ดิสครีส ไฮเปอร์กรุป
Discrete Hypergroup

สำคัญ ฮ่อบรรทัด[1]
ภูษิต สุชาติ[2]

บทนำ (Introduction)

ระบบไฮเปอร์เกิดขึ้นครั้งแรกในปี ค.ศ. 1934 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ F.marty เขาได้สร้างนิยามไฮเปอร์กรุป (hypergroups) ขึ้นจากบทนิยามของกรุป (groups) นักวิจัยหลายคนจากหลายสถาบันทั่วโลกช่วยกันพัฒนาต่อยอดขึ้น จนเกิดรูปแบบของไฮเปอร์มากมาย เช่น ไฮเปอร์ริง (hyperring) กึ่งไฮเปอร์กรุป (semihypergroup) กึ่งไฮเปอร์ริง (semihyperring) กึ่งไฮเปอร์ฟีลด์ (semihyperfields) ไฮเปอร์ฟีลด์ (hyperfields) ไฮเปอร์โมดูล (hypermodules) เป็นต้น นักวิจัยคณิตศาสตร์ได้จัดการประชุมวิชาการระหว่างประเทศเพื่อพัฒนาระบบไฮเปอร์อย่างต่อเนื่อง ในปี ค.ศ. 1978 จัดขึ้นที่เมือง Taormina ประเทศ Italy ปี ค.ศ. 1990 จัดขึ้นที่เมือง xanthi ประเทศ Greece ปี ค.ศ.1993 จัดขึ้นที่เมือง iasi ประเทศ Romania ปี ค.ศ.1996 จัดขึ้นที่เมือง prague ประเทศ Czech republic ปี ค.ศ. 1999 จัดขึ้นที่เมือง Taormina ประเทศ Italy ปี ค.ศ. 2003 จัดขึ้นที่เมือง samotraki ประเทศ Greece และ ในปี ค.ศ. 2005 จัดขึ้นที่เมือง mazandaran ประเทศ Iran ในปีค.ศ. 2008 จัดขึ้นที่เมือง Brno ประเทศ Czech Republic ในปีค.ศ. 2011 จัดขึ้นที่เมือง Cheti - Pescara ประเทศ Italy ล่าสุดจัดขึ้นที่เมือง xanthi ประเทศ Greece ในปีค.ศ.2014 ทำให้เห็นว่าการประชุมเพื่อวิจัยระบบไฮเปอร์มีการพัฒนาอย่างไม่มีที่สิ้นสุด ชี้ชัดถึงการวิจัยองค์ความรู้ที่สำคัญ วัตถุประสงค์หลักของการค้นหาและเรียนรู้เรื่องระบบของไฮเปอร์เพื่อศึกษาการรูปแบบเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นและเซตที่มีความซับซ้อนยิ่งขึ้นนั่นเอง

สำหรับดีสครีตไฮเปอร์กรุปนั้น เป็นไฮเปอร์กรุปชนิดหนึ่งที่มีการดำเนินการเฉพาะ มีงานวิจัยหลายชิ้นที่กล่าวถึงไฮเปอร์กรุปชนิดนี้ ผู้เขียนคิดว่าดีสครีตไฮเปอร์กรุปยังสามารถศึกษาและทำวิจัยเพิ่มเติมได้ จึงหยิบขึ้นมาแนะนำให้นักคณิตศาสตร์หรือผู้สนใจได้รู้จัก แต่จะกล่าวถึงในส่วนสุดท้าย เนื่องจากจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องรู้จักกรุป และไฮเปอร์กรุปก่อน โดยผู้เขียนจะแนะนำกรุป ตามด้วยไฮเปอร์กรุป พร้อมทั้งแสดงตารางเปรียบเทียบความแตกต่าง รวมถึงให้ตัวอย่างที่ง่ายต่อความเข้าใจ และสุดท้ายจึงให้นิยามของดีสครีตไฮเปอร์กรุป พร้อมทั้งตัวอย่างตามลำดับ

