การปรับปรุงขั้นตอนวิธีไฮบริดระหว่างวิธีแบ่งครึ่งช่วงและวิธีนิวตัน – ราฟสัน
Improving Hybrid Algorithm to Bisection Method and Newton – Raphson Method

วัชระ วงศา

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
Email : watchara.ws@bru.ac.th

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้นำเสนอการปรับปรุงขั้นตอนวิธีไฮบริดระหว่างวิธีแบ่งครึ่งช่วงและวิธีนิวตัน – ราฟสัน ในการหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งผลการทดลองเชิงตัวเลขจากการทดสอบกับสมการไม่เชิงเส้นในรูปแบบต่าง ๆ แสดงให้เห็นว่าขั้นตอนวิธีไฮบริดที่ได้รับการปรับปรุงนี้มีประสิทธิภาพและมีจำนวนรอบการทำซ้ำน้อยกว่าขั้นตอนวิธีไฮบริดอื่น ๆ ที่นำมาเปรียบเทียบ
คำสำคัญ : วิธีแบ่งครึ่งช่วง, วิธีนิวตัน – ราฟสัน, ขั้นตอนวิธีไฮบริด, สมการไม่เชิงเส้น

Abstract

The purpose of this research propose is to improve hybrid algorithm to bisection method and Newton-Raphson method to compute roots of nonlinear equations. Numerical experiments for various tests nonlinear equations confirm performance for the improved hybrid algorithm to be compared with.
Keywords : Bisection method, Newton – Raphon method, Hybrid Algorithm, Nonlinear equations

1. บทนำ

การหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นโดยวิธีทำซ้ำเป็นหัวข้อหนึ่งที่สำคัญในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข [3, 5, 7] เนื่องจากปัญหาในทางวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ มีความซับซ้อนทำให้ไม่สามารถหาคำตอบแม่นตรงได้โดยวิธีการแก้สมการ วิธีทำซ้ำจึงเป็นทางเลือกหนึ่งที่ใช้การค้นหาคำตอบหรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ขั้นตอนวิธีในการหาค่าศูนย์ของฟังก์ชัน นั่นคือการหาค่า x ที่ทำให้ $f(x)=0$ หนึ่งในวิธีทำซ้ำที่เป็นขั้นตอนวิธีในการค้นหาคำตอบคือวิธีแบ่งครึ่งช่วง ซึ่งเป็นวิธีแบบปิด โดยมีแนวคิดในการหาคำตอบโดยใช้ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลางเพื่อสร้างช่วงปิดที่บรรจุคำตอบ มีอันดับการลู่เข้าเป็นเชิงเส้น และสามารถหาคำตอบได้แน่นอน แต่เนื่องจากวิธีนี้หาคำตอบได้ค่อนข้างช้า ดังนั้น Tanakan [8] จึงได้ปรับปรุงวิธีแบ่งครึ่งช่วงโดยใช้แนวคิดของวิธีเซแคนต์เพื่อทำให้หาคำตอบได้รวดเร็วขึ้น นอกจากนี้ยังมีวิธีแบบเปิดซึ่งเป็นวิธีทำซ้ำที่รู้จักกันอย่างกว้างขวาง นั่นคือ วิธีนิวตัน – ราฟสัน วิธีนี้ต้องใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันในการคำนวณหาคำตอบทุกรอบของการทำซ้ำ และมีอันดับการลู่เข้าเป็นสอง จึงถือได้ว่าวิธีนี้มีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีแบ่งครึ่งช่วงในด้านการหาคำตอบได้รวดเร็วกว่า ทำให้มีนักวิจัยเป็นจำนวนมากทำการปรับปรุงวิธีนิวตัน – ราฟสัน เพื่อให้มีอันดับการลู่เข้าที่มากขึ้น หนึ่งในนั้นคือ Homeier [4] นำเสนอการปรับปรุงวิธีนิวตัน-ราฟสันจนทำให้มีอันดับการลู่เข้าเป็นสาม Chun และ Neta [2] ได้ทำการปรับปรุงจนทำให้มีอันดับการลู่เข้าเป็นสี่ แต่อย่างไรก็ตาม วิธีนิวตัน – ราฟสัน ไม่สามารถหาคำตอบได้แน่นอน ขึ้นอยู่กับการเลือกจุดเริ่มต้นที่เหมาะสม ดังนั้น Altaee, Hoomod และ Hussein [1] จึงได้นำเสนอขั้นตอนวิธีไฮบริดระหว่างวิธีแบ่งครึ่งช่วงและวิธีนิวตัน–ราฟสัน และในเวลาต่อมา Kim, Noh, Oh และ Park [6] ได้ทำการสร้างขั้นตอนวิธีไฮบริดที่ใช้วิธีแบ่งครึ่งช่วงและวิธีนิวตัน – ราฟสัน เพื่อปรับปรุงขั้นตอนวิธีไฮบริดของ Altaee และคณะ

ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะใช้ตัวอย่างใน [6] เพื่อแสดงให้เห็นว่าการปรับปรุงขั้นตอนวิธีไฮบริดแบบใหม่นี้ มีจำนวนรอบการทำซ้ำน้อยกว่าวิธีแบ่งครึ่งช่วงและขั้นตอนวิธีไฮบริดใน [1] และ [6] อีกทั้งยังมีประสิทธิภาพในการลู่เข้ามากกว่าวิธีนิวตัน-ราฟสัน

2. การออกแบบการวิจัย

ทำการทดลองเปรียบเทียบการลู่เข้าและจำนวนรอบทำซ้ำในการหาคำตอบบนค่าคลาดเคลื่อนยินยอมสำหรับขั้นตอนวิธีไฮบริดที่ปรับปรุงกับขั้นตอนวิธีไฮบริดใน [1] และ [6] พร้อมทั้งเปรียบเทียบกับวิธีแบ่งครึ่งช่วงและวิธีนิวตัน-ราฟสัน โดยใช้โปรแกรม Scilab 6.0.1 (64 bit) บนระบบปฏิบัติการวินโดว์ 10 ซึ่งกำหนดค่าคลาดเคลื่อนยินยอม (ε) คือ 1.0×10^{-5} และกำหนดเกณฑ์การลู่ออกเมื่อจำนวนรอบการทำซ้ำมากกว่า $1,000$ รอบ โดยทดสอบกับฟังก์ชันต่าง ๆ ดังนี้

ฟังก์ชันที่ 1 $f(x)=\arctan x$ บนช่วงปิด $[-4,5]$

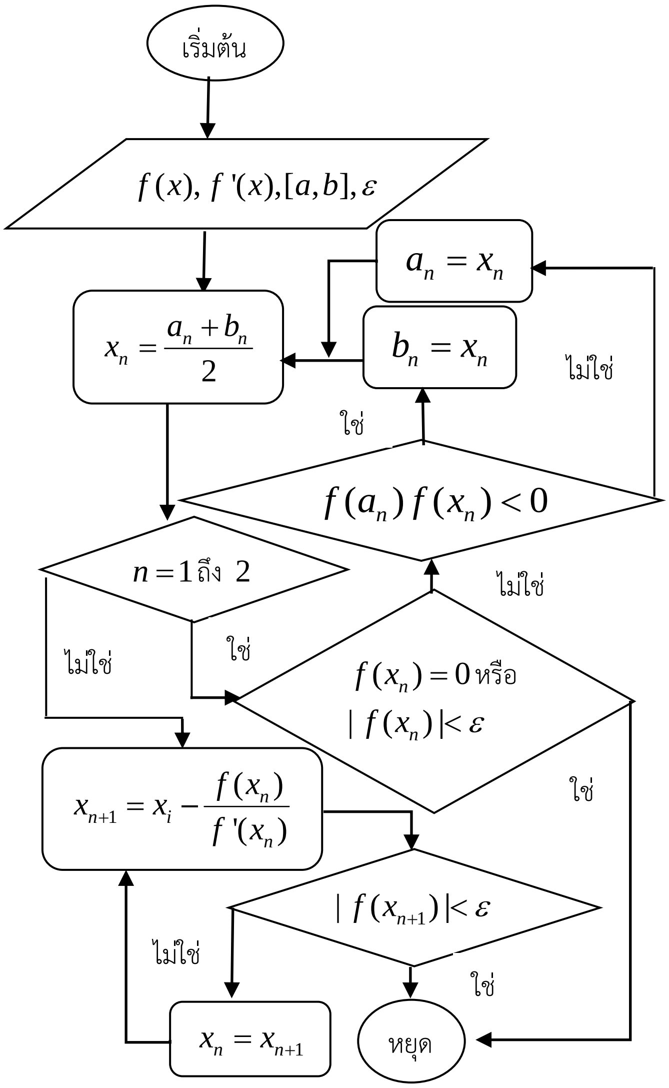
ฟังก์ชันที่ 2 $f(x)=e^{-x}+\cos x$ บนช่วงปิด $[-2,2]$

