แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2
เรื่อง ปริมาณทางฟิสิกส์

เนื้อหา

บทที่ 2 ปริมาณทางฟิสิกส์

1. **เวกเตอร์และสเกลาร์**
   1.1 การรวมเวกเตอร์
   1.2 การรวมหลายเวกเตอร์โดยใช้แผนภาพ
   1.3 การลบเวกเตอร์
   1.4 ส่วนประกอบของเวกเตอร์
2. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย
3. ผลคูณของเวกเตอร์
   3.1 การคูณแบบที่หนึ่ง ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์
   3.2 การคูณแบบที่สองผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์

สรุปท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบท

เอกสารอ้างอิง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

หลังจากศึกษาจบบทที่ 2 แล้วผู้เรียนสามารถ

1. สามารถนำความรู้เรื่อง ปริมาณทางฟิสิกส์บูรณาการใช้ในชีวิตประจำวันได้
2. สามารถอธิบายความหมาย ปริมาณทางฟิสิกส์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างได้
4. สามารถวิเคราะห์และแก้โจทย์ปัญหาโดยอาศัยกฎหรือทฤษฎีทางฟิสิกส์

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. บรรยายและยกตัวอย่าง กรณีศึกษาในประเด็นที่เกี่ยวข้อง
2. ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง จากแบบฝึกทักษะ ใบกิจกรรม และตัวอย่างแบบทดสอบ
3. ศึกษาจากเอกสารประกอบการสอน ด้วยตนเองจากสื่อการสอน และแหล่งการเรียนรู้

โดยใช้เทคโนโลยีทางการศึกษาที่เหมาะสม

4. ศึกษาค้นคว้าข้อมูลจากห้องสมุด และศูนย์หนังสือ โดยรู้จักวิเคราะห์ข้อมูลที่ศึกษาให้มีความถูกต้อง

5. รวบรวมข้อมูล นำเสนอรายงานเป็นรายบุคคล และเป็นกลุ่มในกรณี ศึกษา หน้าชั้นเรียน

6. แก้โจทย์ปัญหา โดยศึกษาเนื้อหา ความสัมพันธ์ สามารถเลือกใช้สูตร และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องอย่างถูกต้อง

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน วิชาฟิสิกส์ 1
2. สื่อประกอบการสอน Power Point เรื่อง การวัดและระบบหน่วย
3. เอกสารและแหล่งการเรียนรู้ออนไลน์

การวัดผล ประเมินผล

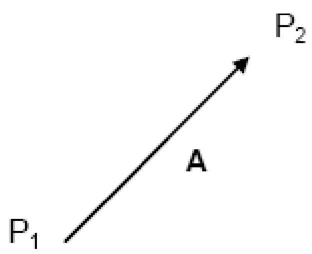
1. ประเมินการมีส่วนร่วมกิจกรรมการเรียนการสอนในชั้นเรียน
2. ประเมินผลตามแบบทดสอบประจำบท
3. ผลการทำแบบฝึกหัด
4. จากผลการสอบเก็บคะแนนระหว่างภาค

บทที่ 2
ปริมาณทางฟิสิกส์

เวกเตอร์และสเกลาร์

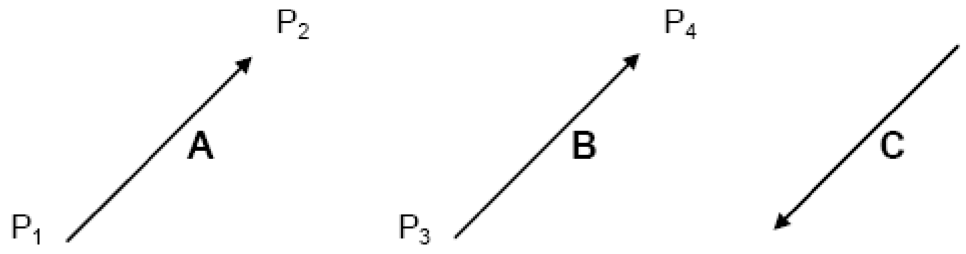
ปริมาณทางกายภาพเบื้องต้นนี้ประกอบด้วยตัวเลขและหน่วย สามารถเข้าใจได้เป็นอย่างดี เราเรียกปริมาณเหล่านี้ว่า **ปริมาณสเกลาร์** มีปริมาณอีกประเภทหนึ่งไม่เพียงแต่บอกปริมาณเท่านั้น ยังต้องประกอบด้วยทิศทาง จึงจะเข้าใจดีพอ เราเรียกปริมาณนี้ว่า **ปริมาณเวกเตอร์**

ปริมาณเวกเตอร์แรกสุดที่จะเขียนถึง คือ **ระยะกระจัด**
สมมติให้อนุภาคหนึ่งมีขนาดเล็กมากเกือบเป็นจุดเคลื่อนที่จากจุด P_1 ไปยังจุด P_2 แทนด้วยการลากเส้นตรงจากจุด P_1 ไปสิ้นสุดที่หัวลูกศรตรงจุด P_2 เรียกว่า เวกเตอร์ **A**



ภาพประกอบ 2.1 เวกเตอร์ **A** แทนระยะกระจัดจากจุด P_1 ไปยังจุด P_2
ที่มา : อุกฤษฏ์ นาจำปา, (2560)

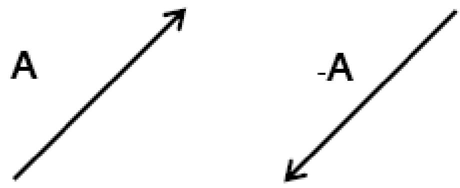
ระยะกระจัดเป็นปริมาณเวกเตอร์เพราะมีทั้งขนาดและทิศทาง ปกติจะใช้อักษรภาษาอังกฤษ ตัวพิมพ์ใหญ่หนาแทนเวกเตอร์ เพื่อจะให้แตกต่างจากปริมาณสเกลาร์ ตัวอย่างเช่น เวกเตอร์ **A** ดังภาพประกอบ 2.1 เป็นต้น ขณะทำโจทย์แบบฝึกหัด การใช้อักษรตัวหนาไม่สามารถเขียนได้ด้วยปากกา จึงให้เขียนลูกศรกำกับไว้บนตัวพิมพ์ใหญ่ เพื่อบอกว่าเป็นปริมาณเวกเตอร์ ตัวอย่างเช่น $\overline{A}$



ภาพประกอบ 2.2 เวกเตอร์ **B** แทนระยะกระจัดจาก P3 ไป P4 เวกเตอร์ **C** มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ **B** แต่มีทิศตรงข้ามกัน

ที่มา : อุกฤษฏ์ นาจำปา, (2560)

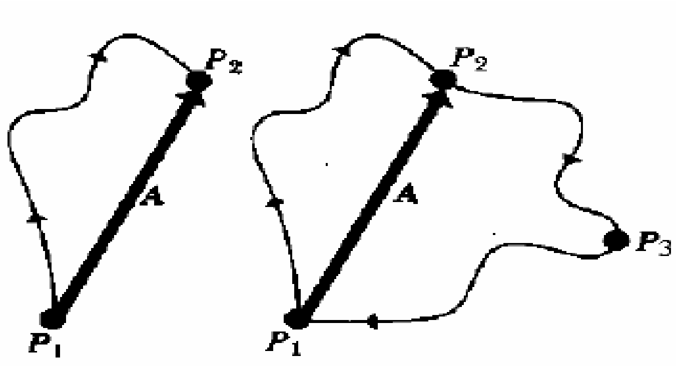
เวกเตอร์ **B** แทนระยะกระจัดจากจุด P3 ไปยังจุด P4 ดังภาพประกอบ 2.2 มีขนาดและทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ **A** ซึ่งแทนระยะกระจัดจากจุด P1 ไปยังจุด P2 เราสามารถนิยามว่า เวกเตอร์ **A** = เวกเตอร์ **B** ถึงแม้ว่าจุดเริ่มต้นจะไม่ใช่จุดเดียวกัน แต่ถ้ามีทิศและขนาดเดียวกัน เวกเตอร์ทั้งสองเท่ากัน



ภาพประกอบ 2.3 เวกเตอร์ **A** และ **-A** มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศตรงกันข้าม

ที่มา : อุกฤษฏ์ นาจำปา, (2560)

ถ้านำเวกเตอร์ **A** บวกกับ เวกเตอร์ **-A** จะได้เป็นศูนย์ เขียนเป็นสมการได้ว่า **A** + (-**A**) = 0 จาก ภาพประกอบ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง **B** และ **C** อาจเขียนได้เป็น **B** = **-C** หรือ **C** = **- B** ก็ได้



ภาพประกอบ 2.4 ระยะกระจัดคือ เส้นตรงที่ลากจากจุดเริ่มต้นถึงจุดสิ้นสุด
ที่มา : ศรีธน วรศักดิ์โยธิน , (2546)

ระยะกระจัด คือ เส้นตรงที่ลากจากจุดเริ่มต้นจนถึงจุดสิ้นสุด การดูแต่ขนาดไม่สนใจทิศทาง ให้ใส่สัญลักษณ์ขีดสองขีดคร่อมเวกเตอร์

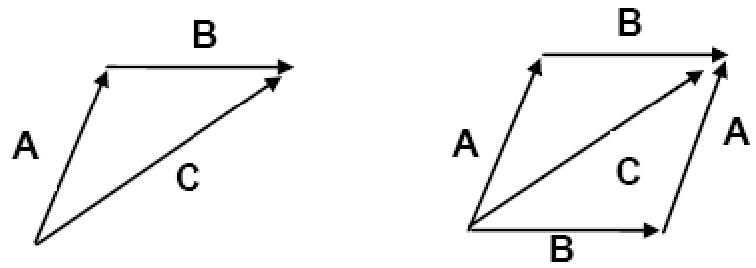
$$\text{ขนาดของเวกเตอร์ } A = |A| \qquad (2.1)$$

ขนาดของเวกเตอร์ เป็นปริมาณสเกลาร์ มีค่าเป็นบวกเสมอ

1.1 การรวมเวกเตอร์

สมมติให้อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ได้ระยะกระจัด **A** และยังเคลื่อนที่ต่อไปเป็นระยะกระจัด **B** ตามภาพประกอบ 2.5 (a) ระยะกระจัดทั้งหมดจะเริ่มจากจุดตั้งต้นไปสิ้นสุดที่จุดปลาย แทนด้วยระยะกระจัด **C** เรียกระยะกระจัด **C** ว่าเป็นผลบวกของ **A** และ **B** ความสัมพันธ์นี้สามารถแสดงอยู่ในภาพประกอบของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad (2.2)$$



(a) (b)