---

[1]อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
[2]นักศึกษาปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

ดังที่กล่าวในบทนำไปแล้วว่า ก่อนที่เราจะเรียนรู้ระบบดิสครีตไฮเปอร์กรุปเราต้องมีความรู้พื้นฐานของกรุปและไฮเปอร์กรุปก่อน ดังนี้

บทนิยามที่ 1 กำหนดให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก $*$ ว่าเป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operations) บน A ก็ต่อเมื่อ $*$ เป็นฟังก์ชันจาก $A \times A$ ไปยัง A

จากบทนิยามที่ 1 อาจกล่าวได้ว่า การดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต A เป็นกฎ (rule) ซึ่งกำหนดว่าทุกคู่อันดับ $(a, b) \in A \times A$ ต้องไปเกี่ยวข้องกับสมาชิกของ A ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น เช่น การบวกและการคูณ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$ แต่การหารไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$ ทั้งนี้เพราะว่าถ้า $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ โดยที่ $b = 0$ แล้ว $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{R}$ นอกจากนี้ การลบไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}^+$ ทั้งนี้เพราะว่า ถ้า $(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ โดยที่ $a < b$ แล้วจะได้ว่า $(a - b) \notin \mathbb{Z}^+$

การดำเนินการทวิภาคนับว่ามีความสำคัญกับกรุปมาก เนื่องจากกรุป คือระบบทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยเซต และตัวดำเนินการที่เป็นตัวดำเนินการทวิภาค พร้อมทั้งคุณสมบัติอีก 4 ข้อตามนิยามถัดไป

บทนิยามที่ 2 กำหนดให้ G เป็นเซตไม่ใช่เซตว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G จะเรียก $(G, *)$ ว่ากรุป (group) ก็ต่อเมื่อ

1. $(G, *)$ มีสมบัติปิด : สำหรับทุกๆ $a, b \in G$ จะได้ว่า $a * b \in G$
2. $(G, *)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ : สำหรับทุกๆ $a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$
3. สมบัติการมีเอกลักษณ์ (indentity property) : จะต้องมีสมาชิก $e \in G$ ที่ทำให้ $a*e = a = e*a$ สำหรับทุกๆ $a \in G$ และจะเรียกสมาชิก e นี้ว่า สมาชิกเอกลักษณ์ (indentity element)
4. สมบัติการมีตัวผกผัน (inverse property) : สำหรับแต่ละ $a \in G$ จะมี $b \in G$ ที่ทำให้ $a * b = e = b * a$ และจะเรียกสมาชิก b ว่าสมาชิกผกผัน (inverse element) ของ a

ข้อสังเกต กรุปไม่ใช่เพียงแค่เซต G เท่านั้น แต่กรุปกระกอบไปด้วยเซต G และตัวดำเนินการทวิภาคที่สอดคล้องคุณสมบัติทั้ง 4 ข้อข้างต้น ดังนั้นเมื่อกล่าวถึงกรุปจะต้องพึงระลึกเสมอว่าการดำเนินการทวิภาคที่ใช้นั้นคืออะไร

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $G = \{e, a, b, c\}$ และการดำเนินการทวิภาค$*$ บนเซต G ดังต่อไปนี้

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

หากต้องการพิจารณาว่า $(G, *)$ เป็นกรุปหรือไม่ ต้องพิจารณาคุณสมบัติทั้ง 4 ข้อ ดังนี้

1. $(G, *)$ มีคุณสมบัติปิด
   เพราะจากตารางการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซตของ G จะได้ว่าสำหรับทุก ๆ $x, y \in G, x*y \in G$