ฟังก์ชันที่ 3 $f(x)=10xe^{-x^2}-1$ บนช่วงปิด $[-1,1]$

ฟังก์ชันที่ 4 $f(x)=e^{\sin x^2-3x}-5x-150$ บนช่วงปิด $[-5,6]$

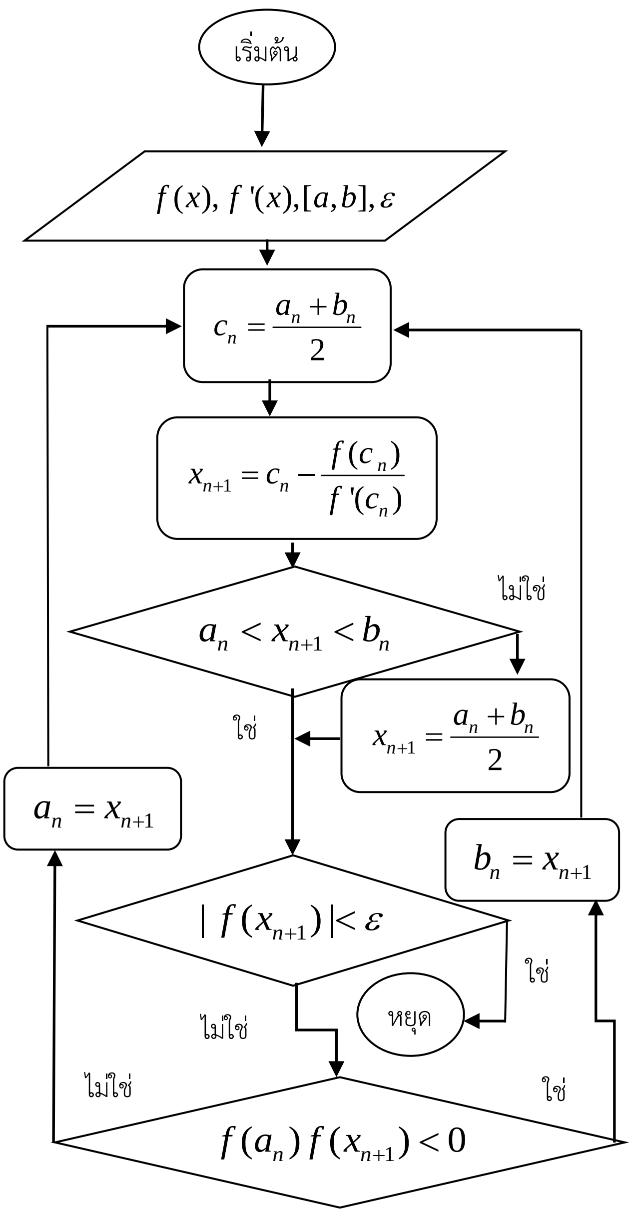
3. วิธีการวิจัย

ในปี 2015 Altaee, Hoomod และ Hussein ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีไฮบริดระว่างวิธีแบ่งครึ่งช่วงและวิธีนิวตัน-ราฟสัน โดยขั้นตอนวิธีไฮบริดนี้มีรายละเอียดดังแผนภาพในรูปที่ 4