ภาพประกอบ 2.5 (a) เวกเตอร์ **C** คือผลบวกของเวกเตอร์ **A** และ เวกเตอร์
(b) การบวกเวกเตอร์ จะใช้เวกเตอร์ตัวไหนบวกก่อนหรือหลังก็ได้
ที่มา : อุกฤษฏ์ นาจำปา, (2560)

สังเกตว่า ผลลัพธ์ของ **A** บวกกับ **B** หรือจะนำ **B** หรือ **A** เป็นเวกเตอร์อันแรก จะได้เวกเตอร์ลัพธ์ **C** เหมือนกัน นั่นคือ

$$C = A + B = B + A \tag{2.3}$$

ตัวอย่างที่ 2.1

ถ้าคุณออกเดินไปทางทิศตะวันออก 30 กิโลเมตร แทนด้วยเวกเตอร์ **AB** และเดินต่อไปทาง ทิศเหนืออีก 10 กิโลเมตร แทนด้วยเวกเตอร์ **BC** ตามภาพประกอบระยะกระจัดทั้งหมดแทนด้วยเวกเตอร์ **R** ซึ่งเป็นผลรวมของ **AB** และ **BC** ถึงกระนั้นก็ตาม การรวมเวกเตอร์ไม่ใช่นำเอา 30 กม. + 10 กม. = 40 กม.โดยตรง ต้องรวมกันแบบเวกเตอร์ จากภาพประกอบการเดินทางเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสามารถใช้ทฤษฎี พิธากอรัส หาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ **R**

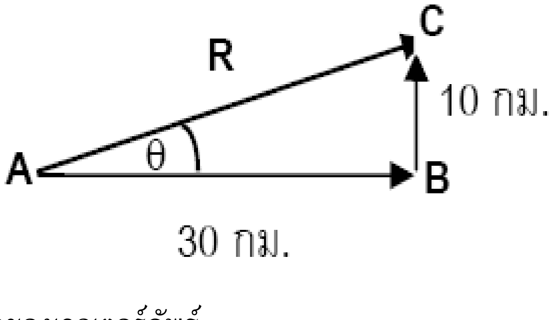
ทฤษฎีพิธากอรัสสำหรับสามเหลี่ยมมุมฉาก
(ด้านตรงข้ามมุมฉาก)^2 = (ด้านประกอบมุมฉาก)^2 + (ด้านประกอบมุมฉากที่เหลือ)^2

ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ $R = \sqrt{(10\,\text{km})^2 + (30\ \text{km})^2}$

$= \sqrt{(100 + 900)}$

$= 31.62$ **km**

R = AB + BC



ภาพประกอบ 2.6 ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์

ที่มา : อุกฤษฏ์ นาจำปา, (2560)

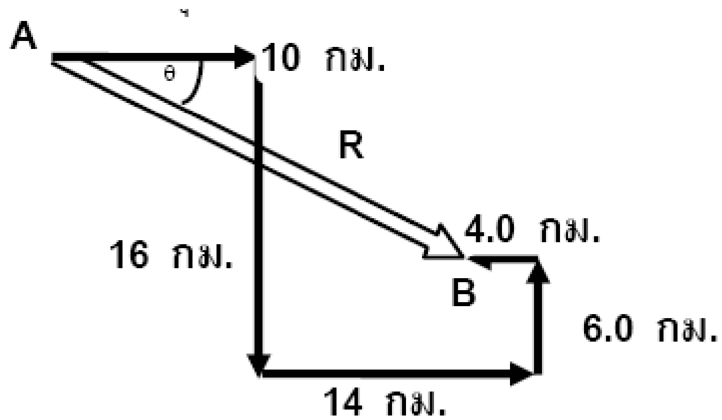
เวกเตอร์จะต้องมีขนาดและทิศทาง การบอกแต่ขนาดอย่างเดียวไม่เพียงพอ วิธีง่ายที่สุดให้ใช้ไม้โปรแทรกเตอร์วัดมุมโดยตรงจากรูปภาพ มีข้อกำหนดว่า รูปที่เขียนต้องใช้มาตราส่วนให้ถูกต้อง

จากการวัดมุม $\theta = 18.4^{\circ}$ นั่นคือ เวกเตอร์ลัพธ์มีขนาดเท่ากับ 31.62 กิโลเมตร ทำมุม 18.4° กับ ทิศตะวันออกเฉียงไปทางเหนือ

1.2 การรวมหลายเวกเตอร์โดยใช้แผนภาพ

เราสามารถหาเวกเตอร์ลัพธ์ซึ่งเกิดจากการรวมหลาย ๆ เวกเตอร์ ด้วยวิธีการเขียนแผนภาพ โดยการกำหนดมาตราส่วนและทิศทางของเวกเตอร์ให้ถูกต้องถ้าเป็นการรวม 2 เวกเตอร์ก็ให้ หางของ เวกเตอร์ตัวที่สองต่อกับหัวของเวกเตอร์ตัวแรก เวกเตอร์ผลลัพธ์จะเริ่มวัดจากจุดตั้งต้น หรือหางของเวกเตอร์ตัวแรกไปสิ้นสุดที่หัวของเวกเตอร์ตัวที่สอง

การรวมเวกเตอร์โดยใช้แผนภาพสามารถรวมเวกเตอร์ได้มากกว่า 2 ยกตัวอย่าง ถ้าเราต้องการบวกเวกเตอร์ 10 กิโลเมตร ตะวันออก, 16 กิโลเมตรใต้, 14 กิโลเมตรตะวันออก, 6 กิโลเมตรเหนือ และ 4 กิโลเมตรตะวันตก เริ่มต้นให้แทนขนาดของเวกเตอร์ด้วยมาตราส่วนและทิศที่ถูกต้องเสียก่อน เช่น 1 ซม. แทน 10 กิโลเมตร ต่อเวกเตอร์ไปตามลำดับดังภาพประกอบ 2.7 เวกเตอร์ลัพธ์ **R** จะลากเป็นเส้นตรงจากจุดตั้งต้นไป สิ้นสุดที่หัวของเวกเตอร์ตัวสุดท้าย วัดขนาดด้วยไม้โปรแทรกเตอร์เท่ากับ 2.24 ซม. คำนวณกลับไปหาขนาดจริง จะได้ **R** มีขนาดเท่ากับ 22.4 กิโลเมตร ทำมุม θ เท่ากับ 26.55° กับทิศตะวันออกเฉียงไปทางใต้

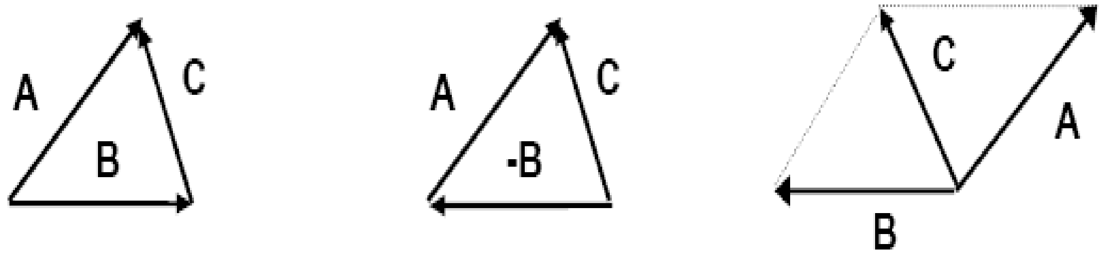


ภาพประกอบ 2.7 การรวมเวกเตอร์โดยใช้แผนภาพของเวกเตอร์ทั้ง 5

ที่มา : ศรีธน วรศักดิ์โยธิน , (2546)

1.3 การลบเวกเตอร์

การลบเวกเตอร์ก็สามารถหาเวกเตอร์ลัพธ์ได้เช่นเดียวกับการบวกเวกเตอร์ กล่าวคือ ให้กลับทิศทางของเวกเตอร์โดยใส่เครื่องหมายลบจะได้เวกเตอร์ตัวใหม่ จากนั้นหาเวกเตอร์ลัพธ์ของผลรวมระหว่างเวกเตอร์ตัวแรกกับเวกเตอร์ตัวใหม่นี้



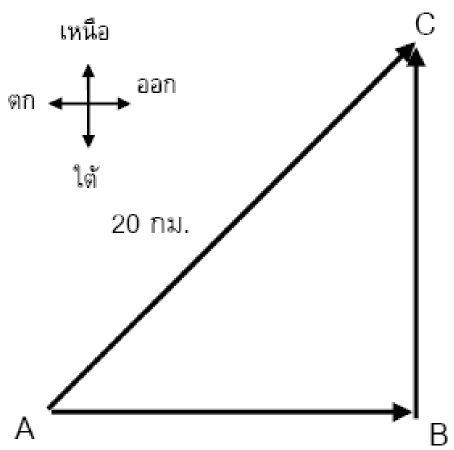
C = A-B (a) **C = A+(-B)** (c) **C = A - B** (b)

ภาพประกอบ 2.8 การลบเวกเตอร์

ที่มา : อุกฤษฏ์ นาจำปา, (2560)

1.4 ส่วนประกอบของเวกเตอร์

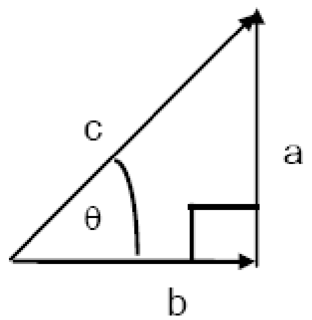
ระยะกระจัดลัพธ์ 20 กิโลเมตร ตะวันออกเฉียงเหนือมาจากการรวมเวกเตอร์ AB ตะวันออกกับเวกเตอร์ BC เหนือ ทั้ง AB และ BC เป็นส่วนประกอบย่อยของเวกเตอร์ลัพธ์ AC



ภาพประกอบ 2.9 ระยะกระจัดลัพธ์

ที่มา : อุกฤษฏ์ นาจำปา, (2560)

ถ้าคุณออกเดินทางจากจุด A ไปยังจุด C ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือของ A เริ่มจาก A และไปสิ้นสุดที่ C (ดังภาพประกอบ 2.9) กระนั้นคุณสามารถไปอีกทางคือ จาก A ไปที่ B ก่อน และจาก B จึงไปที่ C ระยะกระจัดจะเท่ากับจาก A ไป C โดยตรง ดังนั้น เวกเตอร์ **AC** สามารถแทนด้วยเวกเตอร์ **AB** บวกกับ เวกเตอร์ **BC** ได้ เราเรียกเวกเตอร์ทั้งสองนี้ว่า ส่วนประกอบของเวกเตอร์ **AC**



$\sin\theta = a/c$
$\cos\theta = b/c$
$\tan\theta = a/b$

ภาพประกอบ 2.10 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมมุมฉาก
ที่มา : อุกฤษฎ์ นาจำปา, (2560)

