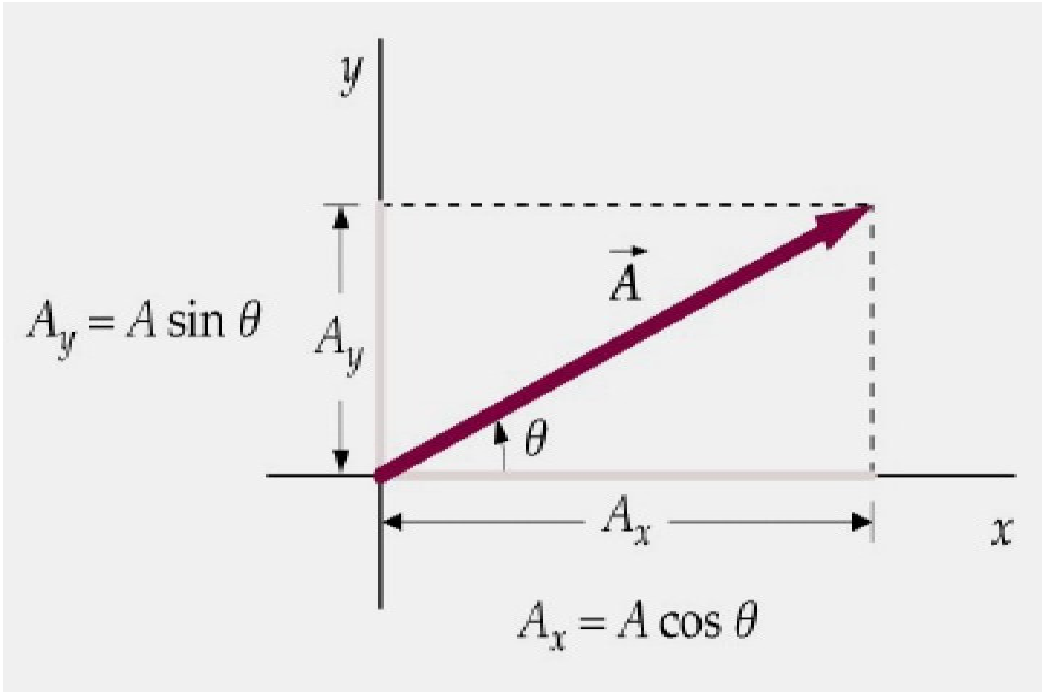


$$P_x = P\cos\theta$$

แตกเวกเตอร์เจอมุมใส่ cos θ

แตกไม่เจอมุมใส่ sin θ

เวกเตอร์ที่ถูกแตกจะหายไป



เวกเตอร์

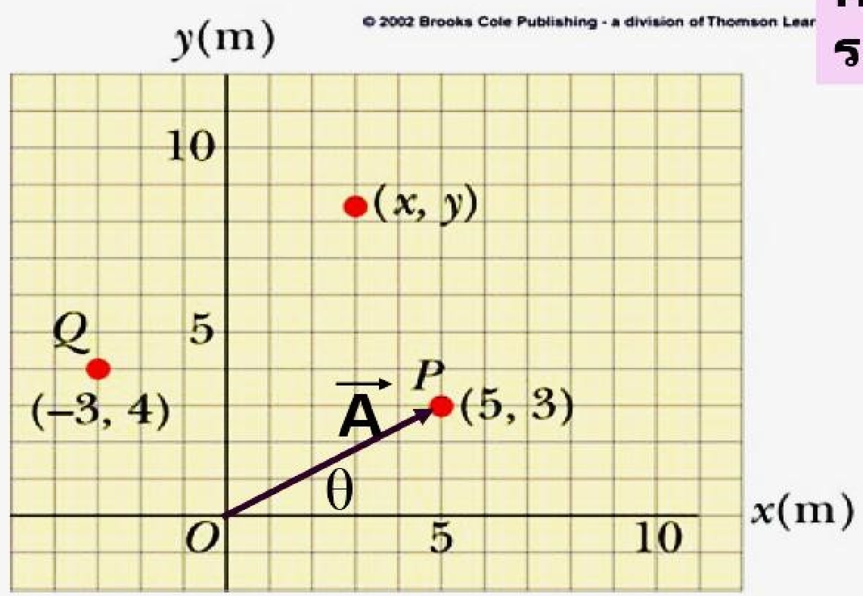
$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

มีขนาด

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}}$$

มีทิศเทียบกับแกน x (จากรูป)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$



การแสดงปริมาณเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

$$\vec{A} = 5\hat{i} + 3\hat{j} = (5, 3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

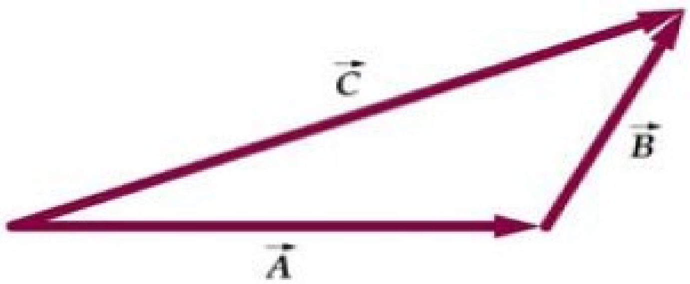
$$|\vec{A}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5.83$$ ขนาด

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 31^\circ$$ ทิศ

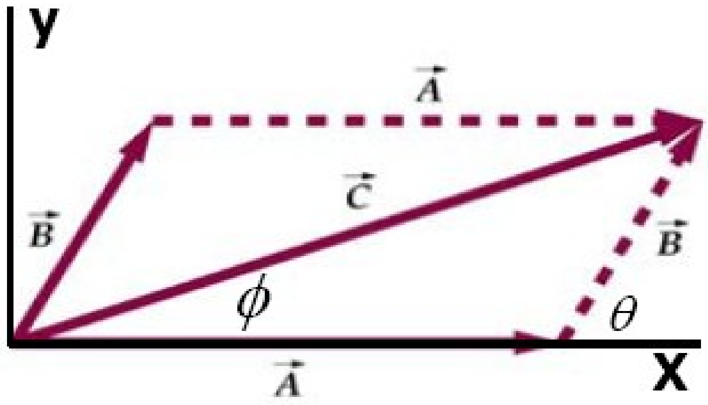
สรุปการรวมเวกเตอร์

- การรวมเวกเตอร์สามารถทาได้หลายวิธี ในที่นี้จะกล่าวถึง 3 วิธี คือ

1. วิธีวาดรูป - หางต่อหัว
2. วิธีวาดรูป - สี่เหลี่ยมด้านขนาน - หางต่อหาง
3. วิธีการรวมส่วนประกอบเวกเตอร์ -แตกเวกเตอร์



