ไฮเพอร์กรุป และไฮเพอร์ริง
Hypergroup and Hyperring

สำคัญ ฮ่อบรรทัด[1]

โดยทั่วไปแล้วผู้ที่ให้ความสนใจทางด้านคณิตศาสตร์บริสุทธิ์จะรู้จักนิยามของการดำเนินการทวิภาค เป็นอย่างดี เนื่องจากเป็นพื้นฐานในการเกิดระบบเชิงพีชคณิตนามธรรม ซึ่งเรียกระบบดังกล่าวว่า กึ่งกรุป หรือกรุป ขึ้นอยู่กับว่าระบบนั้นมีคุณสมบัติอย่างไร เช่นเดียวกันสำหรับระบบพีชคณิตไฮเพอร์ การดำเนินการ แบบใหม่ที่เกิดขึ้นได้จากการขยายบทนิยามของการดำเนินการทวิภาค Samkhan H. & Wichayaporn J. (2015 : 117-121) ได้เขียนนิยามการดำเนินการไฮเพอร์ และกึ่งไฮเพอร์กรุป ดังนี้

บทนิยามที่ 1	กำหนดให้ H เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง การดำเนินการไฮเพอร์ (hyper operation) คือ ฟังก์ชัน $\circ : H \times H \to P^*(H)$ โดยที่ $P^*(H)$ คือ เซตของเซตย่อยทั้งหมดของ H ที่ไม่รวมเซตว่าง

ถ้า A และ B เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ H และ $x \in H$ จะนิยาม

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b, \; x \circ A = \{x\} \circ A \text{ และ } A \circ x = A \circ \{x\}$$

บทนิยามที่ 2	กำหนดให้ H เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง กึ่งไฮเพอร์กรุป (semihypergroup) คือ ระบบ $(H, \circ)$ โดยที่ $\circ$ เป็นการดำเนินการไฮเพอร์ และ $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in H$

จากบทนิยามที่ 1 และบทนิยามที่ 2 หากระบบ $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุป และ $(H, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป จะสังเกตว่าสองระบบนี้ต่างกันที่ตัวดำเนินการ เนื่องการดำเนินการไฮเพอร์ขยายมาจากการดำเนินการทวิภาค จึงสามารถกล่าวได้ว่า กึ่งกรุปใด ๆ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป สำคัญ ฮ่อบรรทัด (2559 : 103 - 117) ให้ตัวอย่างกึ่งไฮเพอร์กรุป ดังนี้

---

[1]อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $S = \{0, 1\}$ นิยามการดำเนินการ $*$ ดังตาราง

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

จงพิจารณาว่า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปหรือไม่ ถ้าเป็นสามารถมองเป็น กึ่งไฮเพอร์กรุปได้อย่างไร

วิธีทำ จากตารางการดำเนินการเห็นได้ชัดว่า $(S, *)$ มีสมบัติปิด พิจารณา

$$(0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0 = 0 * 0 = 0 * (0 * 0)$$
$$(0 * 0) * 1 = 0 * 1 = 1 = 0 * 1 = 0 * (0 * 1)$$
$$(0 * 1) * 0 = 1 * 0 = 1 = 0 * 1 = 0 * (1 * 0)$$
$$(1 * 0) * 0 = 1 * 0 = 1 = 1 * 0 = 1 * (0 * 0)$$
$$(0 * 1) * 1 = 1 * 1 = 0 = 1 * 1 = 1 * (1 * 0)$$
$$(1 * 0) * 1 = 1 * 1 = 0 = 1 * 1 = 1 * (0 * 1)$$
$$(1 * 1) * 0 = 0 * 0 = 0 = 1 * 1 = 1 * (1 * 0)$$
$$(1 * 1) * 1 = 0 * 1 = 1 = 1 * 0 = 1 * (1 * 1)$$

จึงได้ว่า $(S, *)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
นั่นคือ $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุป
ต่อไปจะสร้างการดำเนินการไฮเพอร์จากการดำเนินการทวิภาค ดังนี้