2. $(G, *)$ มีคุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่
   โดยการแจงกรณี

x	y	z	$x*y$	$y*z$	$(x*y)*z$	$x*(y*z)$
e	e	e	e	e	e	e
e	e	a	e	a	a	a
e	a	b	a	c	c	c
e	a	c	a	b	b	b
e	b	e	b	b	b	b
e	b	a	b	c	c	c
e	c	b	c	a	a	a
e	c	c	c	e	e	e
a	e	e	a	e	a	a
a	e	a	a	a	e	e
a	a	b	e	c	b	b
a	a	c	e	b	c	c
a	b	e	c	b	c	c
a	b	a	c	c	b	b
a	c	b	b	a	e	e
a	c	c	b	e	a	a
b	e	e	b	e	b	b
b	e	a	b	a	c	c
b	a	b	c	c	a	a
b	a	c	c	b	e	e

x	y	z	$x*y$	$y*z$	$(x*y)*z$	$x*(y*z)$
b	b	e	e	b	e	e
b	b	a	e	c	a	a
b	c	b	a	a	c	c
b	c	c	a	e	b	b
c	e	e	c	e	c	c
c	e	a	c	a	b	b
c	a	b	b	c	e	e
c	a	c	b	b	a	a
c	b	e	a	b	a	a
c	b	a	a	c	e	e
c	c	b	e	a	b	b
c	c	c	e	e	c	c

จากตารางจะได้ว่าสำหรับแต่ละ $x, y, z \in G, (x*y)*z = x*(y*z)$

3. $(G, *)$ มีคุณสมบัติการมีเอกลักษณ์
   เพราะจากตารางการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซตของ G จะมี e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์โดยสำหรับทุก $x \in G, x*e = e*x = x$

4. $(G, *)$ มีคุณสมบัติการมีตัวผกผัน
   เพราะจากตารางการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซตของ G จะได้ว่า $e*e = e$, $a*a = e$, $b*b = e$ และ $c*c = e$ ดังนั้น e, a, b, c เป็นตัวผกผันของ e, a, b, c ตามลำดับ

จากทั้ง 4 ข้อจึงสรุปได้ว่า $(G, *)$ เป็นกรุป

ตัวอย่างที่ 4 ระบบพีชคณิต $(\mathbb{R}, +)$ เป็นกรุป เพราะว่า

1. สมบัติปิด : สำหรับทุกๆ $a, b \in \mathbb{R}$

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ : สำหรับทุกๆ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $(a+b)+c = a+(b+c)$

3. สมบัติการมีเอกลักษณ์ : มีจำนวนจริง 0 ที่ทำให้ $a+0 = a = 0+a$ สำหรับทุกๆ $a \in \mathbb{R}$

4. สมบัติการมีตัวผกผัน : สำหรับแต่ละ $a \in \mathbb{R}$ จะมีจำนวนจริง $-a$ ที่ทำให้ $a+(-a) = 0 = (-a)+a$

เมื่อรู้จักกรุปแล้ว การทำความรู้จักกับไฮเปอร์กรุปก็จะไม่ยาก เนื่องจากไฮเปอร์กรุปขยายแนวความคิดมาจากกรุป

ไฮเปอร์กรุปเป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ที่ประกอบด้วยเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และการดำเนินการไฮเปอร์ (hyper operation) ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติ 4 ข้อ มีลักษณะคล้ายคลึงกับ 4 ข้อในกรุปแต่ต่างกันที่ตัวดำเนินการจึงทำให้คุณสมบัติแต่ละข้อแตกต่างกันไปด้วย

บทนิยามที่ 5 ให้ A เป็นเซตใดๆที่ไม่ว่าง เพาเวอร์ของเซต A คือเซตที่มีสมาชิกเป็นสับเซตทั้งหมดของ A เขียนแทนด้วย $P(A)$ และกำหนดให้ $P^*(A) = P(A) - \{\emptyset\}$ นั่นคือ เซตของเพาเวอร์เซต A ที่ไม่รวมเซตว่าง