$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{C}$

กำหนดให้

$|\vec{A}| = 150\ m$

$|\vec{B}| = 100\ m$

$\theta = 60^\circ$

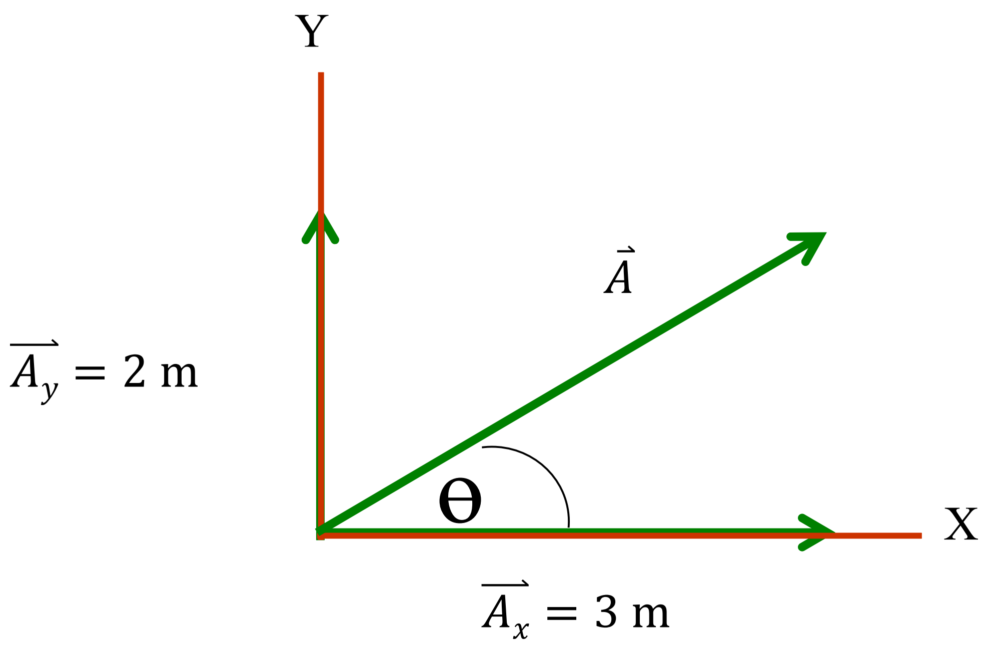
เวกเตอร์	x-comp	y-comp
$\vec{A}$	150	0
$\vec{B}$	$100 \cos 60^\circ = 50$	$100 \sin 60^\circ = 86.6$
$\vec{C}$	200	86.6

$|\vec{C}| = \sqrt{200^2 + 86.6^2} = 218$

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{86.6}{200}\right) = 23.4^\circ$

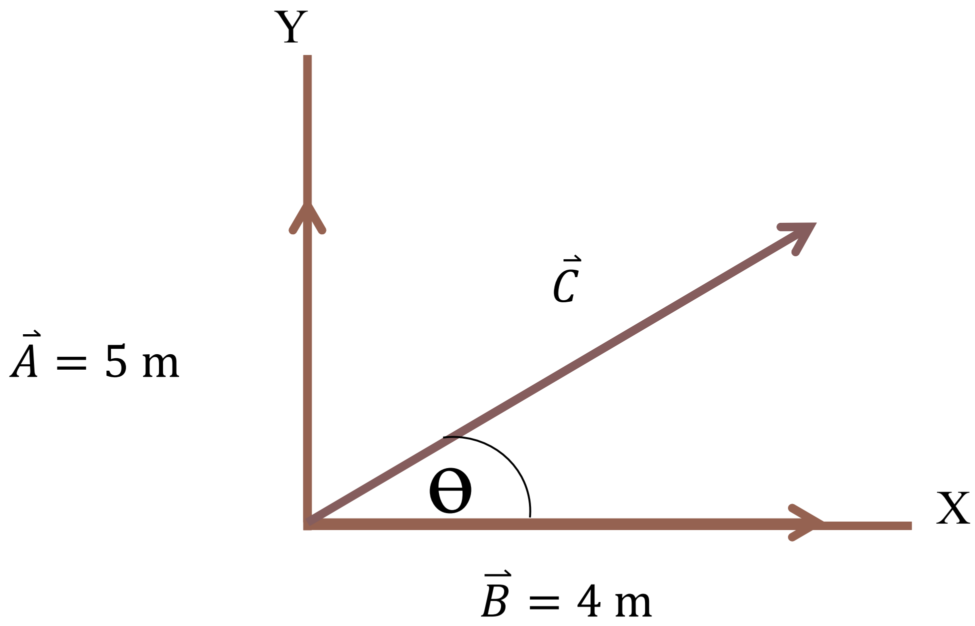
ตัวอย่าง (การแตกเวกเตอร์)

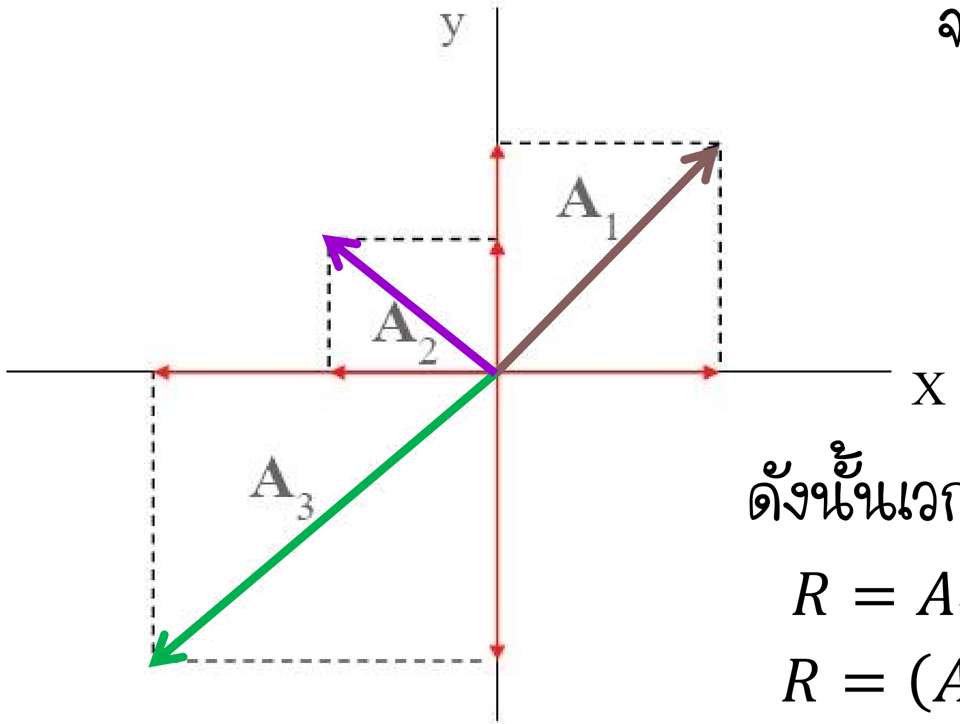
จากรูป จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์