$\circ$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0\}$

เห็นได้ชัดว่า $\circ : S \times S \to P^*(S)$ พิจารณา

$$(0 \circ 0) \circ 0 = \{0\} \circ 0 = \{0\} = 0 \circ \{0\} = 0 \circ (0 \circ 0)$$
$$(0 \circ 0) \circ 1 = \{0\} \circ 1 = \{1\} = 0 \circ \{1\} = 0 \circ (0 \circ 1)$$
$$(0 \circ 1) \circ 0 = \{1\} \circ 0 = \{1\} = 0 \circ \{1\} = 0 \circ (1 \circ 0)$$
$$(1 \circ 0) \circ 0 = \{1\} \circ 0 = \{1\} = 1 \circ \{0\} = 1 \circ (0 \circ 0)$$
$$(0 \circ 1) \circ 1 = \{1\} \circ 1 = \{0\} = 1 \circ \{1\} = 1 \circ (1 \circ 0)$$
$$(1 \circ 0) \circ 1 = \{1\} \circ 1 = \{0\} = 1 \circ \{1\} = 1 \circ (0 \circ 1)$$
$$(1 \circ 1) \circ 0 = \{0\} \circ 0 = \{0\} = 1 \circ \{1\} = 1 \circ (1 \circ 0)$$
$$(1 \circ 1) \circ 1 = \{0\} \circ 1 = \{1\} = 1 \circ \{0\} = 1 \circ (1 \circ 1)$$

จึงได้ว่า $(S, \circ)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
นั่นคือ $(S, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป

เมื่อพิจารณาตัวอย่างที่ 1 จะพบว่ากึ่งกรุปใด ๆ สามารถมองเป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปได้ ต่อไปจะแนะนำไฮเพอร์กรุป ซึ่ง Hossein M. J., *et al.* (2011 : 51-55) ให้คำจำกัดความไฮเพอร์กรุปดังบทนิยามที่ 3

บทนิยามที่ 3 กำหนดให้ $(H, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป จะกล่าวว่า H เป็นไฮเพอร์กรุป (hypergroup) ก็ต่อเมื่อ $H \circ a = a \circ H = H$ สำหรับทุก ๆ $a \in H$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $G = \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ และนิยามการดำเนินการไฮเพอร์ ดังนี้

$\circ$	1	-1	i	$-i$
1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	G	G
-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	G	G
i	G	G	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$
$-i$	G	G	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$

จงพิจารณาว่า $(G, \circ)$ เป็นไฮเพอร์กรุปหรือไม่

วิธีทำ $(G, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป (สำคัญ ฮ่อบรรทัด, 2559 : 103 - 117) พิจารณา

$$\begin{aligned}
1 \circ G &= 1 \circ 1 \cup 1 \circ (-1) \cup 1 \circ i \cup 1 \circ (-i) \\
&= \{1, -1\} \cup \{1, -1\} \cup G \cup G \\
&= G \\
G \circ 1 &= 1 \circ 1 \cup (-1) \circ 1 \cup i \circ 1 \cup (-i) \circ 1 \\
&= \{1, -1\} \cup \{1, -1\} \cup G \cup G \\
&= G \\
(-1) \circ G &= (-1) \circ 1 \cup (-1) \circ (-1) \cup (-1) \circ i \cup (-1) \circ (-i) \\
&= \{1, -1\} \cup \{1, -1\} \cup G \cup G \\
&= G \\
G \circ (-1) &= 1 \circ (-1) \cup (-1) \circ (-1) \cup i \circ (-1) \cup (-i) \circ (-1) \\
&= \{1, -1\} \cup \{1, -1\} \cup G \cup G \\
&= G \\
i \circ G &= i \circ 1 \cup i \circ (-1) \cup i \circ i \cup i \circ (-i) \\
&= G \cup G \cup \{i, -i\} \cup \{i, -i\} \\
&= G \\
G \circ i &= 1 \circ i \cup (-1) \circ i \cup i \circ i \cup (-i) \circ i \\
&= G \cup G \cup \{i, -i\} \cup \{i, -i\} \\
&= G
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(-i) \circ G &= (-i) \circ 1 \cup (-i) \circ (-1) \cup (-i) \circ i \cup (-i) \circ (-i) \\
&= G \cup G \cup \{i, -i\} \cup \{i, -i\} \\
&= G \\
G \circ (-i) &= 1 \circ (-i) \cup (-1) \circ (-i) \cup i \circ (-i) \cup (-i) \circ (-i) \\
&= G \cup G \cup \{i, -i\} \cup \{i, -i\} \\
&= G
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(G, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป

เมื่อพิจารณาตารางการดำเนินการในตัวอย่างที่ 2 พบว่า เมื่อนำสมาชิกแต่ละแถวหรือแต่ละหลักมายูเนียนจะได้เท่ากับ G นับว่าเป็นวิธีตรวจสอบความเป็นไฮเพอร์กรุปได้ แต่สิ่งหนึ่งที่น่าสังเกต คือ เอกลักษณ์และตัวผกผันจะนิยามอย่างไร Samkhan H. (2009 : 3 - 4) ได้เขียนนิยามของเอกลักษณ์ และตัวผกผันบนระบบไฮเพอร์ไว้ ดังนี้

บทนิยามที่ 4 กำหนดให้ $(H, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป และ $e \in H$ จะเรียก e ว่าเอกลักษณ์ของ $(H, \circ)$ ถ้า $x \in (x \circ e) \cap (e \circ x)$ สำหรับทุก $x \in H$ และจะเรียก e ว่าเอกลักษณ์สเกลาร์ (scalar identity) ของ $(H, \circ)$ ถ้า $(x \circ e) \cap (e \circ x) = \{x\}$ สำหรับทุก $x \in H$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $G = \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ และนิยามการดำเนินการไฮเพอร์ ดังนี้

$\circ$	1	-1	i	$-i$
1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	G	G
-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	G	G
i	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$
$-i$	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$

จงพิจารณาว่า $(G, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปที่มีเอกลักษณ์หรือไม่ และมีเอกลักษณ์สเกลาร์หรือไม่อย่างไร

วิธีทำ $(G, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป (สำคัญ ฮ่อบรรทัด, 2559 : 103 - 117)

พิจารณา $i \notin i \circ 1$ และ $i \notin i \circ (-1)$ ดังนั้น 1 และ -1 ไม่ใช่เอกลักษณ์

พิจารณา $1 \in G = 1 \circ i$ และ $1 \in \{1\} = i \circ 1$

$(-1) \in G = (-1) \circ i$ และ $-1 \in \{-1\} = i \circ (-1)$

$-i \in \{i, -i\} = i \circ (-i)$ และ $-i \in \{i, -i\} = (-i) \circ (i)$

$i \in \{i, -i\} = i \circ i$

ดังนั้น i เป็นเอกลักษณ์ของ $(G, \circ)$

พิจารณา $1 \in G = 1 \circ (-i)$ และ $1 \in \{1\} = (-i) \circ 1$

$(-1) \in G = (-1) \circ (-i)$ และ $-1 \in \{-1\} = (-i) \circ (-1)$

$i \in \{i, -i\} = i \circ (-i)$ และ $i \in \{i, -i\} = (-i) \circ (i)$

$(-i) \in \{i, -i\} = (-i) \circ (-i)$

ดังนั้น $(-i)$ เป็นเอกลักษณ์ของ $(G, \circ)$

นั่นคือ i และ $-i$ เป็นเอกลักษณ์ของ $(G, \circ)$

ตัวอย่างที่ 3 เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่า เอกลักษณ์สามารถมีได้หลายตัว นอกจากนี้เอกลักษณ์ทั้งสองตัวยังไม่ใช่เอกลักษณ์สเกลาร์ ในตัวอย่างที่ 4 จะเป็นตัวอย่างของเอกลักษณ์สเกลาร์ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $G = \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ และนิยามการดำเนินการไฮเพอร์ ดังนี้

$\circ$	1	-1	i	$-i$
1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	G	G	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$
$-i$	G	G	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$