รูปที่ 4 แผนภาพแสดงขั้นตอนวิธีไฮบริดของ Altaee และคณะ (AM)

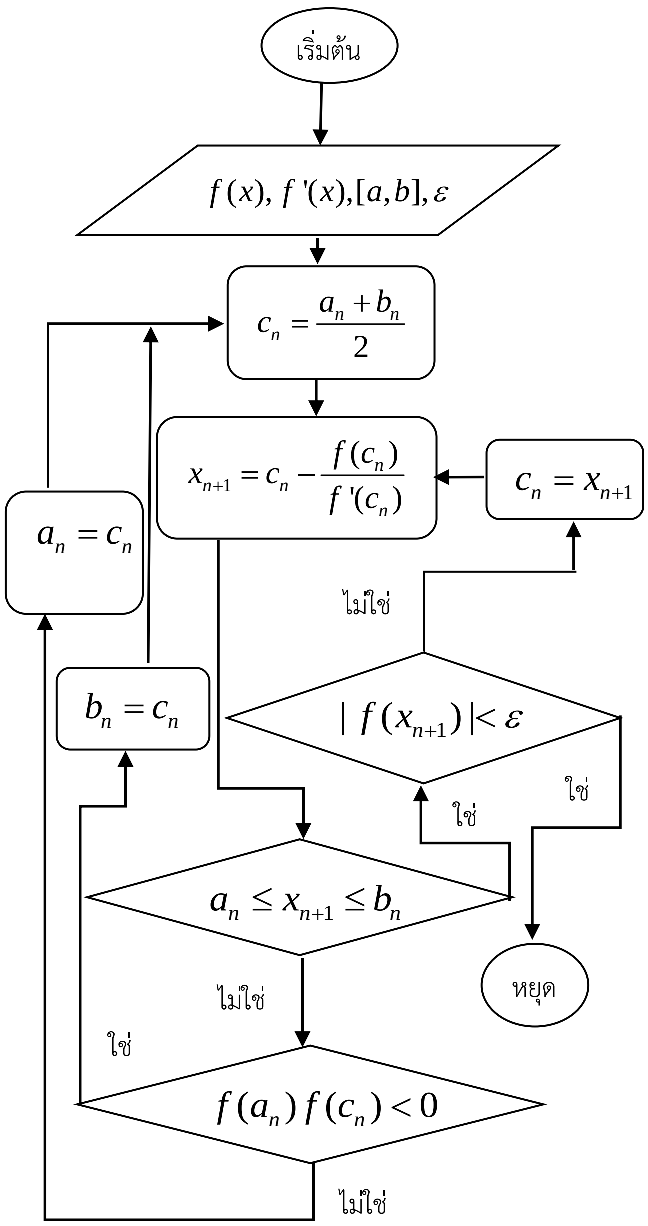
จากแผนภาพในรูปที่ 4 ขั้นตอนวิธีไฮบริดนี้ต้องกำหนดช่วงเริ่มต้น $[a_0, b_0] = [a, b]$ ที่บรรจุคำตอบ ใช้วิธีแบ่งครึ่งช่วงคำนวณในรอบที่หนึ่งและรอบที่สองเพื่อหา x_n จากนั้นใช้ x_n เป็นจุดเริ่มต้นบนวิธีนิวตัน-ราฟสัน และทำซ้ำจนกระทั่งได้คำตอบตามความแม่นยำที่กำหนด แต่เนื่องจากขั้นตอนวิธีไฮบริดนี้ไม่มีการตรวจสอบลำดับที่ได้จากวิธีนิวตัน-ราฟสันบนช่วงที่บรรจุคำตอบจึงทำให้บางครั้งลำดับไม่อยู่ในช่วงเริ่มต้นและทำให้ลู่ออก ดังนั้นในปี 2017 kim และคณะได้นำเสนอขั้นตอนวิธีไฮบริดแบบใหม่โดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน และวิธีแบ่งครึ่งช่วงคำนวณในทุกรอบการทำซ้ำเพื่อสร้างช่วงใหม่และลำดับที่ได้อยู่ในช่วงที่บรรจุคำตอบตามทฤษฎีบทค่าระหว่างกลางที่ใช้ในวิธีแบ่งครึ่งช่วง โดยขั้นตอนวิธีไฮบริดนี้มีรายละเอียดดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 แผนภาพแสดงขั้นตอนวิธีไฮบริดของ kim และคณะ (KM)