ทบทวนฟังก์ชันตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมมุมฉาก จากภาพประกอบ 2.10

$$\sin\theta = a/c\ ,\ \cos\theta = b/c,\ \tan\theta = a/b \qquad (2.4)$$

ถ้าเราทราบมุม θ และความยาวด้านใดด้านหนึ่งของสามเหลี่ยมมุมฉากก็สามารถหาด้านที่เหลือของสามเหลี่ยมได้

จากภาพประกอบ 2.10 ให้มุม $\theta = 30^{o}$ และ c = 30 ซม. จากสมการ 2.4 จะได้

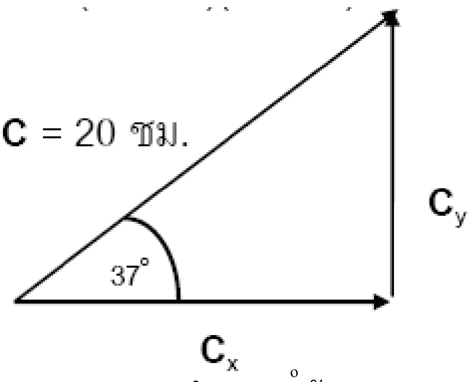
$$a = c\sin\theta = (30 \text{ ซม.})(\sin 30^{o})$$

เปิดตารางภาคผนวกหรือกดเครื่องคิดเลข $\sin 30^{o} = 0.500$ ดังนั้น

$$a = (30 \text{ ซม.})(0.500) = 15.0 \text{ ซม.}$$

จากสมการ 2.4 จะได้

$$b = c\cos\theta = (30 \text{ ซม.})(\cos 30^{o})$$
$$= (30 \text{ ซม.})(0.8666) = 26.0 \text{ ซม.}$$



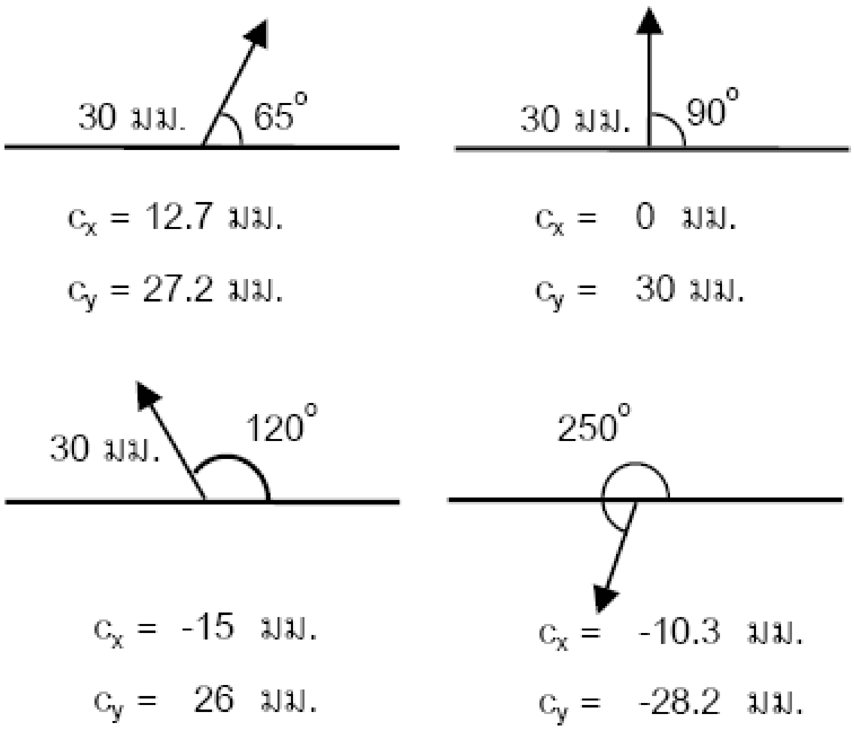
ภาพประกอบ 2.11 เวกเตอร์ **C** ขนาด 20 ซม. ทำมุม 37 ^{o} กับแกน x

ที่มา : อุกฤษฎ์ นาจำปา, (2560)

เวกเตอร์ **C** เป็นผลรวมของส่วนประกอบทางแกน x แทนด้วย **C**x และส่วนประกอบ ทางแกน y แทนด้วย **C**y เราคำนวณหาโดยใช้สมการ 2.4 ว่า

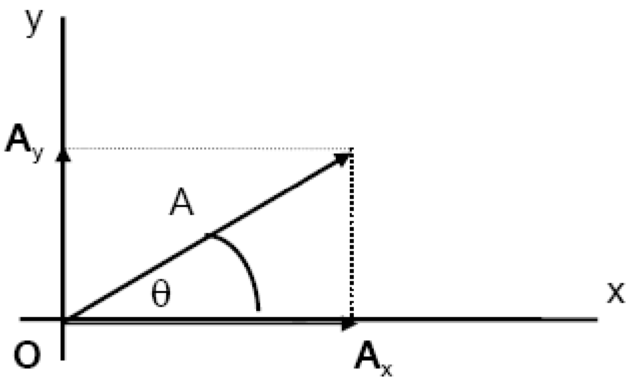
$$Cx = C \cos 37^{o} = (20 \text{ ซม.})(0.80) = 16 \text{ ซม.}$$

$$Cy = C \sin 37^{o} = (20 \text{ ซม.})(0.60) = 12 \text{ ซม.}$$



ภาพประกอบ 2.12 เวกเตอร์ เวกเตอร์ **C** ทำมุม θ กับแกน x ในลักษณะต่าง ๆ

ที่มา : อุกฤษฎ์ นาจำปา, (2560)



ภาพประกอบ 2.13 เวกเตอร์ **A**x และ **A**y คือส่วนประกอบทางแกน x และ y ของเวกเตอร์ **A**
ที่มา : ศรีธน วรศักดิ์โยธิน , (2546)

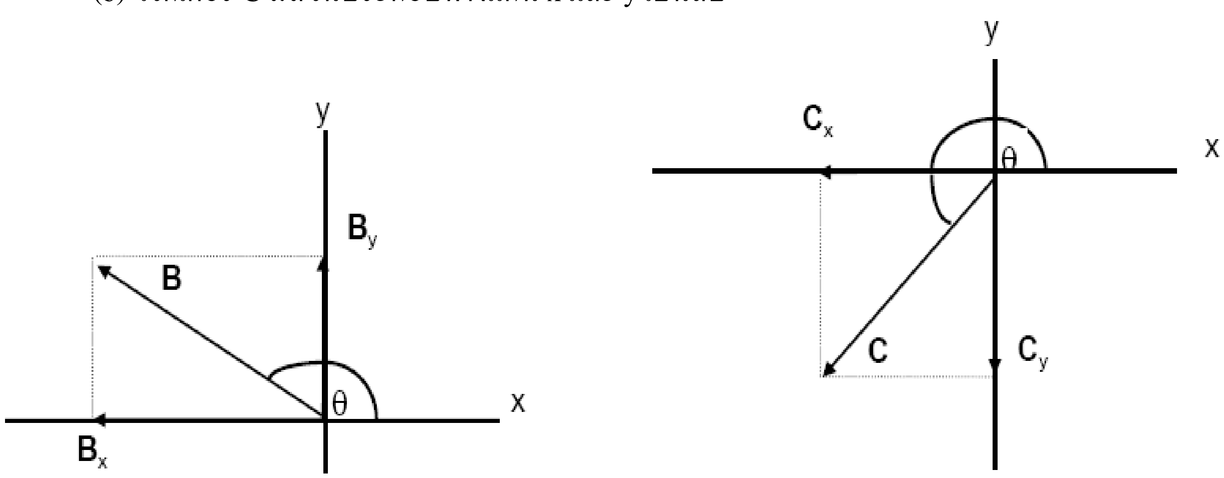
ภาพประกอบ 2.13 เวกเตอร์ **A** แทนด้วยส่วนประกอบของเวกเตอร์ทางแกน x และ y เวกเตอร์ทั้งสองคือ Ax และ Ay ตามลำดับ เขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้ **A** = **A**x + **A**y

สามารถหาส่วนประกอบของเวกเตอร์ **A** จากฟังก์ชันทางตรีโกณ

$$\frac{Ax}{A} = \cos\theta \qquad \text{และ} \qquad \frac{Ay}{A} = \sin\theta$$

$$A = A\cos\theta \qquad \text{และ} \qquad Ay = A\sin\theta \tag{2.5}$$

(a) เวกเตอร์ **B** มีส่วนประกอบทางแกน x เป็นลบ เพราะอยู่ทางด้านซ้ายนับ จากจุดเริ่มต้นไปทางแกน x
(b) เวกเตอร์ **C** มีส่วนประกอบทางแกน x และ y เป็นลบ



ภาพประกอบ 2.14 ส่วนประกอบของเวกเตอร์
ที่มา : ศรีธน วรศักดิ์โยธิน , (2546)

จากสมการ 2.5 ช่วยในการหาส่วนประกอบของเวกเตอร์บนแกน x และ y ในทางกลับกัน ถ้าทราบแต่ Ax และ Ay ก็สามารถคำนวณกลับไปหา A ได้ โดยการใช้ทฤษฎีของพิธากอรัส

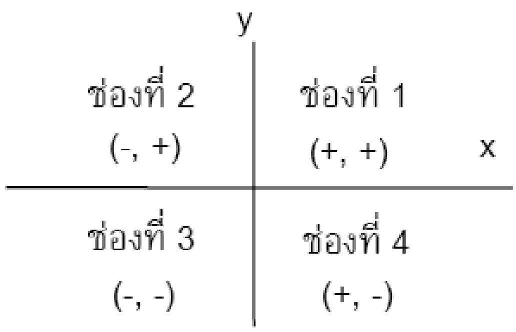
$$A = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2} \tag{2.6}$$

มุมหาได้จาก

xyAAtan= θ และ $\theta = \tan^{-1}$ xyAA (2.7)

มุม θ จากสมการ 2.7 มีปัญหาอยู่เหมือนกัน สมมติว่า Ax = 2 ม. และ Ay = -2 ม. จะได้ $\tan\theta = -1$ มีมุมที่เป็นไปได้อยู่ 2 มุม คือ 135^{o} และ 315^{o} (-45^{o}) แต่คำตอบจะมีได้เพียงมุมเดียวเท่านั้น ให้สังเกต ว่าค่าของ Ax เป็นบวก และ Ay เป็นลบ มุม θ ตกอยู่ที่พิกัดมุมฉาก xy ช่องที่ 4 (ภาพประกอบ 2.15)

