การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับ 3
The comparison of the iterative methods’ performance with the third-order of convergence

ฐาปนี อรุณไพร[1] กรรณิการ์ ทรงกุล[2] และ วัชระ วงศา[3]

[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
[2]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
[3]อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
[1]Email : Thapanee7705@gmail.com ; [2]Email : Kannikawimonsai@gmail.com ;
[3]Email : Watchara.ws@bru.ac.th

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำ LM และ MG ซึ่งเป็นวิธีทำซ้ำที่มีอันดับการลู่ข้าเท่ากับ 3 โดยทดสอบกับสมการจำนวนเชิงซ้อนทั้ง 5 สมการที่มีภาวะรากซ้ำที่แตกต่างกันเพื่อหารากของสมการ จากผลการทดลองเชิงตัวเลขที่แสดงผลเป็นรูปภาพแสดงให้เห็นว่าวิธี MG มีประสิทธิภาพมากกว่าวิธี LM ในการหารากของสมการที่ใช้ในการทดสอบ

คำสำคัญ: อันดับการลู่เข้า รากซ้ำ วิธีนิวตัน-ราฟสันแบบปรับปรุง

Abstract

In this research, The comparison of the iterative methods’ performance of LM and MG. Which is iterative method with third-order of convergence. Testing with the 5 complex equations that have different multiple root to find the roots of the equation. From the numerical experiment results shown in the image. It shows that the MG method is more performance than the LM method for finding the roots of the equation used in the test.

Keywords: Order of convergence, Multiple root, Modified Newton-Raphson Method

1. บทนำ

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Methods) การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) หรือการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical Computation) เป็นวิชาที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์ การใช้การประเมินระเบียบวิธีต่างๆ เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์รวมทั้งปัญหาทางด้านอื่นที่เกี่ยวข้อง ดังนั้นจึงจำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้อ่านจะต้องทบทวนความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ เช่น พีชคณิตเชิงเส้น แคลคูลัส เป็นต้น เพื่อช่วยให้ผู้อ่านได้เข้าใจเนื้อหาสาระของบทความนี้ [4] วิชาดังกล่าวยังบ่งบอกเป็นนัยว่ามีความเกี่ยวข้องพัวพันกับการใช้เครื่องคำนวณ หรือเครื่องคอมพิวเตอร์ในปัจจุบัน จะเห็นได้ว่าแนวความคิดของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนี้ได้ถูกคิดค้นกันขึ้นมาเป็นเวลานาน หากแต่ว่าไม่สามารถนำมาใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพจนกระทั่งถึงการก่อกำเนิดของคอมพิวเตอร์เชิงตัวเลข ทำให้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสามารถนำมาใช้ได้อย่างมีประสิทธิผล การใช้และการประเมินระเบียบวิธีต่างๆ โดยเป็นวิธีการในการคำนวณให้ได้คำตอบที่มีค่าใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริงมากที่สุด

เนื่องจากระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันเป็นการประมาณค่ารากของสมการ $f(x)$ โดยการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดังนั้นในการหาคำตอบค่าความผิดพลาดจึงมีอยู่ในส่วนวิธีการทำซ้ำที่มีการใช้อนุพันธ์อันดับสองเป็นต้นไป เพื่อให้การคำนวณมีประสิทธิภาพมากขึ้นและหาคำตอบได้รวดเร็วจึงมีนักวิจัยปรับปรุงเพื่อให้มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับสาม หนึ่งในนั้นคือ Young Hee Geum ได้นำวิธีนิวตัน-ราฟสันไปปรับปรุงโดยได้วิธีใหม่ 2 วิธี คือ วิธีการทำซ้ำ LM และ MG เพื่อให้เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการหารากของสมการที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับ 3 [12]

ในปัจจุบันความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยีเป็นไปอย่างรวดเร็วหลายๆ หน่วยงานในภาคการศึกษาได้มีการนำอุปกรณ์คอมพิวเตอร์และซอฟต์แวร์ต่างๆ มาช่วยในการเรียนสอน และทำงานวิจัยในหลายสาขาวิชา ซึ่งโปรแกรม SCILAB เป็นโปรแกรมที่พัฒนาโดยกลุ่มของนักวิจัยจากสถาบัน Institut National De Recherche En Informatique Et En Automatique (INRIA) และ Ecole National des Ponts et Chausses (ENPC) ในประเทศฝรั่งเศส โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขและแสดงผลกราฟริกที่ซับซ้อน และยังเป็นโปรแกรมที่ให้ใช้ฟรี (freeware) โดยไม่เสียค่าลิขสิทธิ์ใดๆ ทั้งสิ้น ดังนั้นโปรแกรม SCILAB จึงเหมาะกับการใช้งานด้านวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ อีกทั้งยังสามารถทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพไม่ว่าจะเป็นการคำนวณได้อย่างรวดเร็ว มีความแม่นยำและง่ายต่อการใช้ง่าย

อีกด้วย [2] จากที่กล่าวมานั้น ทางคณะผู้จัดทำวิจัยจะใช้โปรแกรม SCILAB ในการคำนวณเชิงตัวเลขและแสดงผลเป็นรูปภาพเพื่อประสิทธิภาพของวิธี LM และวิธี MG ในสมการเชิงซ้อนทั้งหมด 5 สมการ

2. วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เพื่อศึกษาวิธีทำซ้ำ LM และ MG
2. เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการทำซ้ำ LM และ MG โดยแสดงผลการคำนวณเชิงตัวเลขเป็นรูปภาพในบริเวณของโดเมนที่เป็นจุดเริ่มต้น

3. วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยนี้ได้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำแบบ LM และ MG โดยนำสมการเชิงซ้อน 5 สมการมาทดสอบ โดยการสร้างรูปภาพในบริเวณพื้นที่สี่เหลียมจัตุรัสที่มีขนาด 6×6 ซึ่งครอบคลุมบริเวณของรากสมการที่นำมาทดสอบและแบ่งกริดของสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน 14,400 จุด เพื่อใช้เป็นจุดเริ่มต้นของวิธีการทำซ้ำบนบริเวณการลู่เข้าจากวิธีการทำซ้ำที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับ 3 จะได้รูปภาพที่มีสีที่แตกต่างกันตามการลู่เข้าของแต่ละรากของสมการ และส่วนของจุดสีดำเกิดจากทำซ้ำเกิน 50 รอบซึ่งลู่ออก

สำหรับสมการเชิงเชิงซ้อนที่นำมาทดสอบกับวิธีการทำซ้ำแบบ LM และ MG เราใช้พหุนามต่างๆ ที่มีภาวะรากซ้ำอันดับ $m=2,3,4,5$ ต่อไปนี้ [7], [13]

พหุนาม $P_1=(z^2-1)^2$ ที่มีรากเป็น $z=\pm 1$

พหุนาม $P_2=(z^3+z-1)^2$ ที่มีรากเป็น $z=\ 0.3411641\pm 16154i, 0.682328$

พหุนาม $P_3=(z^2-3)^5$ ที่มีรากเป็น $z=\pm 1.73205$

พหุนาม $P_4=(z^2-3z+5)^3$ ที่มีรากเป็น $z=-1.5\pm 1.65831i$

พหุนาม $P_5=(z^2-z)^4$ ที่มีรากเป็น $z=0,1$

วิธีที่ใช้สำหรับหาค่ารากสมการที่กำหนดหรือเดาค่าเริ่มต้นเพียงจุดเดียว หากเลือกค่าเริ่มต้นที่เหมาะสม ซึ่งเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมและเป็นที่รู้จักอย่างกว้างขว้างนั้นคือ วิธีนิวตัน-ราฟสัน