ตัวอย่าง (การแตกเวกเตอร์)

จากรูป จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์



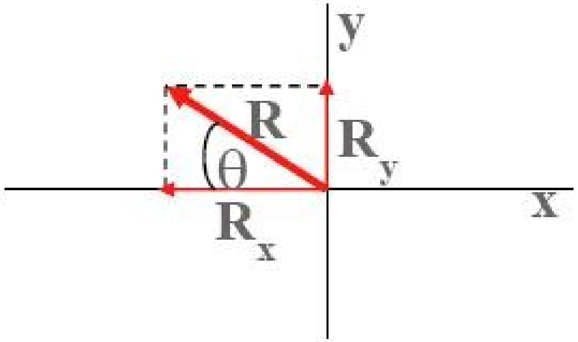


จากรูปจะเห็นว่า

$$A_1 = A_{1x}i + A_{1y}j$$
$$A_2 = -A_{2x}i + A_{2y}j$$
$$A_3 = -A_{3x}i - A_{3y}j$$

ดังนั้นเวกเตอร์ลัพธ์ของสามเวกเตอร์คือ

$$R = A_1 + A_2 + A_3$$
$$R = (A_{1x} - A_{2x} - A_{3x})i + \left(A_{1y} + A_{2y} - A_{3y}\right)j$$
$$R = R_x i + R_y j$$



ขนาดและทิศทางของ *R* คือ

$$R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2}$$
$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

ถ้ามีเวกเตอร์จำนวนมาก การรวมเวกเตอร์ในแต่ละองค์ประกอบจะเป็นดังนี้

$$R_x = \sum_{i=1}^{N} R_{ix}$$

ผลบวกแบบพีชคณิตของเวกเตอร์องค์ประกอบตามแกน x

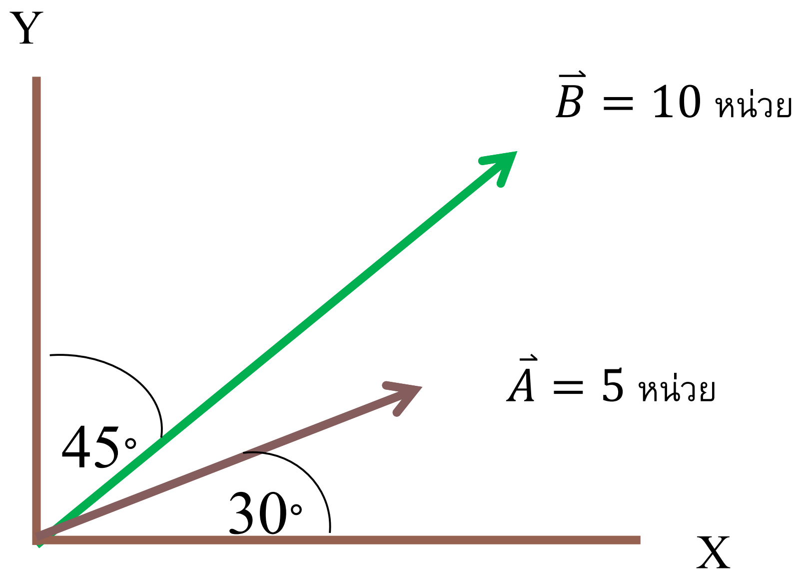
$$R_y = \sum_{i}^{N} R_{iy}$$

ผลบวกแบบพีชคณิตของเวกเตอร์องค์ประกอบตามแกน y

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$$

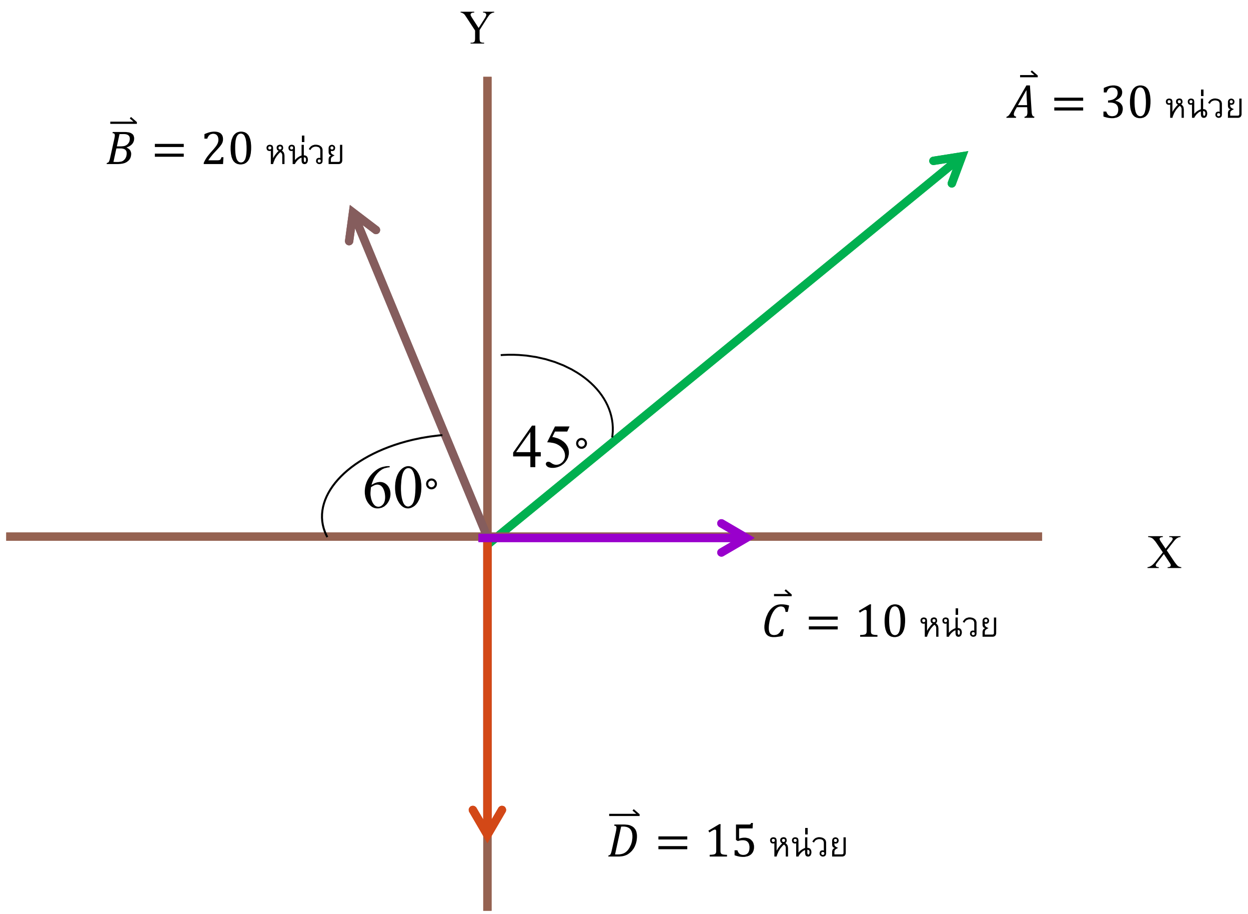
ตัวอย่าง (การแตกเวกเตอร์)