จากแผนภาพในรูปที่ 5 เป็นขั้นตอนวิธีไฮบริดที่ต้องกำหนดช่วง $[a_0, b_0] = [a, b]$ ซึ่งเป็นช่วงเริ่มต้นที่บรรจุคำตอบ จากนั้นทำการแบ่งครึ่งช่วงเพื่อใช้เป็นจุดเริ่มต้นในวิธีนิวตัน-ราฟสัน ถ้าลำดับ x_n ที่ได้จากการทำซ้ำด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันอยู่ในช่วงที่กำหนด นั่นคือ $x_n \in (a_{n-1}, b_{n-1})$ และยังไม่ใช่คำตอบที่อยู่ในค่าคลาดเคลื่อนยินยอมที่กำหนดขึ้นต้องสร้างช่วงใหม่จาก $[a_{n-1}, x_n]$ และ $[x_n, b_{n-1}]$ โดยใช้วิธีแบ่งครึ่งช่วง ทำให้ขั้นตอนวิธีไฮบริดนี้หาคำตอบได้แน่นอน แต่เนื่องจากในแต่ละรอบการทำซ้ำต้องใช้แรงงานจากการคำนวณด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันและวิธีแบ่งครึ่งช่วงทุกครั้ง ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำเสนอการปรับปรุงขั้นตอนวิธีไฮบริดของ kim และคณะ โดยลดขั้นตอนการสร้างช่วงใหม่ที่บรรจุคำตอบทุกรอบการทำซ้ำ โดยการกำหนด $[a_0, b_0] = [a, b]$ เป็นช่วงเริ่มต้นที่บรรจุคำตอบ จากนั้นคำนวณโดยวิธีแบ่งครึ่งช่วงเพื่อใช้เป็นจุดเริ่มต้นของวิธีนิวตัน-ราฟสัน ถ้าลำดับ x_n ที่ได้อยู่ในช่วงที่กำหนดนั่นคือ

$x_n \in [a_{n-1}, b_{n-1}]$ แล้วจะทำซ้ำโดยคำนวณด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันจนได้คำตอบในค่าคลาดเคลื่อนยินยอมที่กำหนด แต่ถ้าลำดับที่ได้ออกนอกช่วง นั่นคือ $x_n \notin [a_{n-1}, b_{n-1}]$ จะต้องสร้างช่วงใหม่โดยใช้วิธีแบ่งครึ่งช่วงจากช่วง $[a_{n-1}, c_{n-1}]$และ $[c_{n-1}, b_{n-1}]$ เพื่อหาจุดเริ่มต้นของวิธีนิวตัน-ราฟสันอีกครั้ง ซึ่งทำให้ขั้นตอนวิธีไฮบริดที่ได้รับการปรับปรุงนี้สามารถหาคำตอบได้แน่นอนและลดขั้นตอนในการคำนวณได้มากกว่าขั้นตอนวิธีของ Kim และคณะ ดังรายละเอียดในรูปที่ 6



รูปที่ 6 แผนภาพแสดงขั้นตอนวิธีไฮบริดที่ได้ปรับปรุง (IM)

จากรูปที่ 6 เขียนขั้นตอนวิธีไฮบริดที่ปรับปรุงได้ดังนี้
กำหนดให้ $[a_0, b_0]$เป็นช่วงเริ่มต้นที่บรรจุคำตอบ โดยแนวคิดจากทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง นั่นคือ $f(a_0) f(b_0) < 0$ และกำหนด ε เป็นค่าคลาดเคลื่อนยินยอม