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $A = \{a, b, c\}$

สับเซตทั้งหมดของ A คือ $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

ดังนั้น $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

นั่นคือ $P^*(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

เช่นเดียวกับกรุปที่ต้องพูดถึงตัวดำเนินการก่อน ไฮเปอร์กรุปก็เช่นเดียวกัน จะพิจารณาตัวดำเนินการก่อน ซึ่งตัวดำเนินการในไฮเปอร์กรุปจะเรียกว่าตัวดำเนินการไฮเปอร์ ดังนิยามข้างล่างนี้

บทนิยามที่ 7 กำหนดให้ H เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก $\circ$ ว่าเป็นการดำเนินการไฮเปอร์ (hyper operations) บน H ก็ต่อเมื่อ $\circ$ เป็นฟังก์ชันจาก $H \times H$ ไปยัง $P^*(H)$

จากบทนิยามที่ 7 จะพบว่าการดำเนินการไฮเปอร์นั้นครอบคลุมการดำเนินการทวิภาค เมื่อเรามองผลการดำเนินการเป็นสับเซตที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว

บทนิยามที่ 8 กำหนดให้ H เป็นเซตที่ไม่ว่างและ $\circ$ เป็นการดำเนินการไฮเปอร์ จะกล่าวว่าระบบ $(H, \circ)$ คือ ไฮเปอร์กรุปพอยด์ (hypergroupoid) ถ้า A และ B เป็นสับเซตที่ไม่ใช่เซตว่างของ H และ $x \in H$ แล้ว $A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b; x \circ A = \{x\} \circ A$ และ $A \circ x = A \circ \{x\}$

จากบทนิยามที่ 8 จะเห็นจุดเริ่มต้นที่แตกต่างระหว่างตัวดำเนินการ แต่เซตยังคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้น ระบบพีชคณิตแบบไฮเปอร์ไม่ว่าการขยายทฤษฎีอะไรจะมองที่ตัวดำเนินการก่อน สำหรับบทนิยามถัดไปจะเป็นบทนิยามของไฮเปอร์กรุป ดังนี้

บทนิยามที่ 9 กำหนดให้ H เป็นเซตไม่ว่าง และ $\circ$ เป็นการดำเนินการไฮเปอร์บนเซตของ H จะเรียก $(H, \circ)$ ว่าเป็นไฮเปอร์กรุป ก็ต่อเมื่อ

1. $(H, \circ)$ มีคุณสมบัติปิด (closure property) :
   สำหรับทุกสับเซต A และ B ของ H จะได้ว่า $A \circ B \in P^*(H)$
2. $(H, \circ)$ มีคุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative property) :
   สำหรับทุก $a, b, c \in H, (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
3. $(H, \circ)$ มีคุณสมบัติการมีเอกลักษณ์ (identity property) :
   มีสมาชิก e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ (identity) ของ $(H, \circ)$ นั่นคือ จะมีสมาชิก $e \in H$ ที่ทำให้ $x \in (x \circ e \cap e \circ x)$ สำหรับทุก $x \in H$ หรือ มีสมาชิก e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์คงตัว (scalar identity) ของ $(H, \circ)$ นั่นคือ จะมีสมาชิก $e \in H$ ที่ทำให้$(x \circ e \cap e \circ x) = \{x\}$ สำหรับทุก $x \in H$ และจะมีสมาชิกเอกลักษณ์คงตัวเพียงตัวเดียวเท่านั้นใน H
4. $(H, \circ)$ มีคุณสมบัติการมีตัวผกผัน (inverse property) : สำหรับแต่ละ $a \in H$ จะได้ว่ามี $b \in H$ เป็นสมาชิกผกผัน (inverse element) ของ a ก็ต่อเมื่อ $e \in (a \circ b) \cap (b \circ a)$ โดยที่ e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์