จากรูป จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์

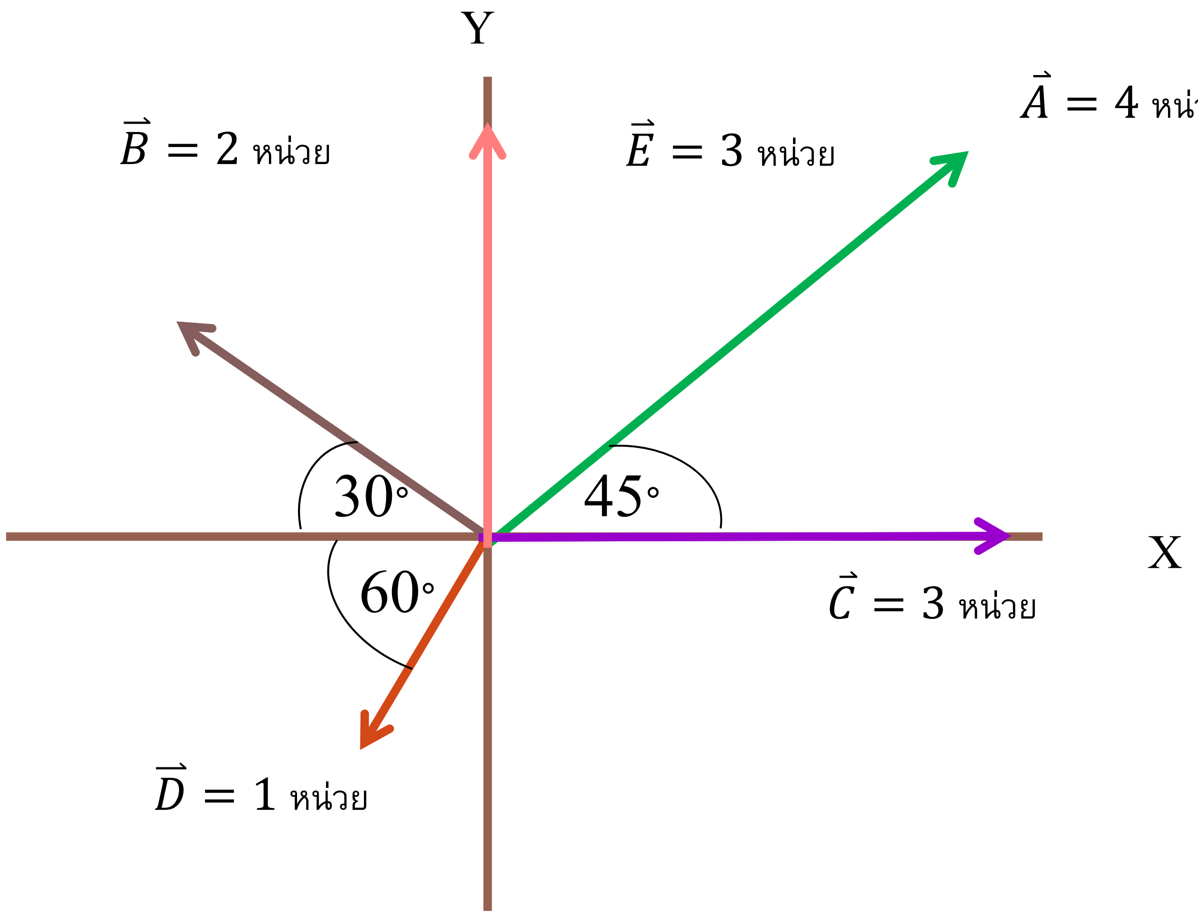


<u>ตัวอย่าง</u> เวกเตอร์ 4 เวกเตอร์ มีขนาดและทามุมต่างๆ ดังรูป

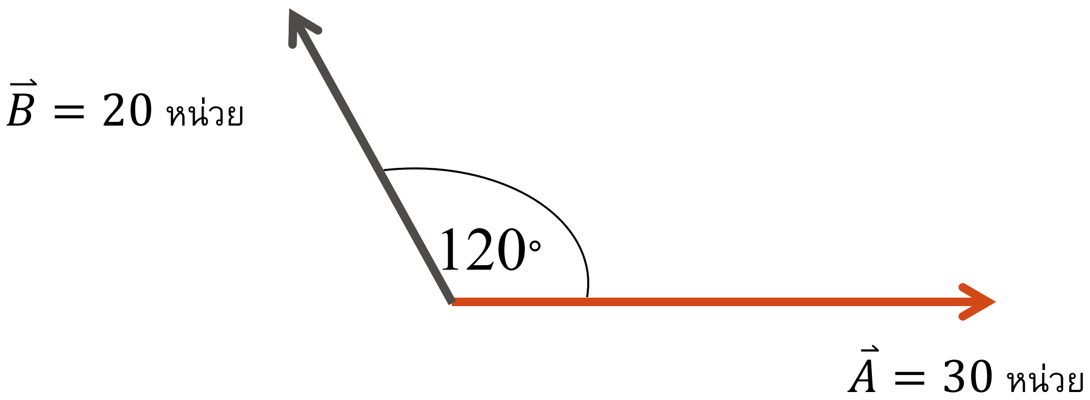
จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์



