ไฮเพอร์ไอดีลในกึ่งไฮเพอร์กรุปขั้นแนะนำ
Introduction of Hyperideal in Semihypergroups

สำคัญ ฮ่อบรรทัด[1]

ระบบไฮเพอร์เกิดขึ้นครั้งแรกในปี ค.ศ. 1934 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ F.marty เขาได้สร้างนิยามไฮเพอร์กรุป (hypergroups) ขึ้นจากบทนิยามของกรุป (groups) นักวิจัยหลายคนจากหลายสถาบันทั่วโลกช่วยกันพัฒนาต่อยอดขึ้น จนเกิดรูปแบบของไฮเพอร์มากมาย เช่น ไฮเพอร์ริง (hyperring) กึ่งไฮเพอร์กรุป (semihypergroup) กึ่งไฮเพอร์ริง (semihyperring) กึ่งไฮเพอร์ฟีลด์ (semihyperfields) ไฮเพอร์ฟีลด์ (hyperfields) ไฮเพอร์โมดูล (hypermodules) เป็นต้น นักวิจัยคณิตศาสตร์ได้จัดการประชุมวิชาการระหว่างประเทศเพื่อพัฒนาระบบไฮเพอร์อย่างต่อเนื่อง ล่าสุดจัดขึ้นที่เมือง xanthi ประเทศ Greece ในปี ค.ศ.2014 ทำให้เห็นว่าการประชุมเพื่อวิจัยระบบไฮเพอร์มีการพัฒนาอย่างไม่มีที่สิ้นสุด ชี้ชัดถึงการวิจัยองค์ความรู้ที่สำคัญ วัตถุประสงค์หลักของการค้นหาและเรียนรู้เรื่องระบบของไฮเพอร์เพื่อศึกษาการรูปแบบเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นและเซตที่มีความซับซ้อนยิ่งขึ้นนั่นเอง

กึ่งไฮเพอร์กรุป (semihypergroup)

โดยทั่วไปแล้วผู้ที่ให้ความสนใจทางด้านคณิตศาสตร์บริสุทธิ์จะรู้จักนิยามของการดำเนนการทวิภาคเป็นอย่างดี เนื่องจากเป็นพื้นฐานในการเกิดระบบเชิงพีชคณิตนามธรรม ซึ่งเรียกระบบดังกล่าวว่า กึ่งกรุป หรือกรุป ขึ้นอยู่กับว่าระบบนั้นมีคุณสมบัติอย่างไร เช่นเดียวกันสำหรับระบบพีชคณิตไฮเพอร์ การดำเนินการแบบใหม่ที่เกิดขึ้นได้จากการขยายบทนิยามของการดำเนินการทวิภาค Samkhan Hobanthad และ Wichayaporn Jantanan (2015, 117-121) ได้ให้นิยามการดำเนินการไฮเพอร์ และกึ่งไฮเพอร์กรุป ดังนี้

บทนิยามที่ 1	กำหนดให้ H เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง การดำเนินการไฮเพอร์ (hyper operation) คือ ฟังก์ชัน $\circ : H \times H \rightarrow P^*(H)$ โดยที่ $P^*(H)$ คือ เซตของเซตย่อยทั้งหมดของ H ที่ไม่รวมเซตว่าง

ถ้า A และ B เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ H และ $x \in H$ จะนิยาม

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b,\ x \circ A = \{x\} \circ A \text{ และ } A \circ x = A \circ \{x\}$$

---

[1]อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

บทนิยามที่ 2 กำหนดให้ H เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง กึ่งไฮเพอร์กรุป (semihypergroup) คือระบบ $(H, \circ)$ โดยที่ $\circ$ เป็นการดำเนินการไฮเพอร์ และ $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in H$

จากบทนิยามที่ 1 และบทนิยามที่ 2 หากระบบ $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุป และ $(H, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป จะสังเกตว่าสองระบบนี้ต่างกันที่ตัวดำเนินการ เนื่องการดำเนินการไฮเพอร์ขยายมาจากการดำเนินการทวิภาค จึงสามารถกล่าวได้ว่า กึ่งกรุปใด ๆ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปดังตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $S = \{0, 1\}$ นิยามการดำเนินการ $*$ ดังตาราง