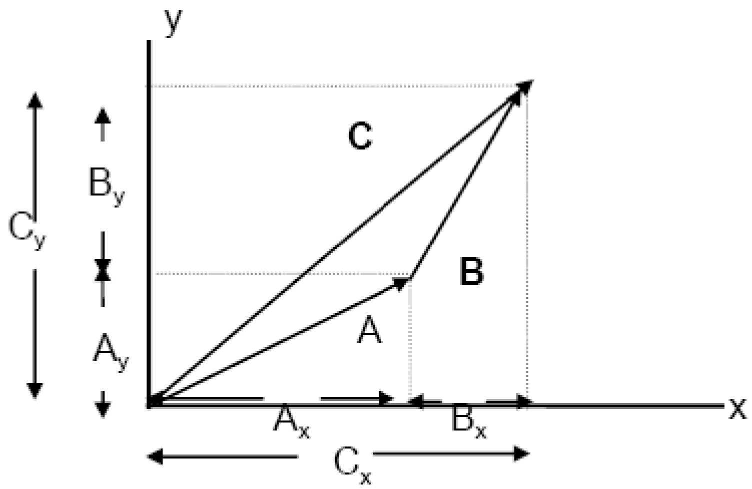
พิกัดมุมฉาก xy มีด้วยกัน 4 ช่อง แต่ละช่องค่า x และ y จะมีค่าเป็นบวก และลบ แตกต่างกัน ยกตัวอย่างช่องที่ 4 ค่า x เป็นบวก ส่วนค่า y เป็นลบ ดังนั้น มุมที่ถูกต้องก็คือ 315^{o} (-45^{o}), -45^{o} มีความหมายว่าวัดตามเข็มนาฬิกาจาก +x ไป 45 องศา ปกติค่ามุมที่เป็นบวกจะวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน +x แต่ถ้าวัดตามเข็มนาฬิกาจะต้องใส่เครื่องหมายลบ



ภาพประกอบ 2.15 พิกัดมุมฉาก
ที่มา : ศรีธน วรศักดิ์โยธิน , (2546)

ถ้า Ax = -2 ม. และ Ay = 2 ม. มุม θ ตกอยู่ที่พิกัดมุมฉาก xy ช่องที่ 2 มุมที่ถูกต้องก็คือ 135^{o} เพราะค่า x เป็นลบ และค่า y เป็นบวก ดังนั้น คุณจะต้องใช้วิธีตรวจสอบพิกัดฉากว่าค่าของมุมตกอยู่

ที่ช่วงใด ในกรณีที่คำตอบมี 2 ค่า คือ Cx และ Cy คือส่วนประกอบของเวกเตอร์ **C** บนแกน x และแกน y



ภาพประกอบ 2.16 ส่วนประกอบของเวกเตอร์ **C**
ที่มา : สมปอง ทองผ่อง, (2543)

จากภาพประกอบ 2.16 Cx และ Cy สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของเวกเตอร์ A และ B บนแกน x และ y ได้ดังนี้

$$Cx = Ax + Bx$$
$$Cy = Ay + By \qquad (2.8)$$

ขนาดและมุมของ **C** หาได้จากสมการ

การบวกเวกเตอร์เพียง 2 อันค่อนข้างง่าย แต่ก็เป็นหลักการสำหรับการบวกเวกเตอร์หลาย เวกเตอร์

ให้ R เป็นผลบวกของ A, B, C, D, E**, ...,** เมื่อ

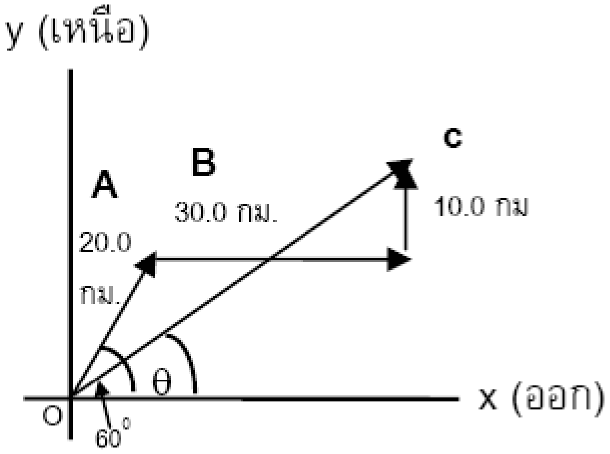
$$Rx = Ax + Bx + Cx + Dx + Ex + ...$$

$$Ry = Ay + By + Cy + Dy + Ey + \qquad (2.9)$$

ตัวอย่างที่ 2.2

เครื่องบินบินไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ ทำมุม 60° เป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร และบินไปทางทิศตะวันออกอีก 30 กิโลเมตร ต่อจากนั้นขึ้นเหนือไปอีก 10 กิโลเมตร เครื่องบินลำนี้อยู่ไกลจากจุดตั้งต้นเท่าใด

หลักการคำนวณ



ภาพประกอบ 2.17 การหาระยะกระจัดของเครื่องบินบิน

ที่มา : สมปอง ทองผ่อง, (2543)

ให้แกน x เป็นทิศตะวันออก และแกน y เป็นทิศเหนือ

A แทน ระยะกระจัดสำหรับการบินเที่ยวแรก

B แทน ระยะกระจัดเที่ยวสอง

C แทน ระยะกระจัดเที่ยวสาม

และ **R** คือเวกเตอร์ลัพธ์ จากแผนภาพวัดค่า R ได้ 50 กิโลเมตร ทำมุม 30° กับทิศตะวันออก เราสามารถตรวจสอบค่านี้ได้จากการคำนวณ

ส่วนประกอบแกน x และ y ของ **A** คือ

$$A_x = (20.0\ \text{กม.})(\cos 60^{\circ})$$
$$= 10\ \text{กม.}$$

$$A_y = (20.0\ \text{กม.})(\sin 60^{\circ})$$
$$= 17.3\ \text{กม.}$$

ตารางที่ 2.1 ส่วนประกอบของ x และ y ของระยะกระจัดต่างๆ

ระยะกระจัด	มุม	ส่วนประกอบแกน x	ส่วนประกอบแกน y
A = 20.0 กม.	60^{o}	10.0 กม.	17.3 กม.
B = 30.0 กม.	0^{o}	30.0 กม.	0
C = 10.0 กม.	90^{o}	0	10.0 กม.
Rx = 40.0 กม.		Ry = 27.3 กม.	

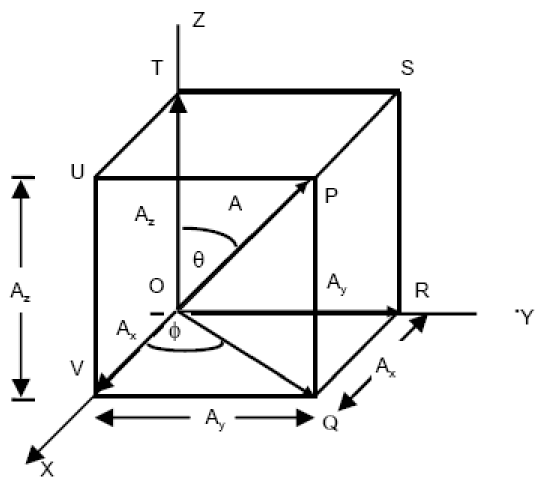
$$R = \sqrt{(40.0\text{km})^2 + (27.3\text{km})^2}$$

$$R = 48.4 \text{ km}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{27.3}{40.0} km$$

$$= 34.3^{O}$$

ค่าที่คำนวณได้ละเอียดกว่าที่วัดได้จากแผนภาพ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับความละเอียดของมาตราส่วน และไม้บรรทัดที่ใช้วัด ที่เขียนมาเวกเตอร์วางอยู่บนระนาบ xy เท่านั้น แต่เวกเตอร์ในทางปฏิบัติมีทิศได้ทุกทิศทุกทาง นั่นก็คือต้องมีทั้งด้านกว้าง ยาว และสูง แทนด้วย x, y และ z ส่วนประกอบของเวกเตอร์บนแกนทั้งสาม สามารถเขียนได้ดังนี้ Ax , Ay และ Az ตามลำดับ



ภาพประกอบ 2.18 Ax , **A**y และ **A**z เป็นเวกเตอร์ย่อยของ **A** ตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ

ที่มา : สมปอง ทองผ่อง, (2543)

ดังนั้น $\mathbf{A} = \mathbf{A}x + \mathbf{A}y + \mathbf{A}z$

ถ้า **A** ทำมุม θ กับแกน z

OQ เป็นเวกเตอร์ที่ได้จากการฉาย A ลงบนระนาบ xy ทำมุม ϕ กับแกน x

ดังนั้น

$$Ax = A \sin\theta \cos\phi$$

$$Ay = A \sin\theta \sin\phi$$

$$Az = A \cos\theta$$

$$A = Ax + Ay + Az$$

โดยที่

$$A = AAA2z2y2x++ \text{ ....} \quad (2.10)$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือเวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย มีจุดประสงค์เพื่อบอกทิศทาง ในระบบพิกัดฉาก xy นิยามให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย i ชี้ตำแหน่งไปทางบวกของแกน x และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย j ชี้ไปทางบวกของแกน y

ส่วนประกอบบนแกน x และ y ของ A สามารถเขียนอยู่ในรูปของ i, j ได้ดังนี้

$$Ax = Axi \text{ , } Ay = Ayj$$

เช่นเดียวกัน เราสามารถเขียนเวกเตอร์ A ในระบบพิกัดฉาก xy ในรูปของส่วนประกอบและมีตัวชี้ ทิศทางดังนี้

$$A = Axi + Ayj$$

บนแกน x มี Ax**i** เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์ i เป็นตัวชี้บอกทิศทาง และ Ax เป็นขนาด

บนแกน y มี Ay**j** เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์ j เป็นตัวชี้บอกทิศทาง และ Ay เป็นขนาด

เมื่อเวกเตอร์ A และ B แสดงอยู่ในรูปของเวกเตอร์ประกอบบนพิกัด xy เราสามารถรวมเวกเตอร์ทั้งสอง โดยใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยกำกับบนแกนแต่ละแกน ดังนี้

$$A = Axi + Ayj, \quad B = Bxi + Byj$$

$$\begin{aligned} C &= A + B \\ &= (Axi + Ayj) + (Bxi + Byj) \\ &= (Ax + Bx)\, i + (Ay + By)\, j \\ &= Cx\mathbf{i} + Cy\,\mathbf{j} \text{ .... } (1\text{-}13) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าเวกเตอร์ C ก็สามารถแสดงอยู่ในรูปของเวกเตอร์ประกอบบนพิกัดฉาก xy เช่นเดียวกับ A และ B ดังภาพประกอบ

สำหรับเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ คือมีแกน x, y และ z เราจะนิยามเวกเตอร์ หนึ่งหน่วย k ชี้ไปทางบวกของแกน z เพิ่มขึ้นมา ดังนั้น รูปทั่วไปของเวกเตอร์ A, B และ C สามารถเขียนอยู่ในระบบสามมิติได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} A &= Axi + Ayj + Azk \\ B &= Bxi + Byj + Bzk \end{aligned}\right\}$$

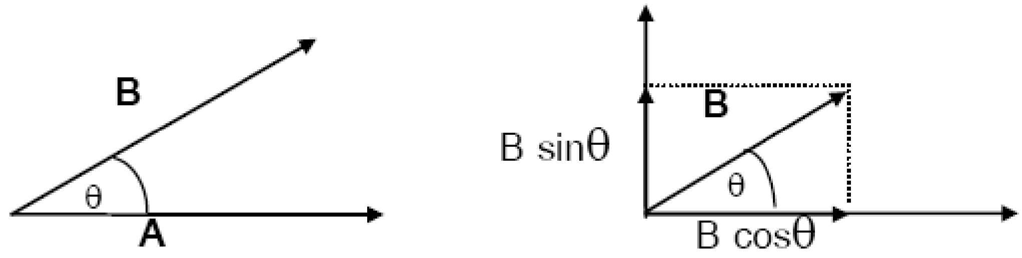
$$\begin{aligned} C &= (Ax + Bx)i + (Ay + By)\, j + (Az + Bz)\, k \\ &= Cxi + Cyj + Cz\, k \qquad (2.11) \end{aligned}$$

ผลคูณของเวกเตอร์

เวกเตอร์ไม่ใช่เลขจำนวน เพราะประกอบด้วยขนาดและทิศทาง การคูณกันแบบเลขจำนวนไม่สามารถนำมาใช้กับเวกเตอร์ได้ อันที่จริงเราก็ได้พิสูจน์แล้วว่า การบวกลบเวกเตอร์ก็ไม่เหมือนกับการบวกลบเลขจำนวนธรรมดา การคูณเวกเตอร์มีด้วยกัน 2 แบบ แบบแรกได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณ สเกลาร์ ขณะที่แบบที่สองได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์

3.1 การคูณแบบที่หนึ่ง ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์

จากภาพประกอบ(a) เวกเตอร์ A และ B มีจุดตั้งต้นเดียวกันคูณด้วยวิธีการดอตกัน และ (b) B cos θ เป็นส่วนประกอบของ B ในทิศของ A และ A•B ก็คือผลการคูณขนาดของ B บนแกน A กับ A



ภาพประกอบ 2.19 (a) วิธีการคูณเวกเตอร์ดอตกัน

(b) ผลการคูณขนาดของ **B**

ที่มา : สมปอง ทองผ่อง, (2543)

เวกเตอร์ A และ B มีจุดตั้งต้นเดียวกัน มุมระหว่างเวกเตอร์เท่ากับ θ แสดงดังภาพประกอบ 1-19 (a) นิยามผลของเวกเตอร์ A คูณ B ดังนี้

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AB\cos\theta = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta \qquad (2.12)$$

ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ มีแต่ขนาดเท่านั้น การคูณแบบแรกนี้มีชื่อเฉพาะเรียกว่า **การดอตเวกเตอร์** ผลอาจจะเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับมุม θ ถ้า θ อยู่ระหว่าง 0 ถึง 90^{o} ผลการดอตจะมีค่าเป็นบวก แต่ถ้า θ อยู่ระหว่าง 90^{o} ถึง 180^{o} ผลจะได้เป็นลบ แต่ที่มุม $\theta = 90^{o}$ $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 0$ สามารถสรุปได้ว่า ผลการดอตของเวกเตอร์ทั้งสองมีค่าเป็นศูนย์เสมอ ถ้าเวกเตอร์ทั้งสองตั้งฉากกัน การดอตเวกเตอร์ไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงลำดับก่อนหลัง ดังนี้

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{A} \qquad (2.12)$$

จากสมการ (2.15) การดอตเวกเตอร์ คือการคูณขนาดของ $|A|$ และ $|B|\cos\theta$ จากภาพประกอบ (b) B cos θ คือส่วนประกอบของเวกเตอร์ B บนแกน A ดังนั้นสรุปได้ว่า A ดอต B คือ ผลคูณของ$|B|$ กับ $|A|$ บนแกนของ A นั่นเอง

เพื่อให้เห็นการดอตชัดเจน ก็ควรจะแยกองค์ประกอบเวกเตอร์ให้อยู่ในระบบพิกัด 3 มิติ โดยมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยกำกับทิศทาง

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = (Ax\mathbf{i} + Ay\mathbf{j} + Az\mathbf{k}) \bullet (Bx\mathbf{i} + By\mathbf{j} + Bz\mathbf{k}) \qquad (2.13)$$

การดอตระหว่างวงเล็บใช้วิธีการคูณแบบธรรมดา วงเล็บแรกมี 3 เทอม วงเล็บหลังมี 3 เทอม ดอตกันจะได้ 9 เทอม ดังนี้

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = (&Ax\mathbf{i} \bullet Bx\mathbf{i} + Ax\mathbf{i} \bullet By\mathbf{j} + Ax\mathbf{i} \bullet Bz\mathbf{k}\\ &+ Ay\mathbf{j} \bullet Bx\mathbf{i} + Ay\mathbf{j} \bullet By\,\mathbf{j} + Ay\mathbf{j} \bullet Bz\mathbf{k}\\ &+ Az\mathbf{k} \bullet Bx\mathbf{i} + Az\mathbf{k} \bullet By\mathbf{j} + Az\mathbf{k} \bullet Bz\mathbf{k})\end{aligned} \tag{2.14}$$

การดอตกันของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จะสังเกตเห็นว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่ดอตกันไม่ตั้งฉากก็ขนานกันอย่างใดอย่างหนึ่ง ยกตัวอย่าง $Ax\mathbf{i} \bullet Bx\mathbf{i}$ เวกเตอร์ทั้ง 2 ขนานกัน อยู่บนแกน x เหมือนกัน มุมระหว่างเวกเตอร์เป็นศูนย์ $\cos\theta$ มีค่าเป็นหนึ่ง ผลลัพธ์การดอตกันคือ AxBx เทอมถัดไป $Ax\mathbf{i} \bullet By\mathbf{j}$ เวกเตอร์ทั้ง 2 ตั้งฉากกัน เพราะ Ax อยู่บนแกน x และ By อยู่บนแกน y ค่า $\cos\theta$ มีค่าเป็นศูนย์ ผลลัพธ์การดอตเป็นศูนย์ สมการ (1-17) มี 6 ใน 9 เทอมที่ผลการดอตเป็นศูนย์ มี 3 เทอมเท่านั้นที่ไม่ เป็นศูนย์ ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AxBx + AyBy + AzBz \tag{2.15}$$

ตัวอย่างที่ 2.3

จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ทั้ง 2 ดังนี้

$$A = 2i + 3j + 4k \quad B = i - 2j + 3k$$

หลักการคำนวณ

จากสมการ (1-14) เรามี

$Ax = 2$ $Bx = 1$

$Ay = 3$ $By = -2$

$Az = 4$ $Bz = 3$

จากสมการ (1-15) และ (1-18) จะได้

$$A\bullet B = |A|\,|B| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{A_X B_X + A_Y B_Y + A_Z B_Z}{|A||B|}$$

$$A_X B_X + A_Y B_Y + A_Z B_Z = (2)()+(3)(-2)+(4)(3) = 8$$

$$|A| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

$$|B| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{8}{\sqrt{29}\sqrt{14}} = 0.397$$

จะได้ $\theta = 66.6^{\circ}$

การดอตเวกเตอร์มีความสำคัญมากในบทที่จะศึกษาต่อไป โดยเฉพาะกับเรื่องของงานและพลังงาน เมื่อแรงคงที่ **F** กระทำต่อวัตถุ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไประยะทาง d นิยามของงานจะเป็นดังนี้

$$W = F \bullet d \tag{2.16}$$

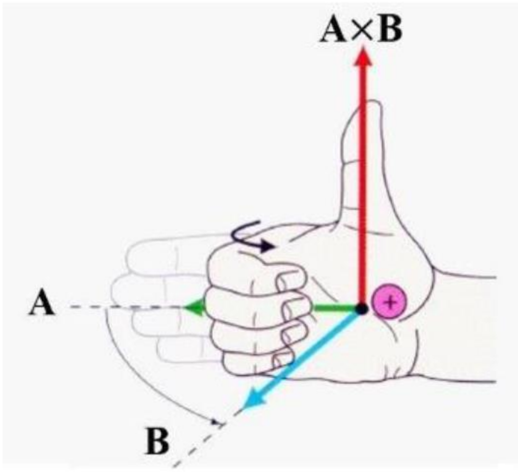
3.2 การคูณแบบที่สองผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์

เวกเตอร์ **A** และ **B** มีจุดตั้งต้นเดียวกัน ดังภาพประกอบ 1-20 มุมระหว่างเวกเตอร์เท่ากับ θ เวกเตอร์ ทั้งสองตั้งอยู่บนระนาบเดียวกัน ผลลัพธ์การคูณของเวกเตอร์ทั้งสองจะตั้งฉากกับระนาบนี้ และขนาด จะมีค่าเท่ากับ AB sin θ เนื่องจากผลที่ออกมาเป็นเวกเตอร์ การคูณแบบนี้มีชื่อเฉพาะเรียกว่า **การครอส เวกเตอร์**

ให้ **C** เป็นผลลัพธ์ของการครอสเวกเตอร์ $\quad \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$

ขนาดของ **C** หาได้จาก $\quad |\mathbf{C}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta$

ถ้า θ ทำมุม 0 หรือ 180° คือเวกเตอร์ทั้งสองขนานหรือตรงกันข้ามกัน ผลของการครอสจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น สามารถ**สรุปได้ว่า**เวกเตอร์ทิศเดียวกันครอสกันเป็นศูนย์เสมอ จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบนี้ ทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์อธิบายด้วยกฎมือขวา



ภาพประกอบ 2.20 ผลลัพธ์ของเวกเตอร์ A×B
ที่มา : สุทธิพงษ์ อันทรบุตร, (2561)

ทิศทางการครอสเวกเตอร์ได้จากกฎของมือขวา จากภาพประกอบ 2.20 ให้กำมือขวาหัวนิ้วโป้งชี้ขึ้น ตั้งฉากกับระนาบการครอส หมุนมือขวาทวนเข็มนาฬิกา จาก A ไปยัง B หรือจะใช้สกรู ก็ให้หัวสกรูวางลงบนระนาบการครอสและหมุนจาก A ไปยัง B เราจะได้ทิศทางตามหัวนิ้วโป้ง หรือสกรู ซึ่งเป็นผลจากการ ครอสเวกเตอร์ A×B