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

จากนั้น Young Hee Geum ได้ปรับปรุงวิธีนิวตัน-ราฟสันเป็นวิธีการทำซ้ำแบบ LM และ MG ดังนี้ [14]

$$\text{LM}\qquad \begin{cases} X_{n+1}=X_n-\lambda\dfrac{f\left(X_n-\mu h(X_n)\right)}{f'(X_n)}, \\ h(X_n)=\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}, \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda=\frac{m}{t^m}$ และ $\mu=m(1-t)$ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ควบคุมที่จะทำให้การันตีได้ว่าจะมีอันดับการลู่เข้าเท่ากับ 3

$$\text{MG}\qquad \begin{cases} X_{n+1}=X_n-\lambda\dfrac{f\left(X_n-\mu h(X_n)\right)+\gamma f(X_n)}{f'(X_n)}, \\ h(X_n)=\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}, \end{cases}$$

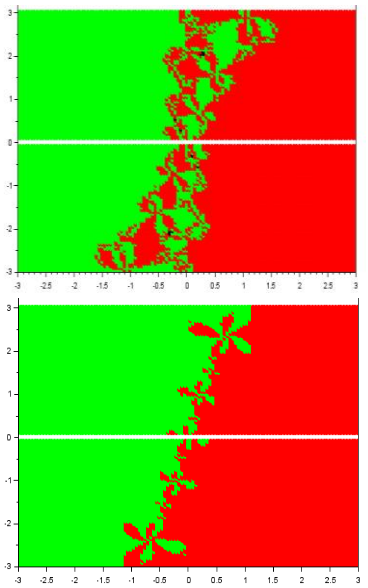
เมื่อ $\mu=m(1-t)$ และ $\gamma=m-t^m$ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ควบคุมที่จะทำให้การันตีได้ว่าจะมีอันดับการลู่เข้าเท่ากับ 3

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ (p) และค่า t สำหรับ $1\le m\le 5$ [10]

m	$p(t)$	t
1	t	0
2	$2t^2-t+1$	$\frac{1+\sqrt{7}i}{4}, i=\sqrt{-1}$
3	$3t^3-2t^2+t+1$	$\frac{1}{9}\left(2+1/a-5a\right)$; -0.4211548146942765, $a=\sqrt[3]{\frac{2}{-281+27\sqrt{109}}}$; 1.31067213007138
4	$4t^4-3t^3+t^2+t+1$	$\frac{1}{9}\left(18+6b\pm\sqrt{3}c\right)$; $0.710616\pm 0.657465i$, $b=\sqrt{\frac{1}{3}(-5+464d+\frac{32}{b})}$', $c=\sqrt{8(-5-232d-\frac{16}{d}-\frac{447}{b})}$ $d=\frac{2}{(46+6i\sqrt{5361})^{1/3}}, i=\sqrt{-1}$
5	$5t^5-4t^4+t^3+t^2+t+1$	-0.5444346547467631

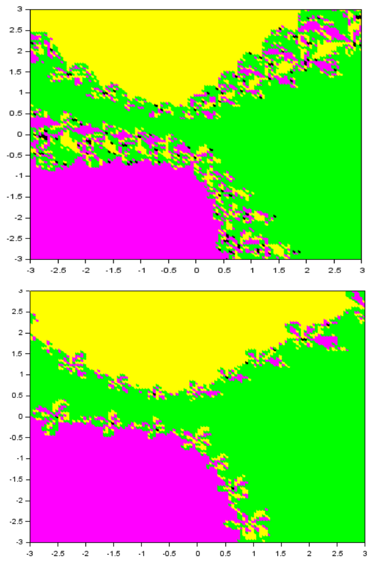
3. อภิปรายผล

จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำแบบ LM และวิธีการทำซ้ำแบบ MG ที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับ 3 ที่ทำการทดสอบกับสมการทั้ง 5 สมการ แสดงผลการทดลองเชิงตัวเลขดังภาพประกอบต่อไปนี้