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

จงพิจารณาว่า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปหรือไม่ ถ้าเป็นสามารถมองเป็น กึ่งไฮเพอร์กรุปได้อย่างไร

วิธีทำ จากตารางการดำเนินการเห็นได้ชัดว่า $(S, *)$ มีสมบัติปิด พิจารณา

$$(0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0 = 0 * 0 = 0 * (0 * 0)$$
$$(0 * 0) * 1 = 0 * 1 = 1 = 0 * 1 = 0 * (0 * 1)$$
$$(0 * 1) * 0 = 1 * 0 = 1 = 0 * 1 = 0 * (1 * 0)$$
$$(1 * 0) * 0 = 1 * 0 = 1 = 1 * 0 = 1 * (0 * 0)$$
$$(0 * 1) * 1 = 1 * 1 = 0 = 1 * 1 = 1 * (1 * 0)$$
$$(1 * 0) * 1 = 1 * 1 = 0 = 1 * 1 = 1 * (0 * 1)$$
$$(1 * 1) * 0 = 0 * 0 = 0 = 1 * 1 = 1 * (1 * 0)$$
$$(1 * 1) * 1 = 0 * 1 = 1 = 1 * 0 = 1 * (1 * 1)$$

จึงได้ว่า $(S, *)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
นั่นคือ $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุป
ต่อไปจะสร้างการดำเนินการไฮเพอร์จากการดำเนินการทวิภาค ดังนี้

$\circ$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0\}$

เห็นได้ชัดว่า $\circ : S \times S \to P^*(S)$ พิจารณา

$$(0 \circ 0) \circ 0 = \{0\} \circ 0 = \{0\} = 0 \circ \{0\} = 0 \circ (0 \circ 0)$$
$$(0 \circ 0) \circ 1 = \{0\} \circ 1 = \{1\} = 0 \circ \{1\} = 0 \circ (0 \circ 1)$$
$$(0 \circ 1) \circ 0 = \{1\} \circ 0 = \{1\} = 0 \circ \{1\} = 0 \circ (1 \circ 0)$$
$$(1 \circ 0) \circ 0 = \{1\} \circ 0 = \{1\} = 1 \circ \{0\} = 1 \circ (0 \circ 0)$$
$$(0 \circ 1) \circ 1 = \{1\} \circ 1 = \{0\} = 1 \circ \{1\} = 1 \circ (1 \circ 0)$$
$$(1 \circ 0) \circ 1 = \{1\} \circ 1 = \{0\} = 1 \circ \{1\} = 1 \circ (0 \circ 1)$$
$$(1 \circ 1) \circ 0 = \{0\} \circ 0 = \{0\} = 1 \circ \{1\} = 1 \circ (1 \circ 0)$$
$$(1 \circ 1) \circ 1 = \{0\} \circ 1 = \{1\} = 1 \circ \{0\} = 1 \circ (1 \circ 1)$$

จึงได้ว่า $(S, \circ)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
นั่นคือ $(S, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป

เมื่อพิจารณาตัวอย่างที่ 1 จะพบว่ากึ่งกรุปใด ๆ สามารถมองเป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปได้ ต่อไปจะแนะนำกึ่งไฮเพอร์กรุปย่อย ซึ่ง S. Lekkoksung (2012, 1373-1378) ได้ให้คำจำกัดความดังนิยามบทที่ 3

บทนิยามที่ 3 กำหนดให้ $(H, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป และ A เป็นเซตย่อยของ H โดยที่ A ไม่เป็นเซตว่าง จะกล่าวว่า A เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปย่อย (subsemihypergroup) ของ H ถ้า $A \circ A \subseteq A$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $G = \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ และนิยามการดำเนินการไฮเพอร์ ดังนี้

$\circ$	1	-1	i	$-i$
1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	G	G
-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	G	G
i	G	G	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$
$-i$	G	G	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$

จงพิจารณาว่า $(G, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปหรือไม่ และถ้ากำหนดให้ $A = \{1, -1\}$ แล้ว A เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปย่อยของ G หรือไม่