การหาผลลัพธ์ ด้วยวิธีครอสเวกเตอร์ B×A ให้กำมือขวาหัวนิ้วโป้งชี้ลงตั้งฉาก กับระนาบการครอส หมุนมือขวาตามเข็มจาก B ไป A หรือจะใช้สกรู ให้หัวสกรูวางลงบนระนาบการครอสและหมุนจาก B ไป A ตอนนี้จะเห็นว่าทิศทางจะตรงกันข้ามกับตอนแรก ถ้า A×B มีทิศขึ้น B×A ก็จะมีทิศลง ดังนั้น การครอสกันต้องคำนึงถึงลำดับการครอสด้วย ภาษาอังกฤษเรียก การคูณ โดยไม่ต้องคำนึงถึงลำดับก่อนหลังว่า กฎการสลับที่ (Commutative) การบวกลบและดอตเวกเตอร์คุณสมบัติ commutative ยกเว้นการครอสเวกเตอร์ A และ B

$$A \times B = -B \times A \tag{2.17}$$

เพื่อให้การครอสชัดเจน ก็ควรจะแยกองค์ประกอบเวกเตอร์ให้อยู่ในระบบพิกัด 3 มิติ โดยมี เวกเตอร์ 1 หน่วยกำกับทิศทาง

$$A \times B = (Axi + Ayj + Azk) \times (Bxi + Byj + Bzk)$$

การครอสระหว่างวงเล็บใช้วิธีการคูณข้ามวงเล็บ วงเล็บแรกมี 3 เทอม วงเล็บหลังมี 3 เทอม ครอสกันจะได้ 9 เทอม ดังนี้

$$A\times B = (Axi \times Bxi + Axi \times Byj + Axi \times Bzk + Ayj \times Bxi + Ayj \times Byj + Ayj \times Bzk + Azk \times Bxi + Azk \times Byj + Azk \times Bzk) \quad (2.18)$$

ถ้าให้ C = A×B ส่วนประกอบของเวกเตอร์ C บนระบบพิกัด x, y และ z คือ

$$Cx = AyBz - AzBy$$

$$Cy = AzBx - AxBz$$

$$Cz = AxBy - AyBx$$

ตัวอย่างที่ 2.4

เวกเตอร์ A มีขนาด 6 หน่วย ทิศ + x เวกเตอร์ B มีขนาด 4 หน่วย อยู่บนระนาบ xy ทำมุม 30^{o} กับแกน + x และทำมุม 60^{o} กับแกน +y จงหาผลลัพธ์ของ A × B

หลักการคำนวณ ขนาดของการครอสเวกเตอร์ คือ

$$|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta = (6)(4) \sin 30^{o} = 12$$

จากกฎของมือขวา ผลลัพธ์ของ **A×B** จะอยู่ในทิศ +z

เราสามารถเขียนส่วนประกอบของ **A** และ **B** บนแกน x, y และ z

$Ax = 6$, $Ay = 0$, $Az = 0$

$Bx = 4 \cos 30^{o} = 23$ $By = 4 \cos 60^{o} = 2$, $Bz = 0$

ให้ C = A×B ส่วนประกอบของเวกเตอร์ C บนพิกัด x, y และ z คือ

$$Cx = (0)(0) - (0)(2) = 0$$

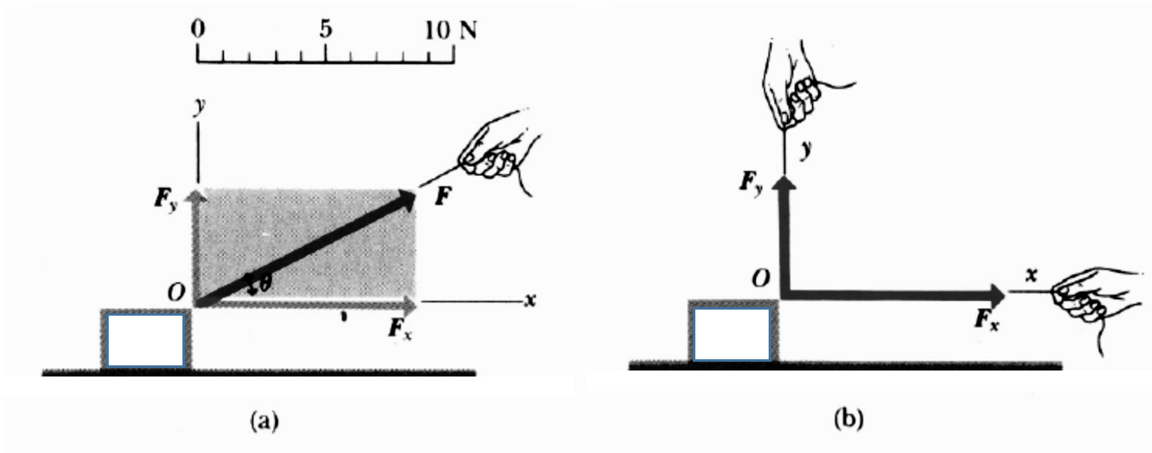
$$Cy = (0)(23) - (6)(0) = 0$$

$$Cz = (6)(2) - (0)(23) = 12$$

$$C = 12\,k$$

เวกเตอร์ C จะมีทิศอยู่ในแกน +z ส่วนขนาดจะเท่ากับ 2z2y2xCCC++ = 12 หน่วย

แรงดึง F ทำมุม θ กับแกน x สามารถแตกแรงออกเป็นแรงย่อย 2 แรง ในแนวแกน x และในแนวแกน y



ภาพประกอบ 2.21 แรงย่อย 2 แรงในแนวแกน x และในแนวแกน y
ที่มา : สมปอง ทองผ่อง, (2543)

ออกแรง F กระทำกับกล่องที่จุด O ในระบบพิกัดฉาก xy ดังภาพประกอบ 3-4 (a) แรง F สามารถแตกออกเป็นแรงย่อย 2 แรง แรงในแนวแกน x คือ F_x และแรงในแนวแกน y คือ F_y ที่จุด O จึงเสมือนกับมีแรง 2 แรงนี้มากระทำ

กำหนดให้ $F = 10.0\ N$, $\theta = 30^{o}$

$$F_x = F\cos\theta \quad = (10.0\ N)(0.866) \quad = 8.66\ N$$

$$F_y = F\sin\theta \quad = (10.0\ N)(0.500) \quad = 5.00\ N$$

นั่นคือแรง F 10 N สามารถแตกออกเป็นแรงย่อย 2 แรง คือแรงในแนวแกน x = 8.66 N และแรงใน แนวแกน y = 5.00 N

ตัวอย่างที่ 2.5

มีแรงสองแรง คือ $\vec{F}_1 = -(2.4)i + (6.1)j$ นิวตัน และ$\vec{F}_1 = (8.5)i - (9.7)j$ นิวตัน กระทำบนวัตถุหนึ่ง

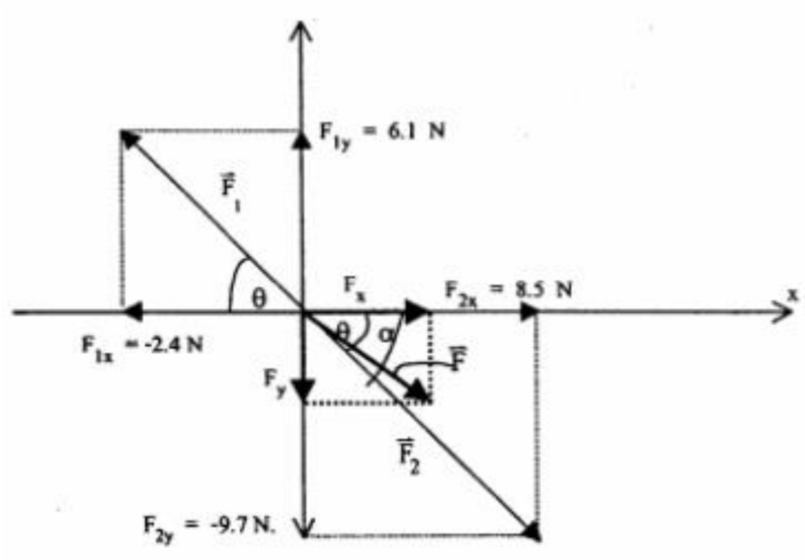
ก. จงหาขนาดของแรงทั้งสอง

ข. จงหามุมที่แรงแต่ละแรงกระทำบนแกน x

ค. จงหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ที่กระทำบนวัตถุ

หลักการคำนวณ

จากโจทย์สามารถเขียนภาพแสดงทิศทางของแรงได้ดังนี้



ภาพประกอบ 2.22 ทิศทางของแรง 2 แรง เพื่อหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์

ที่มา : สมปอง ทองผ่อง, (2543)

ก. ขนาดของแรงทั้งสอง คือ

$$F_1^2 = F_{1X}^2 + F_{1Y}^2 = (-2.4)^2 + (7.21)^2$$

$$F_1^2 = 5.76 + 7.21 = 42.97$$

$$F_1 = 6.56 \text{ นิวตัน}$$

$$F_2^2 = F_{2X}^2 + F_{2Y}^2 = (8.5)^2 + (-9.7)^2$$

$$F_2^2 = 72.25 + 94.09 = 166.34$$

$$F_2 = 12.09 \text{ นิวตัน}$$

ข. หามุมที่ F_1 ทำกับแกน $+x$ โดย

$$\tan\theta_1 = \frac{F_{1y}}{F_{1x}} = -\frac{6.1}{2.4} = -2.54$$

$$\theta_1 = 68.5 \text{ องศา}$$

ดังนั้น F_1 ทำกับแกน $+x = 180 - 68.5$ องศา $= 111.5$ องศา

หามุมที่ F_2 ทำกับแกน $+x$ โดย

$$\tan\theta_2 = \frac{F_{2y}}{F_{2x}} = -\frac{9.7}{8.5} = -1.14$$

$$\theta_2 = -48.7 \text{ องศา}$$

ดังนั้น F_2 ทำกับแกน $+x = 180 - 48.7$ องศา $= 311.3$ องศา

ค. หาแรงลัพธ์ของ F_1 กับ F_2 โดยหาแรงย่อยตามแนวแกน X และ Y ดังนี้

$$F_x = F_{2x} - F_{1x} = 8.5 - 2.4 = 6.1 \text{ นิวตัน}$$

$$F_y = F_{1y} - F_{2y} = 6.1 - 9.7 = -3.6 \text{ นิวตัน}$$

ดังนั้น ขนาดของแรงลัพธ์ คือ

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 = (6.1)^2 + (3.6)^2$$

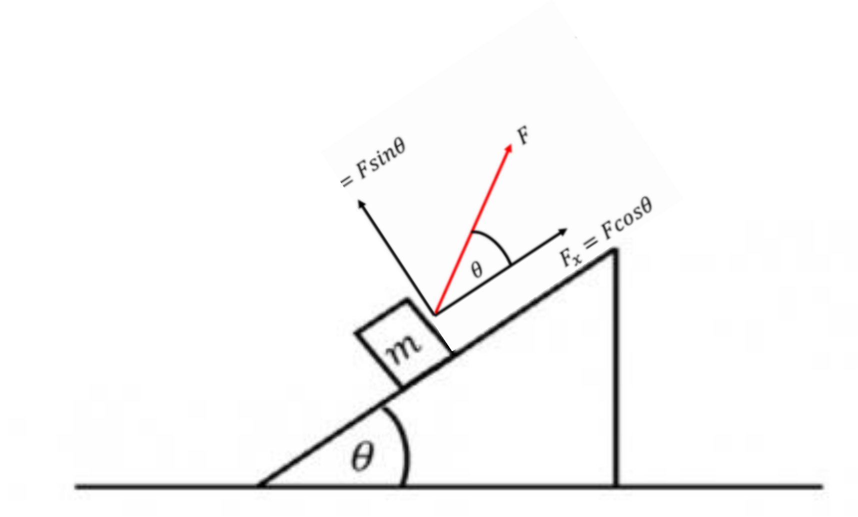
$$F^2 = 37.21 + 12.96 = 50.17$$

$$F = 7.08 \text{ นิวตัน}$$

หามุมที่แรงลัพธ์ ทำกับแกน $+x$ คือ $\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-3.6}{6.1} = -0.59$