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหา c_n จาก $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหา x_{n+1} จาก $x_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$

ขั้นตอนที่ 3 ถ้า $x_{n+1} \in [a_n, b_n]$แล้ว คำนวณ $|f(x_{n+1})|$ ถ้า $|f(x_{n+1})|$น้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนยินยอมที่กำหนดให้หยุดการทำซ้ำ แต่ถ้า $|f(x_{n+1})|$ยังไม่น้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนยินยอมที่กำหนด แล้วให้ $c_n = x_{n+1}$ และกลับไปทำขั้นตอนที่ 2

ขั้นตอนที่ 4 ถ้า $x_{n+1} \notin [a_n, b_n]$ และถ้า $f(a_n) f(c_n) < 0$ แล้ว $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$ถ้าไม่ใช่ $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$ และกลับไปทำขั้นตอนที่ 1

4. ผลการวิจัย

จากการทดลองเปรียบเทียบการลู่เข้าและจำนวนรอบทำซ้ำเพื่อหาคำตอบบนค่าคลาดเคลื่อนยินยอมที่กำหนดไว้สำหรับขั้นตอนวิธีต่าง ๆ ซึ่งประกอบด้วย

1. ขั้นตอนวิธีไฮบริดของ Altaee และคณะ (AM)
2. ขั้นตอนวิธีไฮบริดของ kim และคณะ (KM)
3. ขั้นตอนวิธีไฮบริดที่ปรับปรุง (IM)
4. วิธีแบ่งครึ่งช่วง (BM)
5. วิธีนิวตัน-ราฟสัน (NM)

โดยทดสอบกับฟังก์ชันทั้งหมด 4 ฟังก์ชัน เพื่อวัดประสิทธิภาพการลู่เข้าและจำนวนรอบการทำซ้ำ (n) ของแต่ละขั้นตอนวิธีซึ่งมีผลการทดลองตามตารางที่ 1 – 4 ดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงจำนวนรอบการทำซ้ำแต่ละขั้นตอนวิธีสำหรับฟังก์ชันที่ 1

วิธี	n	x_n	$f(x_n)$
AM	ลู่ออก		
KM	13	-0.0000032	-0.0000032
IM	3	-2.513×10^{-11}	-2.513×10^{-11}
BM	19	0.0000019	0.0000019
NM	3	-2.513×10^{-11}	-2.513×10^{-11}

ตารางที่ 2 แสดงจำนวนรอบการทำซ้ำแต่ละขั้นตอนวิธีสำหรับฟังก์ชัน 2

วิธี	n	x_n	$f(x_n)$
AM	4	1.746136	0.0000041
KM	5	1.7461388	0.0000008
IM	4	1.7461395	1.868×10^{-10}
BM	18	1.7461395	4.684×10^{-9}
NM	4	1.7461395	1.868×10^{-10}

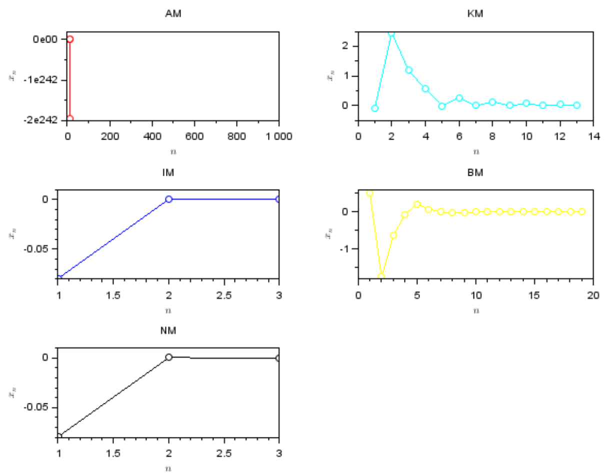
ตารางที่ 3 แสดงจำนวนรอบการทำซ้ำแต่ละขั้นตอนวิธีสำหรับฟังก์ชัน 3