วิธีทำ จากตารางการดำเนินการจะได้ว่า $\circ : G \times G \to P^*(G)$
จึงสรุปได้ว่า $\circ$ เป็นการดำเนินการไฮเพอร์
พิจารณาคุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่ ดังนี้

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
1	1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	1	i	$\{1,-1\}$	G	G	G
1	1	$-i$	$\{1,-1\}$	G	G	G
1	-1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	i	$\{1,-1\}$	G	G	G
1	-1	$-i$	$\{1,-1\}$	G	G	G
1	i	1	G	G	G	G
1	i	-1	G	G	G	G
1	i	i	G	$\{i,-i\}$	G	G
1	i	$-i$	G	$\{i,-i\}$	G	G
1	$-i$	1	G	G	G	G
1	$-i$	-1	G	G	G	G
1	$-i$	i	G	$\{i,-i\}$	G	G
1	$-i$	$-i$	G	$\{i,-i\}$	G	G
-1	1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	1	i	$\{1,-1\}$	G	G	G
-1	1	$-i$	$\{1,-1\}$	G	G	G
-1	-1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	i	$\{1,-1\}$	G	G	G
-1	-1	$-i$	$\{1,-1\}$	G	G	G
-1	i	1	G	G	G	G
-1	i	-1	G	G	G	G
-1	i	i	G	$\{i,-i\}$	G	G
-1	i	$-i$	G	$\{i,-i\}$	G	G
-1	$-i$	1	G	G	G	G
-1	$-i$	-1	G	G	G	G
-1	$-i$	i	G	$\{i,-i\}$	G	G
-1	$-i$	$-i$	G	$\{i,-i\}$	G	G

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
i	1	1	G	$\{1,-1\}$	G	G
i	1	-1	G	$\{1,-1\}$	G	G
i	1	i	G	G	G	G
i	1	$-i$	G	G	G	G
i	-1	1	G	$\{1,-1\}$	G	G
i	-1	-1	G	$\{1,-1\}$	G	G
i	-1	i	G	G	G	G
i	-1	$-i$	G	G	G	G
i	i	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	i	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	1	1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	1	-1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	1	i	G	G	G	G
$-i$	1	$-i$	G	G	G	G
$-i$	-1	1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	-1	-1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	-1	i	G	G	G	G
$-i$	-1	$-i$	G	G	G	G
$-i$	i	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	i	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$

ดังนั้น $(G, \circ)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
นั่นคือ $(G, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป
พิจารณา $A \circ A = \{1, -1\} \subseteq A$
จากบทนิยามที่ 3 จะได้ว่า A เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปย่อยของ G

ไฮเพอร์ไอดีล (hyperideal)

นอกจากความเป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปย่อยแล้ว ยังมีเซตย่อยบางเซตที่มีลักษณะเป็นไฮเพอร์ไอดีล โดยที่ D. Heidari และ B. Davvaz (2011, 85-86) ได้ให้นิยามไว้ดังนี้

บทนิยามที่ 4 กำหนดให้ $(H, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป และ I เป็นเซตย่อยของ H ซึ่ง I ไม่เป็นเซตว่าง
1. เรียก I ว่าไฮเพอร์ไอดีลซ้าย (left hyperideal) ถ้า $H \circ I \subseteq I$
2. เรียก I ว่าไฮเพอร์ไอดีลขวา (right hyperideal) ถ้า $I \circ H \subseteq I$

เรียก I ว่าไฮเพอร์ไอดีล (hyperideal) ก็ต่อเมื่อ I เป็นทั้งไอดีลซ้ายและไอดีลขวา

จากตัวอย่างที่ 2 จะเห็นว่า $G \circ A = A \circ G = G \not\subseteq A$ จึงกล่าวได้ว่า A ไม่เป็นทั้งไอดีลซ้ายและไอดีลขวาของ G

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $G = \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ และนิยามการดำเนินการไฮเพอร์ ดังนี้

$\circ$	1	-1	i	$-i$
1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	G	G
-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	G	G
i	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$
$-i$	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$