$\alpha = -30.55$ องศา หรือแรงลัพธ์ F ทำมุมกับแกน $+x = 360 - 30.55 = 329.45$ องศา

การกำหนดระบบพิกัดฉาก xy ไม่จำเป็นว่าจะต้องอยู่ในแนวระดับและแนวดิ่งเท่านั้น เมื่อออกแรงดึงกล่องขึ้นบนพื้นเอียง ด้วยแรง 2 แรงคือ F_x และ F_y ซึ่งแกน x และ y จะมีทิศทางขนานและตั้งฉากกับพื้นเอียง



ภาพประกอบ 2.23 F_x และ F_y คือส่วนประกอบย่อยของแรง F ตามแนวแกน x และ y

ที่มา : อุกฤษฎ์ นาจำปา, (2560)

การรวมแรงหลายแรงเพื่อจะหาแรงลัพธ์เพียงแรงเดียว นิยมใช้สัญลักษณ์ $\sum$ (ซิกมา) แทนเพื่อรวมผลบวกที่มีแรงหลาย ๆ ค่า เช่น แรง F_1, F_2, F_3 ..... กระทำพร้อม ๆ กันที่จุดเดียวกัน

ดังนั้น แรงลัพธ์คือ

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + ... = \sum F$$

ถ้าแยกแรงออกเป็นส่วนประกอบย่อยบนแกน x และ y จะได้ว่า

$$R_x = \sum F_x \,,\; R_y = \sum F_y$$

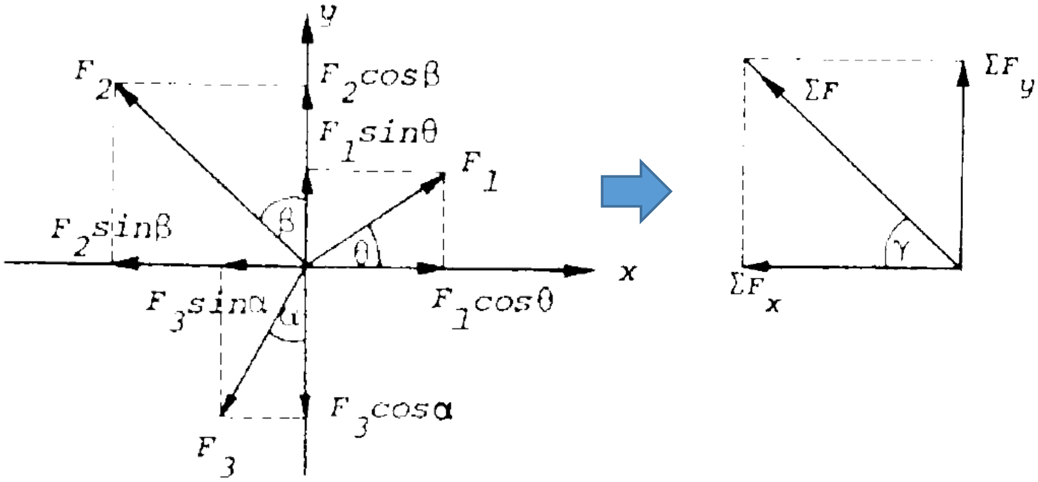
ขนาดของ R หาได้จาก

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

มุมของ R เทียบกับแกน x แทนด้วย $\propto$ หาได้จาก

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x}$$

R_y และ R_x อาจจะมีค่าเป็นบวกหรือลบ ขึ้นอยู่กับทิศทางของแรงที่กระทำซึ่งจะทำให้ทราบว่า มุม $\propto$ อยู่ในพิกัดฉาก ส่วนประกอบย่อยของ R ตามแกน x, $R_x = \sum F_x$ และแกน y , $R_y = \sum F_y$



ภาพประกอบ 2.24 เวกเตอร์ลัพธ์ R คือแรงรวมของเวกเตอร์ F_1, F_2 และ F_3

ที่มา : อุกฤษฏ์ นาจำปา, (2560)

ตัวอย่างที่ 2.6

แรง F_1, F_2, F_3 อยู่บนระนาบเดียวกัน กระทำร่วมกันบนจุด O ให้ F_1 = 120 N, F_2 = 200 N, F_3 = 150 N $\theta = 60^o$ และ $\phi = 45^o$ จงคำนวณหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ R

หลักการคำนวณ

แรง	มุม	ส่วนประกอบแกน x	ส่วนประกอบแกน y
$F_1 = 120$ $F_2 = 200$ $F_3 = 150$	0 60^o 45^o	+ 120 N + 100 N - 106 N	0 + 173 N - 106 N

$$R_x = \sum F_x = +114\text{ N} \quad ; R_y = \sum F_y = +67\text{ N}$$

$$R = \sqrt{(114N)^2 + (67N)^2} = 132\text{ N}$$

$$\propto = \tan^{-1}\frac{67N}{114N} = \tan^{-1} 0.588 = 30.4^o$$

ขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ R คือ 132 N ในทิศ 30.4^o ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 2.7

เชือกสามเส้นผูกติดกันที่ปลายด้านหนึ่ง ปลายที่เหลือสองเส้นผูกติดกับห่วงบนเพดาน ซึ่งอยู่ในแนวระดับ ส่วนปลายอีกข้างหนึ่งที่เหลือผูกติดกับวัตถุ ซึ่งมีน้ำหนัก W ถ้าเชือกที่ผูกติดกับห่วงบนเพดานเอียงทำมุม θ_1 และ θ_2 กับแนวระดับของเพดาน จงคำนวณว่าเชือกแต่ละเส้นแบ่ง รับน้ำหนักของวัตถุเส้นละเท่าใด

หลักการคำนวณ

เมื่อวัตถุอยู่ในสภาพนิ่ง ดังนั้น $\sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i = 0$

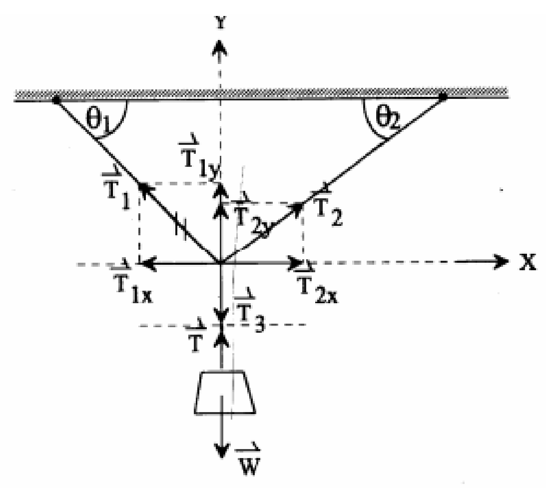
จากภาพคือ $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$

หรือ $-\vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} = 0$

และ $\vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} + \vec{T}_3 = 0$

และ $\mathrm{T} = \mathrm{W} = \mathrm{T}_3$

จากโจทย์สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ภาพประกอบ 2.25 สมดุลของเชือกที่ผูกติดกับเพดาน 2 เส้นและผูกกับน้ำหนัก W

ที่มา : ศรีธน วรศักดิ์โยธิน , (2546)

จากสมการ จะได้ $T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2$

และ $T_1\cos\theta_1 + T_2\cos\theta_2 = W$

แทนค่า T_1 จากสมการ จะได้ $T_2 = \frac{W}{\tan\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2}$

ดังนั้น $T_1 = \frac{W}{\sin\theta_1+\tan\theta_2+\cos\theta_1}$

∴ เชือกเส้นที่ 1 รับน้ำหนักเท่ากับ $\frac{W}{\sin\theta_1+\tan\theta_2+\cos\theta_1}$

เชือกเส้นที่ 2 รับน้ำหนักเท่ากับ $\frac{W}{\tan\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2}$

เชือกเส้นที่ 3 รับน้ำหนักเท่ากับ W

สรุปท้ายบท

1. ปริมาณทางฟิสิกส์ มี 2ชนิดคือ1. ปริมาณเวกเตอร์(vector quality) 2. ปริมาณสเกลาร์(scalar quality) **ปริมาณสเกลาร์**หมายถึง ปริมาณที่ระบุขนาดเพียงอย่างเดียว เช่น ความยาว ระยะทาง เวลา ความหนาแน่น อัตราเร็ว มวล อุณหภูมิ **ปริมาณเวกเตอร์**หมายถึง ปริมาณที่ระบุทั้งขนาดและทิศทาง เช่น แรง ความเร็ว ความเร่ง การกระจัด น้ำหนัก

2. ในกรณีที่เวกเตอร์ย่อยอยู่ในแนวเดียวกันทิศทางเดียวกัน เราสามารถนำเวกเตอร์นั้นมารวมกัน หรือบวกกันได้เลย เพราะเวกเตอร์นั้นอยู่ในทิศเดียวกัน แต่ต้องทำการพิจารณาหน่วยต้องอยู่ในหน่วยเดียวกันด้วย

ในกรณีที่เวกเตอร์ย่อยอยู่ในแนวเดียวกันทิศทางตรงกันข้ามกัน เราสามารถนำเวกเตอร์นั้นมารวมกันหรือลบกันได้เลย เพราะเวกเตอร์นั้นอยู่ในทิศทางตรงข้ามกัน แต่ต้องทำการพิจารณาหน่วยต้องอยู่ในหน่วยเดียวกัน