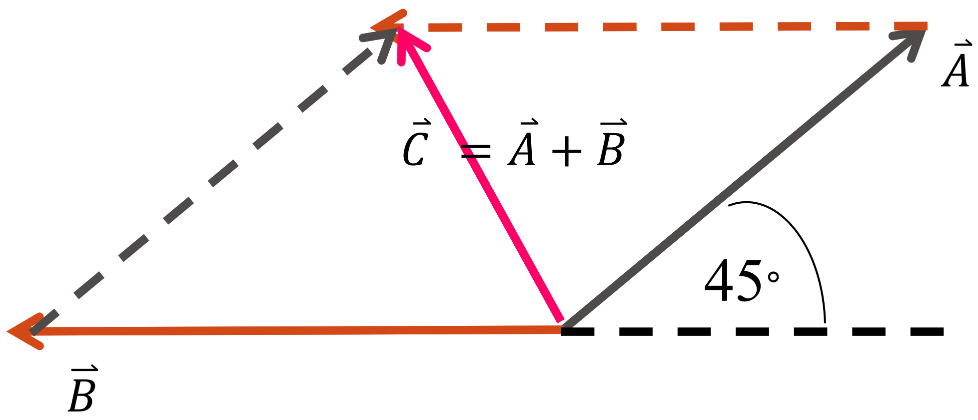
ตัวอย่าง เวกเตอร์ 5 เวกเตอร์ มีขนาดและทามุมต่างๆ ดังรูป จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์



จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ โดยมีเวกเตอร์องค์ประกอบ 2 เวกเตอร์ ที่มีขนาด 30 หน่วย และ 20 หน่วย กระทำร่วมกันที่จุดหนึ่ง และทำมุม 120 องศาต่อกัน



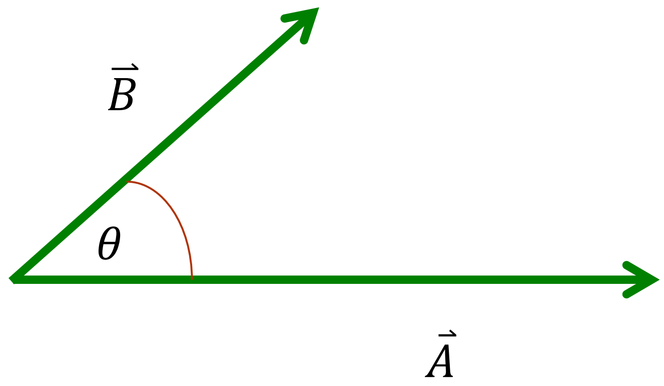
เวกเตอร์ A ขนาด 5 หน่วย ทำมุม 45 องศา กับแกน +X และเวกเตอร์ B ขนาด 6 หน่วย มีทิศไปตามแกน -X จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ที่ทำกับแกน +X

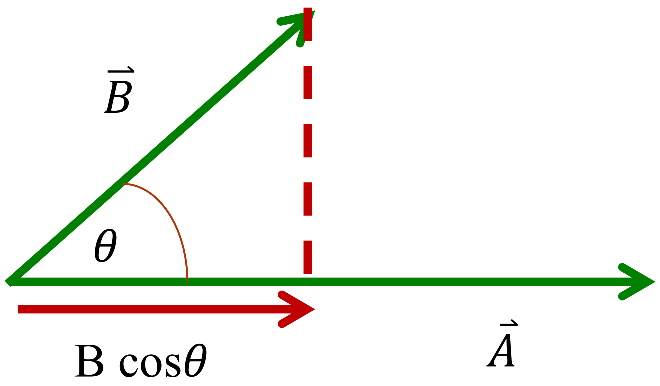


3.4 ปริมาณเวกเตอร์ x กับปริมาณเวกเตอร์

3.4.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ (ผลคูณแบบดอท) *ได้ปริมาณสเกลาร์*

$$C = \vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos\theta$$ โดยที่ $0 \leq \theta \leq 180$





เวกเตอร์ A และ B ยังไม่อยู่ในแนวเดียวกัน

แตกเวกเตอร์ให้อยู่ในแนวเดียวกัน

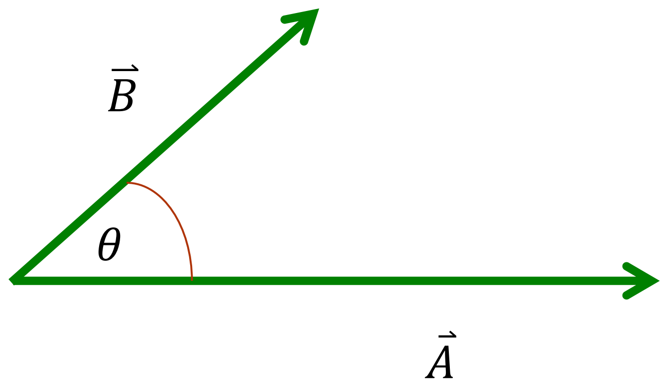
ผลลัพธ์จึงเกิดจากการคูณกันของขนาดเวกเตอร์ในแนวเดียวกัน

$$C = \vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos\theta$$

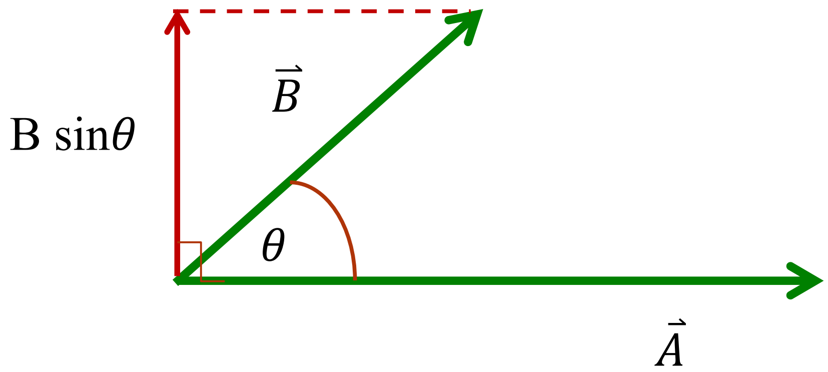
การดอทเวกเตอร์คือ การคูณกันของเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเดียวกัน

3.4.2 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (ผลคูณแบบครอส) ได้ปริมาณเวกเตอร์

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = |A||B| \sin\theta$$



เวกเตอร์ A และ B ยังไม่ตั้งฉากกัน



แตกเวกเตอร์ให้อยู่ในแนวเดียวกัน

ผลลัพธ์จึงเกิดจาการคูณกันของขนาดเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน

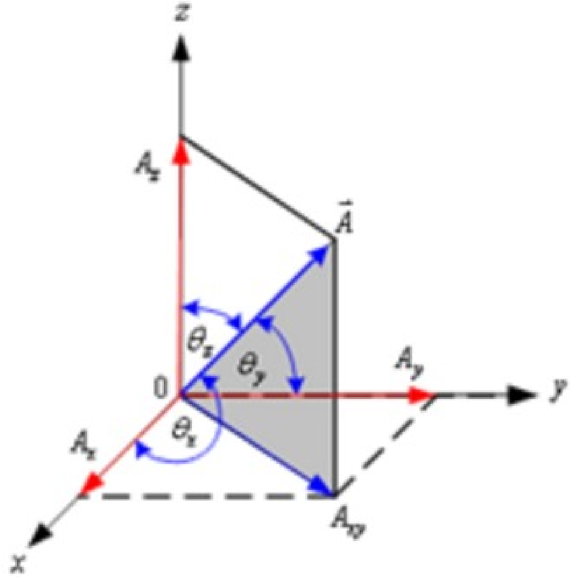
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = |A||B| \sin\theta$$

การครอสเวกเตอร์คือ การคูณกันของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน

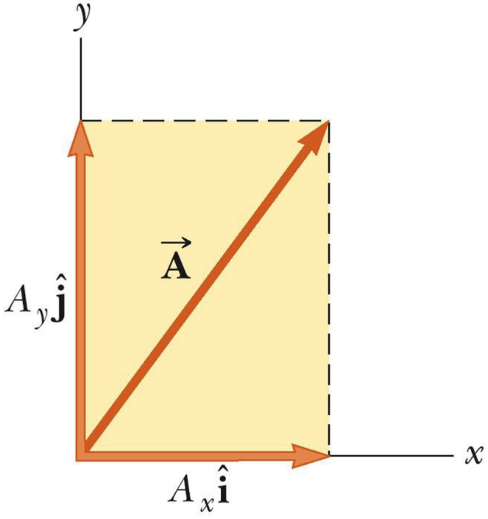
4. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)

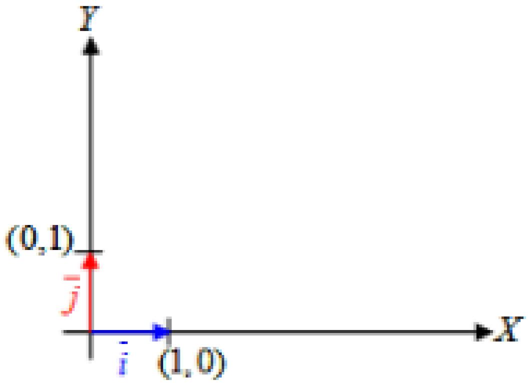
- เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือ *เวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย*
- มักใช้ในทิศทางจำเพาะและไม่มีผลทางกายภาพอย่างใด
- $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของระบบพิกัดฉาก 3 มิติในทิศ

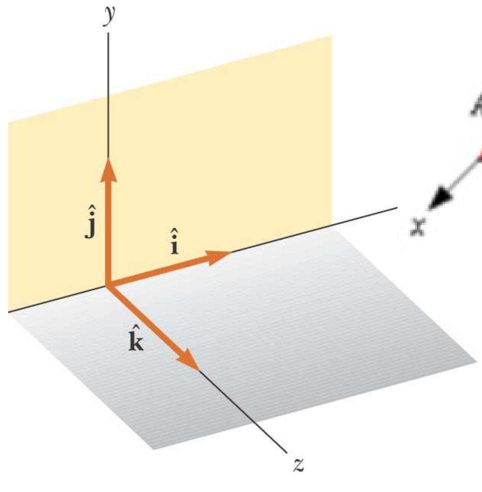
ตามแนวแกน x, y และ z



- เวกเตอร์ทั้งสามมีทิศตั้งฉากกัน $\hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{|A|}$







(a)

- เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ และ $\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ที่กำหนดให้กับแกน x, y และ z ตามลำดับ

  เวกเตอร์ $3\hat{\imath}$ แทนเวกเตอร์สามหน่วยในทิศ +x

  $-5\hat{k}$ แทนเวคเตอร์ห้าหน่วยในทิศ -z

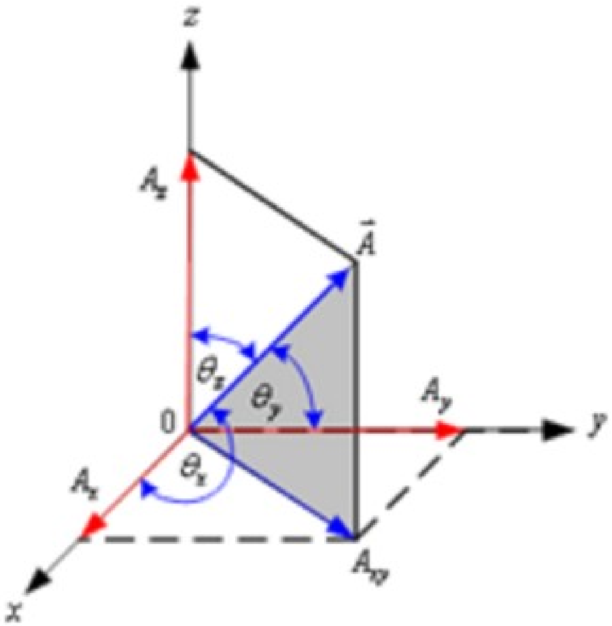
- เวกเตอร์ R ใดๆ ที่มีองค์ประกอบในทิศ x, y และ z เป็น R_x R_y และ R_z ตามลำดับ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$R= R_x\hat{\imath}+R_y\hat{\jmath}+R_z\hat{k}$$

บางครั้งเราใช้ $\hat{x}$ $\hat{y}$ และ $\hat{z}$ แทน $\hat{\imath}$ $\hat{\jmath}$ และ $\hat{k}$

- **โคไซน์แสดงทิศทาง**มีนิยามว่า

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R},\ \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \cos\gamma = \frac{R_z}{R}$$



<u>ตัวอย่าง</u> จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยและโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{v} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$

<u>วิธีทำ</u> ขนาดของ $\vec{v}$

$$v = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ $\vec{v}$ คือ

$$\hat{v} = \frac{2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}}{3}$$

เวกเตอร์ $\hat{v}$ นี้มีขนาด 1 หน่วย และมีทิศไปทางเดียวกับ $\vec{v}$

โคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ คือ

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{1}{3}$$

4.1 การบวกเวกเตอร์โดยใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย- 2มิติ

- ใช้ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$
- จาก $\vec{R} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

- ดังนั้น $R_x = A_x + B_x$ และ $R_y = A_y + B_y$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{และ} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