จงพิจารณาว่า $(G, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปหรือไม่ และถ้ากำหนดให้ $I = \{1, -1\}$ แล้ว I เป็นกึ่งไฮเพอร์ไอดีลของ G หรือไม่ อย่างไร

วิธีทำ จากตารางการดำเนินการจะได้ว่า $\circ : G \times G \to P^*(G)$
จึงสรุปได้ว่า $\circ$ เป็นการดำเนินการไฮเพอร์
พิจารณาคุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่ ดังนี้

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
1	1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	1	i	$\{1,-1\}$	G	G	G
1	1	$-i$	$\{1,-1\}$	G	G	G
1	-1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	i	$\{1,-1\}$	G	G	G
1	-1	$-i$	$\{1,-1\}$	G	G	G
1	i	1	G	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	i	-1	G	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	i	i	G	$\{i,-i\}$	G	G
1	i	$-i$	G	$\{i,-i\}$	G	G
1	$-i$	1	G	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	$-i$	-1	G	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	$-i$	i	G	$\{i,-i\}$	G	G
1	$-i$	$-i$	G	$\{i,-i\}$	G	G
-1	1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	1	i	$\{1,-1\}$	G	G	G
-1	1	$-i$	$\{1,-1\}$	G	G	G
-1	-1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	i	$\{1,-1\}$	G	G	G
-1	-1	$-i$	$\{1,-1\}$	G	G	G
-1	i	1	G	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	i	-1	G	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	i	i	G	$\{i,-i\}$	G	G
-1	i	$-i$	G	$\{i,-i\}$	G	G
-1	$-i$	1	G	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	$-i$	-1	G	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	$-i$	i	G	$\{i,-i\}$	G	G
-1	$-i$	$-i$	G	$\{i,-i\}$	G	G

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
i	1	1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	1	-1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	1	i	$\{1\}$	G	G	G
i	1	$-i$	$\{1\}$	G	G	G
i	-1	1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	-1	-1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	-1	i	$\{-1\}$	G	G	G
i	-1	$-i$	$\{-1\}$	G	G	G
i	i	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
i	i	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
i	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	1	1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	1	-1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	1	i	$\{1\}$	G	G	G
$-i$	1	$-i$	$\{1\}$	G	G	G
$-i$	-1	1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	-1	-1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	-1	i	$\{-1\}$	G	G	G
$-i$	-1	$-i$	$\{-1\}$	G	G	G
$-i$	i	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$-i$	i	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
$-i$	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$-i$	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
$-i$	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$

ดังนั้น $(G,\circ)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
นั่นคือ $(G,\circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป
พิจารณา

$$\begin{aligned} G\circ I &= \{1,-1,i,-i\}\circ\{1,-1\} \\ &= 1\circ 1\cup -1\circ 1\cup i\circ 1\cup -i\circ 1\cup 1\circ -1\cup -1\circ -1 \\ &\quad \cup i\circ -1\cup -i\circ -1 \\ &= \{1,-1\}\cup\{1\}\cup\{-1\} \\ &= \{1,-1\}\subseteq I \end{aligned}$$

จากบทนิยามที่ 4 จะได้ว่า I เป็นไฮเพอร์ไอดีลซ้ายของ G
แต่ $I\circ G = G \not\subseteq I$
ดังนั้น I ไม่เป็นไฮเพอร์ไอดีลขวาของ G
นั่นคือ I ไม่เป็นไฮเพอร์ไอดีลของ G

ตัวอย่างที่ 3 เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่า มีเซตย่อยที่เป็นเฉพาะไอดีลซ้ายเท่านั้น ต่อไปจะให้ตัวอย่างของเซตย่อยที่เป็นเฉพาะไอดีลขวาดังตัวอย่างที่ 4

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $G=\{1,-1,i,-i\}\subseteq\mathbb{C}$ และนิยามการดำเนินการไฮเพอร์ ดังนี้

$\circ$	1	-1	i	$-i$
1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	G	G	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	G	G	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$

จงพิจารณาว่า $(G,\circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปหรือไม่ และถ้ากำหนดให้ $I=\{1,-1\}$ แล้ว I เป็นกึ่งไฮเพอร์ไอดีลของ G หรือไม่ อย่างไร