3. เวกเตอร์ทั้ง 2 ทำมุม 0 ต่อกัน สามารถหาเวกเตอร์ลัพธ์โดยวิธีการเขียนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยให้เวกเตอร์ย่อยเป็นด้านของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ประกอบ ณ จุดนั้น จะ ได้เวกเตอร์ลัพธ์มีขนาดและทิศทางตามแนวเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ลากจากจุดที่เวกเตอร์ทั้งสองกระทำต่อกัน หรือคานวณได้จากสูตร $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

4. ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ เท่ากับ $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2}$

5. กฎต่าง ๆ ของผลคูณสเกลาร์

$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ Commutative law

$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$ Associative law

$c(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (c\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(c\vec{B})$

ถ้า $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ แสดงว่า $\vec{A}$ หรือ $\vec{B} = 0$ หรือ ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ไม่เป็นศูนย์ แสดง ว่า $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ B

6. กฎต่าง ๆ ของ Cross product

$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ Anti-commutative law

$\vec{A} \times (\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$ Distributive law

$(\vec{A} \times \vec{B}) = (c\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (c\vec{B}) = (c\vec{A} \times c\vec{B})$

เมื่อ c เป็นจำนวนเต็ม

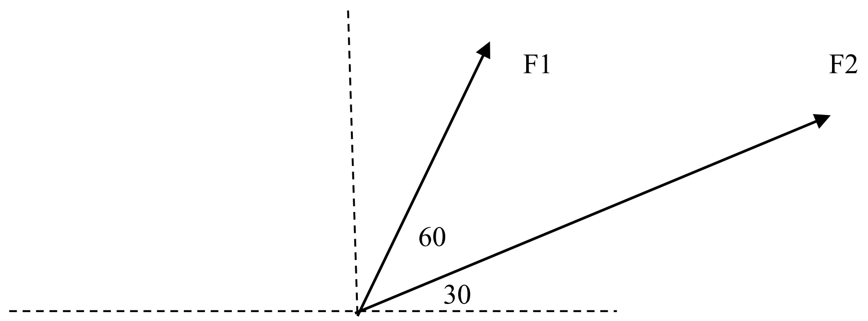
ถ้า $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ แสดงว่า $\vec{A}$ หรือ $\vec{B} = 0$ หรือ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ขนานกัน

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. เวกเตอร์ A และ B มีขนาด 6 และ 8 หน่วย ตามลำดับ จงหาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ของ เมื่อเวกเตอร์ทั้งสอง และ ทำมุมกัน 37 องศา

2. เมื่ออกแรงสองแรงทำมุมกับค่าต่างๆ ผลรวมของแรงมีค่าต่ำสุด 2 นิวตัน และมีค่าสูงสุด 14 นิวตัน ผลรวมของแรงทั้งสองเมื่อกระทำตั้งฉากกันจะมีค่าเท่าใด

3. จงคำนวณหาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ เมื่อ เวกเตอร์มีขนาด10 หน่วย และ 8 หน่วย ทำมุมกัน 135 องศา
4. จงคำนวณหาแรงลัพธ์โดยวิธีการวาดรูป และคำนวณการแตกแรง จากภาพประกอบ

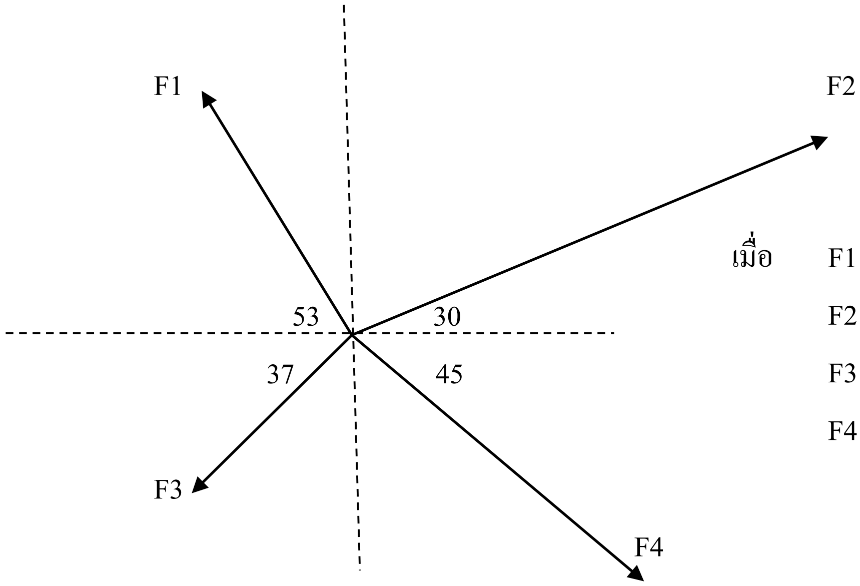


ภาพประกอบ 2.26 การหาแรงลัพธ์โดยวิธีการวาดรูป
ที่มา : อุกฤษฏ์ นาจำปา, (2560)

เมื่อ F1 = 150 N และ F2 = 200 N

5. กำหนด เวกเตอร์ A = 3i + 2j – k และ B 2i + 4j – 5k
   6.1 จงหา 3A●2B
   6.2 จงหา 2A×3B

6. จากภาพประกอบ จงหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์



เมื่อ F1 = 250 N

F2 = 400 N

F3 = 150 N

F4 = 200 N

ภาพประกอบ 2.27 การหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์

ที่มา : อุกฤษฏ์ นาจำปา, (2560)

7. จงแสดงวิธีหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

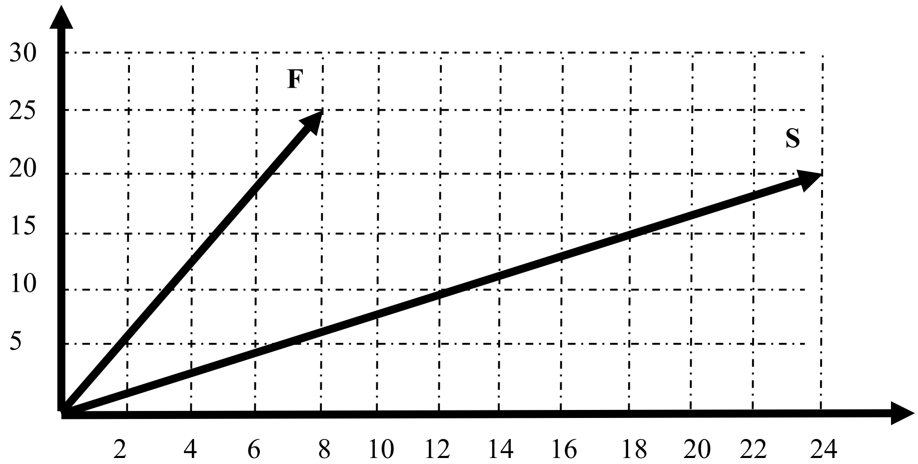
เมื่อกำหนด $\vec{A}$ = 5i + 2j - 3k $\vec{B}$ = k - 3i + 2j $\vec{C}$ = 2j – 2k + 4i

7.1 $2\vec{A} + 3\vec{C} - 3\vec{B}$

7.2 $\left| \vec{C} \times (\vec{B} - \vec{A}) \right|$

8. ม้าออกแรงลากกล่องมวล 600 N ขึ้นเขาด้วยแรง 5,000 N กับแนวพื้นเอียง ถ้าสัมประสิทธ์แรงเสียดทานระหว่าง กล่องกับพื้นเท่ากับ 0.2 และพื้นเอียงทำมุม 60^0 จงเขียนแผนภาพแสดงการแตกแรงที่กระทำต่อกล่องมวล

9. นักกีฬาทุ่มน้ำหนัก ออกแรงทุ่มน้ำหนักมวล 8 kg ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ดังกราฟ จงหางานที่นักกีฬาทำได้ในการทุ่มน้ำหนักครั้งนี้ (W=F●S)



ภาพประกอบ 2.28 การหางานที่นักกีฬาทำได้จากการเคลื่อนที่

ที่มา : อุกฤษฏ์ นาจำปา, (2560)

10. เชือกที่ผูกติดกับ ห่วงบนเพดานเอียงทำมุม θ_1 = 60 องศา และ θ_2 = 37 องศา กับแนวระดับของเพดาน จงคำนวณว่าเชือกแต่ละเส้นแบ่ง รับน้ำหนักของวัตถุเส้นละเท่าใด ดังภาพประกอบ 2.25

เอกสารอ้างอิง

จรัส บุณยธรรมา. (2543). **ฟิสิกส์ระดับมหาวิทยาลัย ภาคกลศาสตร์** .กรุงเทพ ฯ : สุวีริยาสาส์น.
มหาวิทยาลัย , ทบวง. (2543). ฟิสิกส์เล่ม 1 . กรุงเทพ ฯ : ชวนพิมพ์ .

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2538). **ฟิสิกส์ 1**. (พิมพ์ครั้งที่4). กรุงเทพ ฯ : ศูนย์ หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ต่อศักดิ์ โกมาสถิตย์, (2548). **ฟิสิกส์ 1.** มหาสารคาม : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.

บดินทร ชาติสุขบท. (2546). **ฟิสิกส์ 1**. กรุงเทพ ฯ : สกายบุ๊กส์

ปรเมษฐ์ ปัญญาเหล็ก. (2542). **ฟิสิกส์1**. (พิมพ์ครั้งที่4). กรุงเทพ ฯ ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยศรีปทุม.

มนตรี พิรุณเกษตร, (2540). **ฟิสิกส์ 1**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.

สมปอง ทองผ่อง, (2543) **ฟิสิกส์ทั่วไป.** มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

สุทธิพงษ์ อันทรบุตร, (2561) **วิทยาศาสตร์เพื่องานไฟฟ้าและการสื่อสาร.** วิทยาลัยเทคนิคร้อยเอ็ด.

สมพงษ์ ใจดี. (2548). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย 1 (**พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพฯ: สานักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมชูปถัมภ์. (2543). **ฟิสิกส์ เล่ม 1 (**พิมพ์ครั้งที่ 2 ฉบับปรับปรุงแก้ไข). กรุงเทพฯ

ศรีธน วรศักดิ์โยธิน(2546). **ฟิสิกส์1**. สำนักพิมพ์ สกายบุ๊คส์, คณะวิทยาศาสตร์มหาวิทยาลัยขอนแก่น

Alvin Halpern, (2541). **โจทย์ 3000 ข้อ ฟิสิกส์.** แปลและเรียบเรียงโดย ทิพวิมล ทองอ่อน และคณะ กรุงเทพฯ : แมคกรอฮิล.