ตัวอย่างถัดไปถือว่าเป็นตัวอย่างที่ง่ายต่อความเข้าใจลักษณะของไฮเปอร์กรุป

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $H = \{0, x\}$ โดยที่ $x \neq 0$ นิยามการดำเนินการไฮเปอร์ $\circ$ บน H ดังนี้

$\circ$	0	x
0	$\{0\}$	$\{x\}$
x	$\{x\}$	H

เห็นได้ชัดว่า $(H, \circ)$ เป็นไฮเปอร์กรุป

ตัวอย่างถัดไปจะเพิ่มความยากของตัวดำเนินการขึ้นมา เพื่อให้ทราบว่าการจะแสดงว่าเป็นไฮเปอร์กรุปนั้นค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าการแสดงว่าเป็นกรุปมากหากพิจารณาลักษณะเซตและการดำเนินการที่คล้ายคลึงกัน

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้ $H = \{e, x, y, z\}$ และการดำเนินการไฮเปอร์ (hyper operation) $\circ$ บนเซต H ดังต่อไปนี้

$\circ$	e	x	y	z
e	$\{e\}$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$
x	$\{x\}$	$\{e, x\}$	$\{x, y\}$	$\{x, z\}$
y	$\{y\}$	$\{x, y\}$	$\{e, y\}$	$\{y, z\}$
z	$\{z\}$	$\{x, z\}$	$\{y, z\}$	$\{e, z\}$

เราสามารถแสดงว่า $(H, \circ)$ เป็นไฮเปอร์กรุปโดยพิจารณาเป็นข้อๆ ดังนี้

1. $(H, \circ)$ มีคุณสมบัติปิด
   จากตารางการดำเนินการไฮเปอร์ $\circ$ บนเซตของ H พบว่า สำหรับทุก ๆ A และ B ที่เป็นสับเซตของ H จะได้ว่า $A \circ B \in P^*(H)$

2. $(H, \circ)$ มีคุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่
   โดยการแจงกรณี

a	b	c	$a \circ b$	$b \circ c$	$(a \circ b) \circ c$	$a \circ (b \circ c)$
e	e	e	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$
e	e	x	$\{x\}$	$\{x\}$	$\{x\}$	$\{x\}$
e	x	y	$\{x\}$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$
e	x	z	$\{x\}$	$\{x, z\}$	$\{x, z\}$	$\{x, z\}$
e	y	e	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{y\}$
e	y	x	$\{y\}$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$
e	z	y	$\{z\}$	$\{y, z\}$	$\{y, z\}$	$\{y, z\}$
e	z	z	$\{z\}$	$\{e, z\}$	$\{e, z\}$	$\{e, z\}$
x	e	e	$\{x\}$	$\{e\}$	$\{x\}$	$\{x\}$
x	e	x	$\{x\}$	$\{x\}$	$\{e, x\}$	$\{e, x\}$
x	x	y	$\{e, x\}$	$\{x, y\}$	$\{e, x, y\}$	$\{e, x, y\}$
x	x	z	$\{e, x\}$	$\{x, z\}$	$\{e, x, z\}$	$\{e, x, z\}$
x	y	e	$\{x, y\}$	$\{y\}$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$
x	y	x	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$	$\{e, x, y\}$	$\{e, x, y\}$
x	z	y	$\{x, z\}$	$\{y, z\}$	$\{x, y, z\}$	$\{x, y, z\}$
x	z	z	$\{x, z\}$	$\{e, z\}$	$\{e, x, z\}$	$\{e, x, z\}$