ตัวอย่าง การบวกเวกเตอร์โดยใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$\vec{A} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}\,,\qquad \vec{B} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}\qquad$ จงหา $\vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{B}}$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) + (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$$
$$= (4+1)\hat{\imath} + (3+2)\hat{\jmath}$$
$$= 5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$$

หาขนาด $|R| = \sqrt{5^2 + 5^2}$

$$= 7.07$$

หาทิศทาง

$$\theta = tan^{-1}(5/5)$$
$$= tan^{-1}(1)$$
$$= 45\,°$$

ตัวอย่าง การบวกเวกเตอร์โดยใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}\ , \vec{B} = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}\ , \vec{C} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

จงหา ก. $\overrightarrow{\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{C}}$ ข. $\overrightarrow{\mathrm{A}} - \overrightarrow{\mathrm{B}} - \overrightarrow{\mathrm{C}}$ ค. $2\overrightarrow{\mathrm{A}} - \overrightarrow{\mathrm{B}} + 3\overrightarrow{\mathrm{C}}$

4.2 การบวกเวกเตอร์โดยใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย- 3มิติ

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{R} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

$$R_x = A_x + B_x$$

$$R_y = A_y + B_y$$

$$R_z = A_z + B_z$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{R_x}{|\vec{R}|}\right)$$

$$\theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{R_y}{|\vec{R}|}\right)$$

$$\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{R_z}{|\vec{R}|}\right)$$

ตัวอย่าง การบวกเวกเตอร์โดยใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}, \qquad \vec{B} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$$

จงหา ก. $\overrightarrow{\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{B}}$ ข. $\overrightarrow{\mathrm{A}} - \overrightarrow{\mathrm{B}}$ ค. $2\overrightarrow{\mathrm{A}} - \overrightarrow{\mathrm{B}}$

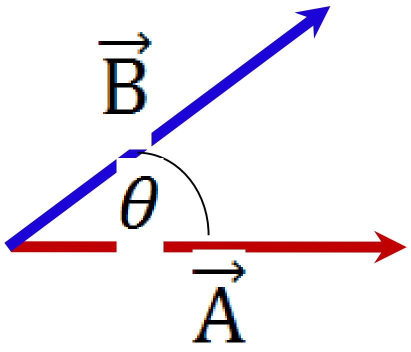
4.3 ผลคูณเชิงสเกลาร์และเวกเตอร์

เวกเตอร์สองตัวสามารถคูณกันได้สองวิธี คือ

- ผลคูณเชิงสเกลาร์ (ผลคูณแบบดอท) *ได้ปริมาณสเกลาร์* $C = \vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B|\cos\theta$ โดยที่ $\mathbf{0 \le \boldsymbol{\theta} \le 180}$
- ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (ผลคูณแบบครอส) *ได้ปริมาณเวกเตอร์* $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = |A||B|\sin\theta$

ขนาดของ

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = -(\vec{\mathrm{B}} \times \mathrm{A})$$



4.3.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ (ผลคูณแบบดอท)

$$\vec{A}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}),\ \vec{B}=(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{i}=0$$

$$\hat{i}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0$$

$$\hat{k}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=0$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\right)\cdot\left(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}\right)$$

$$=\left(A_x\hat{i}\cdot B_x\hat{i}+A_x\hat{i}\cdot B_y\hat{j}+A_x\hat{i}\cdot B_z\hat{k}\right)$$

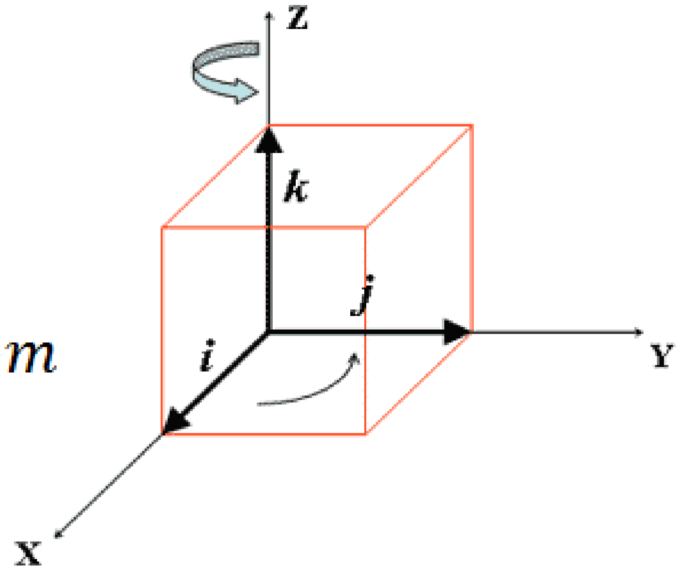
$$+\left(A_y\hat{j}\cdot B_x\hat{i}+A_y\hat{j}\cdot B_y\hat{j}+A_y\hat{j}\cdot B_z\hat{k}\right)$$

$$+\left(A_z\hat{k}\cdot B_x\hat{i}+A_z\hat{k}\cdot B_y\hat{j}+A_z\hat{k}\cdot B_z\hat{k}\right)$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

DOT PRODUCT

สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์



(1) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

(2) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

(3) $m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (m\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (m\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})m$

(4) $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$

$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$

(5) $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}, \qquad \vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$\vec{A} \cdot \vec{A} = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2$

$\vec{B} \cdot \vec{B} = {B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2$

(6) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ถ้า $\vec{A} \neq 0, \vec{B} \neq 0$ ดังนั้น $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

ตัวอย่างผลคูณเชิงสเกลาร์ (ผลคูณแบบดอท)

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}, \qquad \vec{B} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$$

จงหาว่าเวกเตอร์ทั้งสองทามุมเท่าใด

ตัวอย่างผลคูณเชิงสเกลาร์ (ผลคูณแบบดอท)

$$\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k},\ \vec{B} = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}\ ,\vec{C} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$$

จงหาว่าเวกเตอร์ ก.$(\vec{A}, \vec{B})$ ข.$(\vec{A}, \vec{C})$ ค. $(\vec{B}, \vec{C})$ทำมุมเท่าใด

4.3.2 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (ผลคูณแบบครอส)

CROSS PRODUCT

$$\vec{A}\times\vec{B} = -(\vec{B}\times A)$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B} &= (A_x\imath + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \\
&= (A_x\hat{i}\times B_x\hat{i}) + (A_x\hat{i}\times B_y\hat{j}) + (A_x\hat{i}\times B_z\hat{k}) \\
&\quad + (A_y\hat{j}\times B_x\hat{i}) + (A_y\hat{j}\times B_y\hat{j}) + (A_y\hat{j}\times B_z\hat{k}) \\
&\quad + (A_z\hat{k}\times B_x\hat{i}) + (A_z\hat{k}\times B_y\hat{j}) + (A_z\hat{k}\times B_z\hat{k})
\end{aligned}$$