จงพิจารณาว่า $(G, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปหรือไม่ และถ้ากำหนดให้ $I = \{1, -1\}$ แล้ว I เป็นกึ่งไฮเพอร์ไอดีลของ G หรือไม่ อย่างไร

วิธีทำ จากตารางการดำเนินการจะได้ว่า $\circ : G \times G \to P^*(G)$

จึงสรุปได้ว่า $\circ$ เป็นการดำเนินการไฮเพอร์

พิจารณาคุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่ ดังนี้

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
1	1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	1	i	$\{1,-1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	1	$-i$	$\{1,-1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	i	$\{1,-1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	$-i$	$\{1,-1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	i	1	$\{1\}$	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	i	-1	$\{1\}$	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	i	i	$\{1\}$	$\{i,-i\}$	G	G
1	i	$-i$	$\{1\}$	$\{i,-i\}$	G	G
1	$-i$	1	$\{1\}$	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	$-i$	-1	$\{1\}$	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	$-i$	i	$\{1\}$	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
1	$-i$	$-i$	$\{1\}$	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
-1	1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	1	i	$\{1,-1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	1	$-i$	$\{1,-1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	i	$\{1,-1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	$-i$	$\{1,-1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	i	1	$\{-1\}$	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	i	-1	$\{-1\}$	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	i	i	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	i	$-i$	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	$-i$	1	$\{-1\}$	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	$-i$	-1	$\{-1\}$	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	$-i$	i	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	$-i$	$-i$	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
i	1	1	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	1	-1	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	1	i	G	$\{1\}$	G	G
i	1	$-i$	G	$\{1\}$	G	G
i	-1	1	G	$\{1,-1\}$	G	G
i	-1	-1	G	$\{1,-1\}$	G	G
i	-1	i	G	$\{-1\}$	G	G
i	-1	$-i$	G	$\{-1\}$	G	G
i	i	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	i	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	1	1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	1	-1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	1	i	G	$\{1\}$	G	G
$-i$	1	$-i$	G	$\{1\}$	G	G
$-i$	-1	1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	-1	-1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	-1	i	G	$\{-1\}$	G	G
$-i$	-1	$-i$	G	$\{-1\}$	G	G
$-i$	i	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	i	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$

ดังนั้น $(G, \circ)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
นั่นคือ $(G, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป
พิจารณา

$$\begin{aligned} I \circ G &= \{1, -1\} \circ \{1, -1, i, -i\} \\ &= 1 \circ 1 \cup 1 \circ -1 \cup 1 \circ i \cup 1 \circ -i \cup -1 \circ 1 \cup -1 \circ -1 \\ &\quad \cup -1 \circ i \cup -1 \circ -i \\ &= \{1, -1\} \cup \{1\} \cup \{-1\} \\ &= \{1, -1\} \subseteq I \end{aligned}$$

จากบทนิยามที่ 4 จะได้ว่า I เป็นไฮเพอร์ไอดีลขวาของ G
แต่ $G \circ I = G \not\subseteq I$
ดังนั้น I ไม่เป็นไฮเพอร์ไอดีลซ้ายของ G
นั่นคือ I ไม่เป็นไฮเพอร์ไอดีลของ G

ตัวอย่างที่ 4 เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่า มีเซตย่อยที่เป็นเฉพาะไอดีลขวาเท่านั้น ต่อไปจะแสดงการมีอยู่ของเซตย่อยที่เป็นไอดีลดังตัวอย่างที่ 5

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $G = \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ และนิยามการดำเนินการไฮเพอร์ ดังนี้

$\circ$	1	-1	i	$-i$
1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$
$-i$	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$

จงพิจารณาว่า $(G, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปหรือไม่ และถ้ากำหนดให้ $I = \{1, -1\}$ แล้ว I เป็นกึ่งไฮเพอร์ไอดีลของ G หรือไม่ อย่างไร

วิธีทำ จากตารางการดำเนินการจะได้ว่า $\circ : G \times G \to P^*(G)$
จึงสรุปได้ว่า $\circ$ เป็นการดำเนินการไฮเพอร์
พิจารณาคุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่ ดังนี้