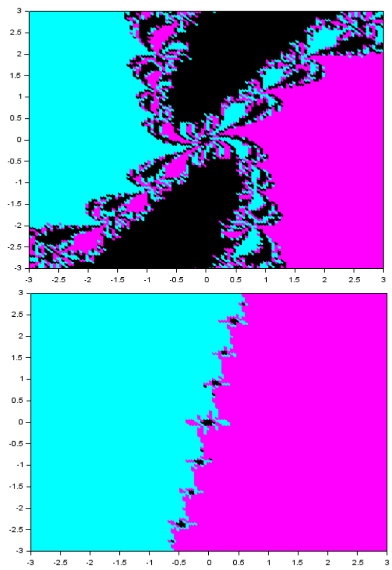


ภาพประกอบที่ 1 : ภาพด้านบนวิธี LM และภาพด้านล่างวิธี MG สำหรับรากของพหุนาม $P_1=(z^2-1)^2$ ที่มีรากเป็น $z=\pm 1$ มีภาวะ

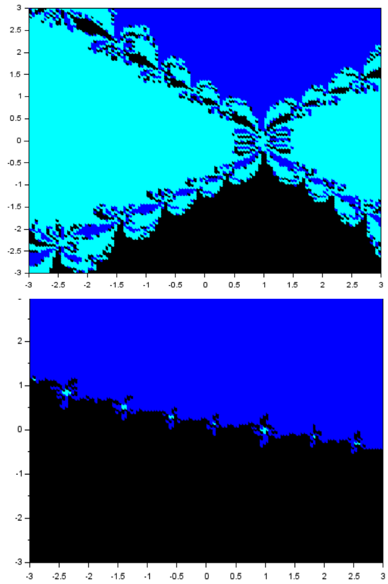
รากซ้ำอันดับ $m=2$ จะเห็นว่าวิธี MG เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับพหุนาม P_1 เนื่องจากวิธี MG ไม่แสดงจุดสีดำ แต่วิธี LM แสดงจุดสีดำเล็กน้อย



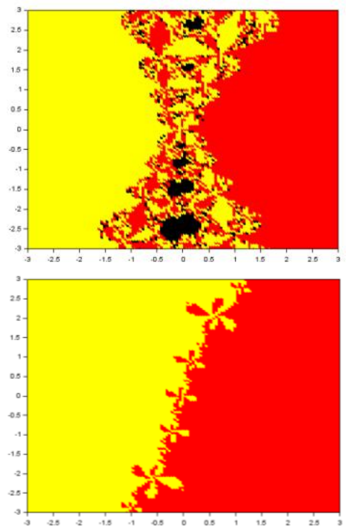
ภาพประกอบที่ 2 : ภาพด้านบนวิธี LM และภาพด้านล่างวิธี MG สำหรับรากของพหุนาม $P_2=(z^3+z-1)^2$ ที่มีรากเป็น $z=\ 0.3411641\pm16154i,0.682328$ มีภาวะรากซ้ำอันดับ $m=2$ จะเห็นว่าวิธี MG เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับพหุนาม P_2 เนื่องจากวิธี MG มีจุดสีดำเพียงเล็กน้อย แต่วิธี LM แสดงจุดสีดำมากกว่า



ภาพประกอบที่ 3 : ภาพด้านบนวิธี LM และภาพด้านล่างวิธี MG สำหรับรากของพหุนาม $P_3=(z^2-3)^5$ ที่มีรากเป็น $z=\pm1.73205$ มีภาวะรากซ้ำอันดับ $m=5$ จะเห็นว่าวิธี MG เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับพหุนาม P_3 เนื่องจากวิธี MG แสดงจุดสีดำน้อยกว่าวิธี LM