วิธี	n	x_n	$f(x_n)$
AM	6	0.1010255	0.0000041
KM	14	0.1010249	–0.0000088
IM	2	0.1010255	–0.0000031
BM	20	0.1010265	0.0000067
NM	2	0.1010255	–0.0000031

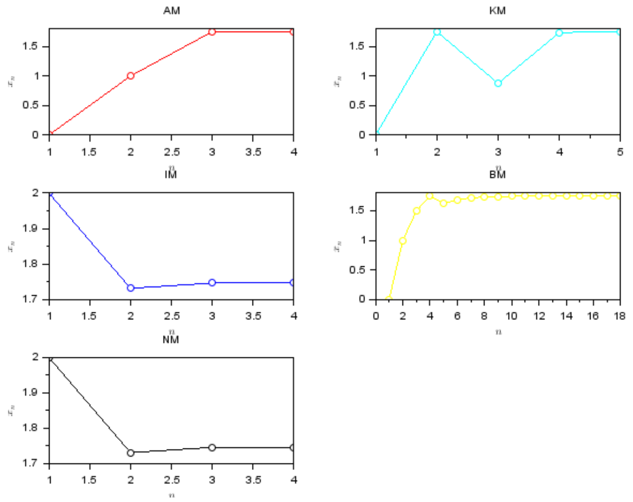
ตารางที่ 4 แสดงจำนวนรอบการทำซ้ำแต่ละขั้นตอนวิธีสำหรับฟังก์ชัน 4

วิธี	n	x_n	$f(x_n)$
AM	ลู่ออก		
KM	23	–1.3279545	–0.0000086
IM	11	–1.3279545	-3.300×10^{-9}
BM	28	-1.3279545	-0.0000041
NM	ลู่ออก		

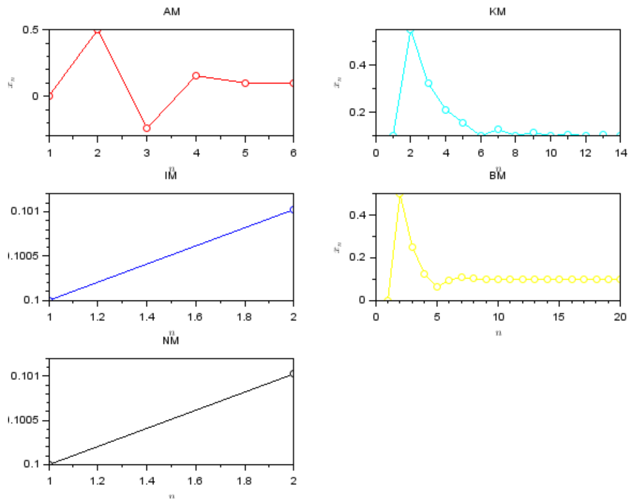
และเมื่อวาดกราฟเพื่อแสดงจำนวนรอบการทำซ้ำทั้งหมดของแต่ละขั้นตอนวิธี ผลลัพธ์ที่ได้เป็นไปตามรูปภาพที่ 7 - 10 ดังนี้



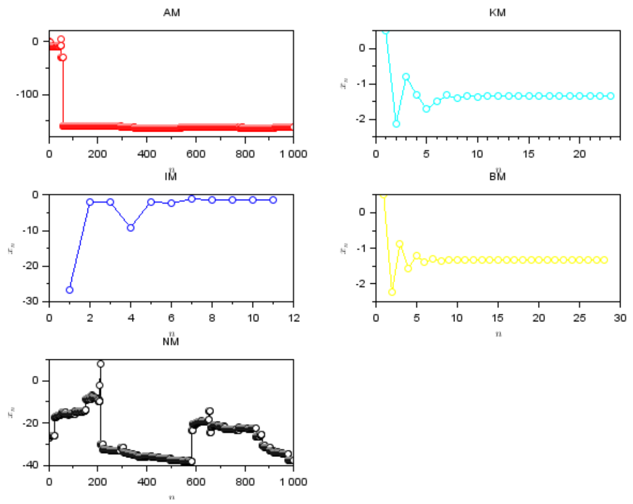
รูปที่ 7 แสดงจำนวนรอบการทำซ้ำทั้งหมดของแต่ละขั้นตอนวิธีสำหรับฟังก์ชันที่ 1