a	b	c	$a \circ b$	$b \circ c$	$(a \circ b) \circ c$	$a \circ (b \circ c)$
y	e	e	$\{y\}$	$\{e\}$	$\{y\}$	$\{y\}$
y	e	x	$\{y\}$	$\{x\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$
y	x	y	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{e,x,y\}$	$\{e,x,y\}$
y	x	z	$\{x,y\}$	$\{x,z\}$	$\{x,y,z\}$	$\{x,y,z\}$
y	y	e	$\{e,y\}$	$\{e\}$	$\{e,y\}$	$\{e,y\}$
y	y	x	$\{e,y\}$	$\{x,y\}$	$\{e,x,y\}$	$\{e,x,y\}$
y	z	y	$\{y,z\}$	$\{y,z\}$	$\{e,y,z\}$	$\{e,y,z\}$
y	z	z	$\{y,z\}$	$\{e,z\}$	$\{e,y,z\}$	$\{e,y,z\}$
z	e	e	$\{z\}$	$\{z\}$	$\{z\}$	$\{z\}$
z	e	x	$\{z\}$	$\{x\}$	$\{x,z\}$	$\{x,z\}$
z	x	y	$\{x,z\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y,z\}$	$\{x,y,z\}$
z	x	z	$\{x,z\}$	$\{x,z\}$	$\{e,x,z\}$	$\{e,x,z\}$
z	y	e	$\{y,z\}$	$\{y\}$	$\{y,z\}$	$\{y,z\}$
z	y	x	$\{z,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y,z\}$	$\{x,y,z\}$
z	z	y	$\{e,z\}$	$\{y,z\}$	$\{e,y,z\}$	$\{e,y,z\}$
z	z	z	$\{e,z\}$	$\{e,z\}$	$\{e,z\}$	$\{e,z\}$

สำหรับทุก $a, b, c \in H, (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

3. $(H, \circ)$ มีคุณสมบัติการมีเอกลักษณ์
   เพราะจากตารางการดำเนินการไฮเปอร์ $\circ$ บนเซตของ H จะได้ว่า
   จะมี e เป็น (scalar identity) ของ $(H, \circ)$ สำหรับทุก $a \in H, a \circ e \cap e \circ a = \{a\}$

4. $(H, \circ)$ มีคุณสมบัติการมีตัวผกผัน
   เพราะจากตารางการดำเนินการไฮเปอร์ $\circ$ บนเซตของ H จะได้ว่า $e \in (e \circ e) \cap (e \circ e)$, $e \in (x \circ x) \cap (x \circ x)$, $e \in (y \circ y) \cap (y \circ y)$ และ $e \in (z \circ z) \cap (z \circ z)$ ดังนั้น e, x, y, z เป็นตัวผกผันของ e, x, y, z ตามลำดับ

จากทั้ง 4 ข้อ ดังนั้น $(H, \circ)$ เป็นไฮเปอร์กรุป

จากนิยามที่ให้ไปทั้งกรุปและไฮเปอร์ปรุป อาจยังมองภาพไม่ออก หากทำตารางเปรียบเทียบอาจทำให้มองภาพได้ง่ายขึ้น ดังนี้

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบนิยามระหว่างกรุปและไฮเปอร์กรุป