วิธีทำ จากตารางการดำเนินการจะได้ว่า $\circ : G\times G\to P^*(G)$
จึงสรุปได้ว่า $\circ$ เป็นการดำเนินการไฮเพอร์
พิจารณาคุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่ ดังนี้

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
1	1	1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	1	-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	1	i	$\{1, -1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	1	$-i$	$\{1, -1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	-1	1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	-1	-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	-1	i	$\{1, -1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	-1	$-i$	$\{1, -1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	i	1	$\{1\}$	G	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	i	-1	$\{1\}$	G	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	i	i	$\{1\}$	$\{i, -i\}$	G	G
1	i	$-i$	$\{1\}$	$\{i, -i\}$	G	G
1	$-i$	1	$\{1\}$	G	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	$-i$	-1	$\{1\}$	G	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
1	$-i$	i	$\{1\}$	$\{i, -i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
1	$-i$	$-i$	$\{1\}$	$\{i, -i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
-1	1	1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	1	-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	1	i	$\{1, -1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	1	$-i$	$\{1, -1\}$	$\{1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	-1	1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	-1	-1	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	-1	i	$\{1, -1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	-1	$-i$	$\{1, -1\}$	$\{-1\}$	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	i	1	$\{-1\}$	G	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	i	-1	$\{-1\}$	G	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	i	i	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	i	$-i$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	$-i$	1	$\{-1\}$	G	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	$-i$	-1	$\{-1\}$	G	$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
-1	$-i$	i	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	$-i$	$-i$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
i	1	1	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	1	-1	G	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	1	i	G	$\{1\}$	G	G
i	1	$-i$	G	$\{1\}$	G	G
i	-1	1	G	$\{1,-1\}$	G	G
i	-1	-1	G	$\{1,-1\}$	G	G
i	-1	i	G	$\{-1\}$	G	G
i	-1	$-i$	G	$\{-1\}$	G	G
i	i	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	i	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
i	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	1	1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	1	-1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	1	i	G	$\{1\}$	G	G
$-i$	1	$-i$	G	$\{1\}$	G	G
$-i$	-1	1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	-1	-1	G	$\{1,-1\}$	G	G
$-i$	-1	i	G	$\{-1\}$	G	G
$-i$	-1	$-i$	G	$\{-1\}$	G	G
$-i$	i	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	i	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	G	G	G
$-i$	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$

ดังนั้น $(G,\circ)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
นั่นคือ $(G,\circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป
พิจารณา

$$\begin{aligned} I\circ G &= \{1,-1\}\circ\{1,-1,i,-i\} \\ &= 1\circ 1\cup 1\circ -1\cup 1\circ i\cup 1\circ -i\cup -1\circ 1\cup -1\circ -1 \\ &\quad \cup -1\circ i\cup -1\circ -i \\ &= \{1,-1\}\cup\{1\}\cup\{-1\} \\ &= \{1,-1\}\subseteq I \end{aligned}$$

จากบทนิยามที่ 4 จะได้ว่า I เป็นไฮเพอร์ไอดีลขวาของ G
แต่ $G\circ I = G \not\subseteq I$
ดังนั้น I ไม่เป็นไฮเพอร์ไอดีลซ้ายของ G
นั่นคือ I ไม่เป็นไฮเพอร์ไอดีลของ G

ตัวอย่างที่ 4 เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่า มีเซตย่อยที่เป็นเฉพาะไอดีลขวาเท่านั้น ต่อไปจะแสดงการมีอยู่ของเซตย่อยที่เป็นไอดีลดังตัวอย่างที่ 5

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $G=\{1,-1,i,-i\}\subseteq\mathbb{C}$ และนิยามการดำเนินการไฮเพอร์ ดังนี้

$\circ$	1	-1	i	$-i$
1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$

จงพิจารณาว่า $(G,\circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุปหรือไม่ และถ้ากำหนดให้ $I=\{1,-1\}$ แล้ว I เป็นกึ่งไฮเพอร์ไอดีลของ G หรือไม่ อย่างไร