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
1	1	1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	1	-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	1	i	$\{1, -1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	1	$-i$	$\{1, -1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	-1	1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	-1	-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	-1	i	$\{1, -1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	-1	$-i$	$\{1, -1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	i	1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	i	-1	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	i	i	$\{1\}$	$\{i, -i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
1	i	$-i$	$\{1\}$	$\{i, -i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
1	$-i$	1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	$-i$	-1	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	$-i$	i	$\{1\}$	$\{i, -i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
1	$-i$	$-i$	$\{1\}$	$\{i, -i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
-1	1	1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	1	-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	1	i	$\{1, -1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	1	$-i$	$\{1, -1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	-1	1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	-1	-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	-1	i	$\{1, -1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	-1	$-i$	$\{1, -1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	i	1	$\{-1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	i	-1	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	i	i	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	i	$-i$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	$-i$	1	$\{-1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	$-i$	-1	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	$-i$	i	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	$-i$	$-i$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
i	1	1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	1	-1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	1	i	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
i	1	$-i$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
i	-1	1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	-1	-1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	-1	i	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	-1	$-i$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	i	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
i	i	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
i	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	1	1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	1	-1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	1	i	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$-i$	1	$-i$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$-i$	-1	1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	-1	-1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	-1	i	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
$-i$	-1	$-i$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
$-i$	i	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$-i$	i	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
$-i$	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$-i$	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
$-i$	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$

ดังนั้น $(G,\circ)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
นั่นคือ $(G,\circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป
พิจารณา

$$\begin{aligned} G\circ I &= \{1,-1,i,-i\}\circ\{1,-1\} \\ &= 1\circ 1\cup -1\circ 1\cup i\circ 1\cup -i\circ 1\cup 1\circ -1\cup -1\circ -1 \\ &\quad \cup i\circ -1\cup -i\circ -1 \\ &= \{1,-1\}\cup\{1\}\cup\{-1\} \\ &= \{1,-1\}\subseteq I \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} I\circ G &= \{1,-1\}\circ\{1,-1,i,-i\} \\ &= 1\circ 1\cup 1\circ -1\cup 1\circ i\cup 1\circ -i\cup -1\circ 1\cup -1\circ -1 \\ &\quad \cup -1\circ i\cup -1\circ -i \\ &= \{1,-1\}\cup\{1\}\cup\{-1\} \\ &= \{1,-1\}\subseteq I \end{aligned}$$

จากบทนิยามที่ 4 จะได้ว่า I เป็นไฮเพอร์ไอดีลของ G

เอกสารอ้างอิง

สำคัญ ฮ่อบรรทัด. (2559). **ไฮเพอร์ไอดีลในกึ่งไฮเพอร์กรุปขั้นแนะนำ**. วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์. ปีที่ 32(1) : 103 -117

Hossein M.J. *et al.* (2011). **Simple Semi Hypergroup**. Australian Journal of Basic and Application Science, 5(4) : 51-55

S. Hobanthad and W. Jantanan. (2015). **On 0-minimal bi-hyperideal of semihypergroups with zero**, NIRC. 1 : 117-121.

W. Jantanan and T. Changphas. (2013). **On 0-minimal (0,2)-bi-ideal in ordered semigroups**, Quasigroups and Related Systems. 21 : 51-58.

D. Heidari and B. Davvaz. (2011). **On ordered hyperstructures**, U.P.B. Sci. Bull. Series A, Vol.73, Iss.2 : 85-96.

F. Marty. (1934). **Sur unigeneralization de la notion de group**, 8th Congress Math. Scandenaves, Stockholm : 45-49.

Samkhan Hobanthad (2009). **Linear transformation subsemigroup of $L_R(V,W)$ admitting the structure of a semihyperring with zero**, , Master Thesis, Department of Mathematics, Graduate School, Chulalongkorn University.

Samkhan Hobanthad (2015). **On 0-minimal (0,2)-bi-hyperideal of semihypergroups**, Full tex research : 1-28.