กรุป	**ไฮเปอร์กรุป**
เซตที่จะเป็นกรุป จะต้องไม่เป็นเซตว่าง	เซตที่จะเป็นไฮเปอร์กรุป จะต้องไม่เป็นเซตว่าง
ตัวดำเนินการของกรุปคือการดำเนินการทวิภาค ให้ $(G,*)$ เป็นกรุป และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G จะได้ว่า $* : G \times G \longrightarrow G$	ตัวดำเนินการของ คือ การดำเนินการแบบไฮเปอร์ให้ $(H,\circ)$ เป็นไฮเปอร์กรุป และ $\circ$ เป็นตัวดำเนินการไฮเปอร์บนเซต H จะได้ว่า $\circ : H \times H \longrightarrow P^*(H)$
ให้ G เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ $(G,*)$ จะเป็นกรุป (group) ได้ถ้ามีคุณสมบัติสอดคล้องคุณสมบัติ 4 ข้อ	ให้ H เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ $(H,\circ)$ จะเป็นไฮเปอร์กรุปได้ถ้ามีคุณสมบัติสอดคล้องคุณสมบัติ 4 ข้อ
สมบัติปิด ถ้า $a,b \in G$ แล้ว $a*b \in G$	**สมบัติปิด** ให้ A,B เป็นซับเซตของ H จะได้ว่า $A \circ B \in P^*(H)$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่ ถ้า $a,b,c \in G$ แล้ว $(a*b)*c = a*(b*c)$	**สมบัติการเปลี่ยนหมู่** สำหรับทุก $a,b,c \in H, (a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$ เมื่อ $(a\circ b)\circ c = \bigcup_{v\in(a\circ b)} v\circ c$ และ $a\circ(b\circ c) = \bigcup_{u\in(b\circ c)} a\circ u$
สมบัติการมีเอกลักษณ์ จะต้องมีสมาชิก $e \in G$ ที่ทำให้ $a*e = e*a = a$ สำหรับทุก $a \in G$	**สมบัติการมีเอกลักษณ์** (I) จะต้องมีสมาชิก e ที่เป็น identity ที่ทำให้ สำหรับทุก $x \in H, x \in (x\circ e)\cap(e\circ x)$ (II) จะต้องมีสมาชิก e ที่เป็น scalar identity ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in H, (x\circ e)\cap(e\circ x) = \{x\}$
สมบัติการมีตัวผกผัน แต่ละสมาชิก $a \in G$ ต้องมีสมาชิก $b \in G$ ที่ทำให้ $a*b = b*a = e$ สำหรับ e ที่เป็นสมาชิกเอกลักษ์ของ $(H,\circ)$	**สมบัติการมีตัวผกผัน** สำหรับทุก $x,y \in H$ จะเรียก x ว่าเป็นตัวผกผันของ y ถ้ามี e ซึ่งเป็น identity ของ $(H,\circ)$ ที่ทำให้ $e \in (x\circ y)\cap(y\circ x)$

ดิสครีต ไฮเปอร์กรุป (disclete hypergroup)

จากตารางเปรียบเทียบที่ผ่านมา จะสังเกตความแตกต่างระหว่างกรุป และไฮเปอร์กรุปได้ง่ายขึ้น เช่นเดียวกันการจะทำความรู้จักกับดีสครีต ไฮเปอร์กรุปก็จะไม่ยาก ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยามที่ 12 กำหนดให้ $(H, \circ)$ เป็นไฮเปอร์กรุป จะเรียก $(H, \circ)$ ว่าเป็น ดิสครีต ไฮเปอร์กรุป ก็ต่อเมื่อ $\forall x, y \in H, x \circ y = \{x, y\}$

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ $H = \{e, a, b, c\}$ และการดำเนินการไฮเปอร์ (hyper operation) $\circ$ บนเซต H ดังต่อไปนี้

$\circ$	e	a	b	c
e	$\{e\}$	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{e,c\}$
a	$\{e,a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$
b	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$
c	$\{e,c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$

1. $(H, \circ)$ มีคุณสมบัติปิด
   จากตารางการดำเนินการไฮเปอร์ $\circ$ บนเซตของ H จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ A, B ที่เป็นสับเซตของ H จะได้ว่า $A \circ B \in P^*(H)$

2. $(H, \circ)$ มีคุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่
   โดยการแจงกรณี

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
e	e	e	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$
e	e	a	$\{e\}$	$\{a\}$	$\{e,a\}$	$\{e,a\}$
e	a	b	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a,b\}$	$\{e,a,b\}$
e	a	c	$\{e,a\}$	$\{a,c\}$	$\{e,a,c\}$	$\{e,a,c\}$
e	b	e	$\{e,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,b\}$
e	b	a	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a,b\}$	$\{e,a,b\}$
e	c	b	$\{e,c\}$	$\{c,b\}$	$\{e,b,c\}$	$\{e,b,c\}$