วิธีทำ จากตารางการดำเนินการจะได้ว่า $\circ : G\times G\to P^*(G)$
จึงสรุปได้ว่า $\circ$ เป็นการดำเนินการไฮเพอร์
พิจารณาคุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่ ดังนี้

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
1	1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	1	i	$\{1,-1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	1	$-i$	$\{1,-1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	i	$\{1,-1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	-1	$-i$	$\{1,-1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	i	1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	i	-1	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	i	i	$\{1\}$	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
1	i	$-i$	$\{1\}$	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
1	$-i$	1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	$-i$	-1	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
1	$-i$	i	$\{1\}$	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
1	$-i$	$-i$	$\{1\}$	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
-1	1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	1	i	$\{1,-1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	1	$-i$	$\{1,-1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	-1	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	i	$\{1,-1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	-1	$-i$	$\{1,-1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	i	1	$\{-1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	i	-1	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	i	i	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	i	$-i$	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	$-i$	1	$\{-1\}$	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	$-i$	-1	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
-1	$-i$	i	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
-1	$-i$	$-i$	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
i	1	1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	1	-1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	1	i	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
i	1	$-i$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
i	-1	1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	-1	-1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
i	-1	i	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	-1	$-i$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	i	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
i	i	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
i	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
i	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
i	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	1	1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	1	-1	$\{1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	1	i	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$-i$	1	$-i$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$-i$	-1	1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	-1	-1	$\{-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$-i$	-1	i	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
$-i$	-1	$-i$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
$-i$	i	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$-i$	i	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
$-i$	i	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	i	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	1	$\{i,-i\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$-i$	$-i$	-1	$\{i,-i\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$
$-i$	$-i$	i	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$
$-i$	$-i$	$-i$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$	$\{i,-i\}$

ดังนั้น $(G, \circ)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
นั่นคือ $(G, \circ)$ เป็นกึ่งไฮเพอร์กรุป
พิจารณา

$$\begin{aligned} G \circ I &= \{1, -1, i, -i\} \circ \{1, -1\} \\ &= 1 \circ 1 \cup -1 \circ 1 \cup i \circ 1 \cup -i \circ 1 \cup 1 \circ -1 \cup -1 \circ -1 \\ &\quad \cup i \circ -1 \cup -i \circ -1 \\ &= \{1, -1\} \cup \{1\} \cup \{-1\} \\ &= \{1, -1\} \subseteq I \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} I \circ G &= \{1, -1\} \circ \{1, -1, i, -i\} \\ &= 1 \circ 1 \cup 1 \circ -1 \cup 1 \circ i \cup 1 \circ -i \cup -1 \circ 1 \cup -1 \circ -1 \\ &\quad \cup -1 \circ i \cup -1 \circ -i \\ &= \{1, -1\} \cup \{1\} \cup \{-1\} \\ &= \{1, -1\} \subseteq I \end{aligned}$$

จากบทนิยามที่ 4 จะได้ว่า I เป็นไฮเพอร์ไอดีลของ G

เอกสารอ้างอิง

D. N. Krgović. (1980). **On 0-minimal bi-ideals of semigroups**, Publ. Inst. Math. (Beograd), 135-137.

D. N. Krgović. (1982). **On 0-minimal (0,2)-ideal of semigroups**, Publ. Inst. Math. (Beograd), 103-107.

S. Hobanthad and W. Jantanan. (2015). **On 0-minimal bi-hyperideal of semihypergroups with zero**, NIRC. 1 : 117-121.

W. Jantanan and T. Changphas. (2013). **On 0-minimal (0,2)-bi-ideal in ordered semigroups**, Quasigroups and Related Systems. 21 : 51-58.

D. Heidari and B. Davvaz. (2011). **On ordered hyperstructures**, U.P.B. Sci. Bull. Series A, Vol.73, Iss.2 : 85-96.

F. Marty. (1934). **Sur unigeneralization de la notion de group**, 8th Congress Math. Scandenaves, Stockholm : 45-49.

Samkhan Hobanthad (2015). **On 0-minimal (0,2)-bi-hyperideal of semihypergroups**, Full tex research : 1-28.