รูปที่ 8 แสดงจำนวนรอบการทำซ้ำทั้งหมดของแต่ละขั้นตอนวิธีสำหรับฟังก์ชันที่ 2



รูปที่ 9 แสดงจำนวนรอบการทำซ้ำทั้งหมดของแต่ละขั้นตอนวิธีสำหรับฟังก์ชันที่ 3



รูปที่ 10 แสดงจำนวนรอบการทำซ้ำทั้งหมดของแต่ละขั้นตอนวิธีสำหรับฟังก์ชันที่ 4

5. อภิปรายผล

จากผลการทดลองเชิงตัวเลขในตารางที่ 1 – 4 และรูปที่ 7 - 10 แสดงให้เห็นว่าขั้นตอนวิธีไฮบริดที่ปรับปรุงนี้ เมื่อทดสอบกับฟังก์ชันที่ 1 - 4 มีจำนวนรอบการทำซ้ำเป็น 3, 4, 2 และ 11 ตามลำดับ โดยสามารถหาคำตอบบนค่าคลาดเคลื่อนยินยอมที่กำหนดได้ทุกฟังก์ชันที่นำเสนอ แม้ว่าฟังก์ชันที่ 1 และ 4 วิธีนิวตัน-ราฟสันและขั้นตอนวิธีไฮบริดของ Altaee และคณะ จะไม่สามารถหาคำตอบได้ อีกทั้งยังมีจำนวนรอบการทำซ้ำน้อยกว่าวิธีแบ่งครึ่งช่วงและขั้นตอนวิธีไฮบริดของ Kim และคณะอีกด้วย

6. บทสรุป

ขั้นตอนวิธีไฮบริดที่ปรับปรุงนี้สามารถหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นได้รวดเร็วกว่ากับวิธีแบ่งครึ่งช่วง และขั้นตอนวิธีไฮบริดของ Kim และคณะ อีกทั้งยังมีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีนิวตัน-ราฟสันเนื่องจากลู่เข้าได้แม้ว่าวิธีนิวตัน – ราฟสันนั้นลู่ออก ดังนั้นในอนาคตผู้วิจัยจะพยายามคำนวณหาอัตราการลู่เข้าของขั้นตอนวิธีไฮบริดนี้ต่อไป

7. เอกสารอ้างอิง

[1] Abed Ali H. Altaee, Haider K. Hoomod and Khalid Ali Hussein, “A new approach to find roots of nonlinear equations by hybrid algorithm to bisection and newton-raphson algorithm, ” Iraqi journal for information technology, Vol. 7, no. 3 , pp. 75-82, 2015.

[2] Changbum Chun and Beny Neta, “Certain improvements of newton’s method with fourth-order convergence,” Applied mathematics and comutation, Vol. 215, pp. 821-828, 2009.

[3] David Kincaid and Ward Cheney, Numerical analysis, 3rd ed. Vena dyer, 2001.

[4] H. H. Homeier, “A modified newton method for rootfinding with cubic convergence,” Journal of computation and applied mathematics, Vol. 157, pp. 227-230, 2003.

[5] J. Stoer R. Bulirsch, Introduction to numerical analysis, 2th ed. Springer-verlag berlin Heidelberg, 1976.

[6] Jeongwon Kim, Taehoon Noh, Wonjun Oh and Seung Park, “An improved hybrid algorithm to bisection method and newton-raphson method,” Applied mathematical sciences, Vol. 11, no. 56, pp. 2789-2797, 2017.

[7] Kendall E. Atkimson, An introduction to numerical alnalysis, 2th ed. canada, 1988.

[8] S. Tanakan, “A new algorithm of modied bisection method for nonlinear equation,” Applied mathematical sciences, Vol. 7, no. 123, pp. 6107-6114, 2013.