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$$

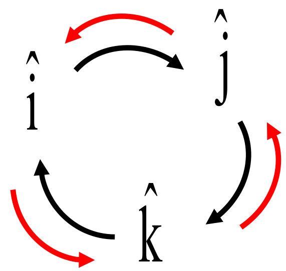
$$\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$$

$$\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$$



ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (ผลคูณแบบครอส)

$$\vec{R} = \vec{A}\times\vec{B} = \overbrace{(A_yB_z - A_zB_y)}^{R_x}\hat{\imath} + \underbrace{(A_zB_x - A_xB_z)}_{R_y}\hat{\jmath} + \underbrace{(A_xB_y - A_yB_x)}_{R_z}\hat{k}$$

$$-A_yB_x\hat{k} \quad -A_zB_y\hat{\imath} \quad -A_xB_z\hat{\jmath}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\ A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{bmatrix}$$

$$A_yB_z\hat{\imath} \quad A_zB_x\hat{\jmath} \quad A_xB_y\hat{k}$$

สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

$$(1)\ \vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

$$(2)\ \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

$$(3)\ m(\vec{A}\times\vec{B}) = (m\vec{A})\times\vec{B} = \vec{A}\times(m\vec{B}) = (\vec{A}\times\vec{B})m$$

$$(4)\ \hat{\imath}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$$

$$\hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}$$

$$\hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

$$(5)\ \vec{A} = A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k},\quad \vec{B} = B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

ตัวอย่างผลคูณเชิงเวกเตอร์(ผลคูณแบบครอส)

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}, \qquad \vec{B} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$$

จงหาว่าเวกเตอร์ทั้งสองทามุมเท่าใด

ตัวอย่างผลคูณเชิงเวกเตอร์ (ผลคูณแบบครอส)

$$\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k},\ \vec{B} = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}\ ,\ \vec{C} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$$

จงหาว่าเวกเตอร์ ก.$(\vec{A}, \vec{B})$ ข.$(\vec{A}, \vec{C})$ ค. $(\vec{B}, \vec{C})$ทามุมเท่าใด

4.3.3 ผลสามชั้น

- สมบัติของผลคูณสเกลาร์ของสามเวกเตอร์
- *(1)* $\vec{A}\times(\vec{B}\times C)=\vec{B}\times(C\times A)=C\times(A\times\vec{B})$
- *(2) ถ้า* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ *อยู่ในระนาบเดียวกัน*

  $$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 0$$

- *(3) ถ้าเวกเตอร์คู่ใดคู่หนึ่งในผลคูณของสามเวกเตอร์เท่ากันจะได้ว่า*

  $$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{C}) = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{B}) = \vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 0$$

- *(4)*

  $$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

จงหามุมระหว่าง

$$\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} \quad \text{และ} \quad \vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$$

ซึ่ง $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$

$$\left|\vec{a}\right| = a = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\left|\vec{b}\right| = b = \sqrt{(-2)^2 + \left(3^2\right)} = 3.61$$

$$(3 \quad -4 \quad)\cdot(-2 \quad +3 \quad) = 5(3.61)\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{-6}{18.05}$$

$$\theta = 109.415^0$$

ตัวอย่าง (การคูณเวกเตอร์)

$\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{C} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$

(1) $\vec{A}.\vec{B}$

(2) $\vec{A}x\vec{B}$

(3) $\vec{A}.(\vec{B}x\vec{C})$

(4) $\vec{A}x(\vec{B}x\vec{C})$

Assignment 2

(1) เวกเตอร์ A มีขนาด 40 N ทิศทำมุม 37° กับแกน X จงหาเวกเตอร์ส่วนประกอบ A_x และ A_y

(2) เวกเตอร์ A มีขนาด 2 m ชี้ไปทางทิศเหนือและเวกเตอร์ B มีขนาด 3 m ชี้ไปทางทิศตะวันออก จงหาขนาดและทิศของ $\vec{A} + \vec{B}$

(3) เวกเตอร์สองอันทำมุม 130° ซึ่งกันและกัน เวกเตอร์อันหนึ่งมีขนาด 10 m/s และทำมุม 50° กับเวกเตอร์ลัพธ์ จงหาขนาดเวกเตอร์ลัพธ์และของเวกเตอร์อันที่สอง

(4) เรือยนต์ลำหนึ่งแล่นไปทางทิศเหนือด้วยความเร็ว 15 km/h ในแม่น้ำซึ่งไหลเชี่ยว 5 km/h ในทิศ S 70° E จงหาความเร็วลัพธ์ของเรือ

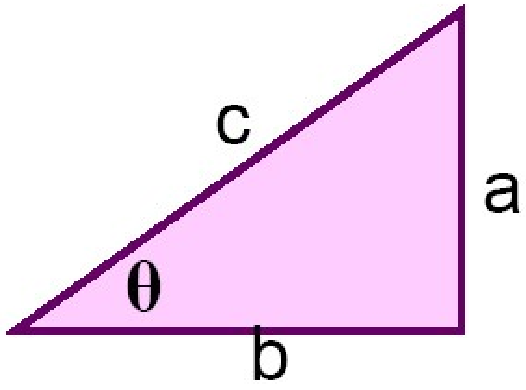
(5) จงหาขนาดและทิศของเวกเตอร์ ก) $5\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}$ ข) $-5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$

(6) จงหาการกระจัดลัพธ์ของการกระจัด 3 อันบวกกัน $2\hat{\imath} - 3\hat{k}$ m, $5\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ m และ $-6\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 8\hat{k}$ m แล้วหาขนาดและทิศของการกระจัดลัพธ์นั้นด้วย

(7) การกระจัด $\vec{A}$ มีขนาด $5.0\ m$ ทำมุม 37° กับแกน x และการกระจัด $\vec{B}$ มีขนาด $5.0\ m$ ทิศตามแกน x จงหา (1) ผลบวกของการกระจัด และ (2) ผลต่างของการกระจัด

(8) กำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}\ m$ และ $\vec{B} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath}\ m$ จงหา (1) scalar product (2) vector product แสดงให้เห็นจริงว่า $\vec{A} x \vec{B} = -\vec{B} x \vec{A}$ และ (3) มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

To be continued..



$$\sin\theta = \frac{a}{c} \qquad \cos\theta = \frac{b}{c} \qquad \tan\theta = \frac{a}{b}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{a} \qquad \sec\theta = \frac{c}{b} \qquad \cot\theta = \frac{b}{a}$$

สมการตรีโกณมิติที่ควรรู้

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1; \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1; \quad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$