x	y	z	$x \circ y$	$y \circ z$	$(x \circ y) \circ z$	$x \circ (y \circ z)$
e	c	c	$\{e,c\}$	$\{c\}$	$\{e,c\}$	$\{e,c\}$
a	e	e	$\{e,a\}$	$\{e\}$	$\{e,a\}$	$\{e,a\}$
a	e	a	$\{e,a\}$	$\{e,a\}$	$\{e,a\}$	$\{e,a\}$
a	a	b	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
a	a	c	$\{a\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$
a	b	e	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a,b\}$	$\{e,a,b\}$
a	b	a	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
a	c	b	$\{a,c\}$	$\{c,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
a	c	c	$\{a,c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$
b	e	e	$\{e,b\}$	$\{e\}$	$\{e,b\}$	$\{e,b\}$
b	e	a	$\{e,b\}$	$\{a\}$	$\{e,a,b\}$	$\{e,a,b\}$
b	a	b	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
b	a	c	$\{a,b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
b	b	e	$\{b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,b\}$
b	b	a	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
b	c	b	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$
b	c	c	$\{b,c\}$	$\{c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$
c	e	e	$\{e,c\}$	$\{e\}$	$\{e,c\}$	$\{e,c\}$
c	e	a	$\{e,c\}$	$\{e,a\}$	$\{e,a,c\}$	$\{e,a,c\}$
c	a	b	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
c	a	c	$\{c,a\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$
c	b	e	$\{c,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,b,c\}$	$\{e,b,c\}$
c	b	a	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
c	c	b	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$
c	c	c	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$

3. $(H,\circ)$ มีคุณสมบัติการมีเอกลักษณ์ เพราะจากตารางการดำเนินการไฮเปอร์ $\circ$ บนเซตของ H จะได้ว่า มี e เป็น (identity) ของ $(H,\circ)$ สำหรับทุก $x \in H, x \in (x \circ e \cap e \circ x)$

4. $(H,\circ)$ มีคุณสมบัติการมีตัวผกผัน เพราะจากตารางการดำเนินการไฮเปอร์ $\circ$ บนเซตของ H จะได้ว่า $e \in (e \circ e) \cap (e \circ e)$, $e \in (a \circ e) \cap (e \circ a)$, $e \in (b \circ e) \cap (e \circ b)$ และ $e \in (c \circ e) \cap (e \circ c)$ ดังนั้น e, a, b, c เป็นตัวผกผันของ e และ e เป็นตัวผกผันของ a และ e เป็นตัวผกผันของ b และ e เป็นตัวผกผันของ c

จากทั้ง 4 ข้อดังนั้น $(H,\circ)$ เป็นไฮเปอร์กรุป

5. จากตารางการดำเนินการไฮเปอร์ $\circ$ บนเซตของ H จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in H, x \circ y = \{x, y\}$

ดังนั้น $(H, \circ)$ เป็นดิสครีต ไฮเปอร์กรุป

เอกสารอ้างอิง

D. N. Krgović. (1980). **On 0-minimal bi-ideals of semigroups**, Publ. Inst. Math. (Beograd), 135-137.

D. N. Krgović. (1982). **On 0-minimal (0,2)-ideal of semigroups**, Publ. Inst. Math. (Beograd), 103-107.

S. Hobanthad and W. Jantanan. (2015). **On 0-minimal bi-hyperideal of semihypergroups with zero**, NIRC. 1 : 117-121.

W. Jantanan and T. Changphas. (2013). **On 0-minimal (0,2)-bi-ideal in ordered semigroups**, Quasigroups and Related Systems. 21 : 51-58.

D. Heidari and B. Davvaz. (2011). **On ordered hyperstructures**, U.P.B. Sci. Bull. Series A, Vol.73, Iss.2 : 85-96.

F. Marty. (1934). **Sur unigeneralization de la notion de group**, 8th Congress Math. Scandenaves, Stockholm : 45-49.

Samkhan Hobanthad (2015). **On 0-minimal (0,2)-bi-hyperideal of semihypergroups**, Full tex research : 1-28.