ภาพประกอบที่ 4 : ภาพด้านบนวิธี LM และภาพด้านล่างวิธี MG สำหรับรากของพหุนาม $P_4=(z^2-2z+3)^4$ ที่มีรากเป็น $z=1\pm1.41421i$ มีภาวะรากซ้ำอันดับ $m=4$ จะเห็นว่าวิธี LM เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับพหุนาม P_4 เนื่องจากวิธี LM มีบริเวณที่เป็นสีดำน้อยกว่าวิธี MG



ภาพประกอบที่ 5 : ภาพด้านบนวิธี LM และภาพด้านล่างวิธี MG สำหรับรากของพหุนาม $P_5=(9z^2+z-7)^2$ ที่มีรากเป็น $z=-0.939221,0.8211$ มีภาวะรากซ้ำอันดับ $m=2$ จะเห็นว่าวิธี MG เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับพหุนาม P_5 เนื่องจากวิธี MG ไม่มีจุดสีดำ แต่วิธี LM แสดงจุดสีดำ

4. สรุปผลการวิจัย

จากที่เราได้นำเสนอวิธีการทำซ้ำที่มีอันดับ 3 ทั้ง 2 วิธี คือ วิธีการทำซ้ำ LM และ MG เราได้เปรียบเทียบวิธีการทำซ้ำ LM และ MG เห็นได้ว่าวิธี MG เป็นวิธีการทำซ้ำที่ดีกว่าวิธี LM เนื่องจากภาพประกอบที่ 1,2,3 และ 5 แสดงให้เห็นจุดเริ่มต้นในการลู่เข้าที่มากกว่าในสมการเชิงซ้อนที่นำมาทดสอบ ซึ่งแตกต่างจาก Young Hee Geum ที่ได้สรุปว่า วิธี LM เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสมที่สุดสำหรับวิธีทำซ้ำที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับ 3

5. เอกสารอ้างอิง

[1] กิตติ เสือแพร และมีชัย โลหะการ. (2560). การพัฒนาชุดฝึกทักษะการเขียนโปรแกรม SCILAB สำหรับนักศึกษาวิศวกรรมไฟฟ้า

[2] ธนาวุฒิ ประกอบผล. (2555). ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข. กรุงเทพมหานคร. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[3] เสาวนีย์ บุญแก้ว. (2541). วิธีทำซ้ำอันดับสามบางวิธีสำหรับหาผลเฉลยสมการไม่เชิงเส้น. สถาบันการศึกษา

[4] อำพล ธรรมเจริญ. (2553). วิธีการคำนวณและการวิเคราะห์เชิงตัวเลข. กรุงเทพมหานคร. โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์

[5] C.C. Bordeianu, C. Be¸sliu, Al. Jipaa, D. Felea, I.V. Grossu. 2008. Scilab software package for the study of dynamical systems. University of Bucharest, Faculty of Physics,Bucharest-Magurele, P.O. Box MG 11, 077125. Romania

[6] B.Neta, M.Scott, C.Chun. 2012. Basin attractors for various methods for multiple roots. Applied Mathematics and Computation. 218: 5043 - 5066.

[7] C. Chun, B. Neta. 2014. Basins of attraction for several optimal fourth order methods for multiple roots, Mathematics and Computers in Simulation. 103: 39- 59.

[8] Priyadarshni (Research Scholar IKGPTU), J.S. Sohal (Dr. Director). 2016. Improvement of artificial neural network based characterrecognition system. using SciLab. India ; LCET Katani Kalan. Ludhaina.

[9] Young Hee Geum. 2016. Basins of attraction for optimal third Order Methods for multiple roots. Journal of Computational and Applied Mathematics. 12: 583-590

[10] Y.H. Geum, Y.I. Kim, Cubic convergence of parameter-controlled Newton-secant method for multiple zeros, Journal of Computational and Applied Mathematics, 233 (2009). 931 - 937.

[13] Y.H. Geum, Y.I. Kim, A sixth-order family of three-point modied Newton-like multiple-root finders and the dynamics behind their extraneous fixed points, Applied Mathematics and Computation, 283 (2016),120-140. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.02.029

[14] Young Hee Geum, Basins of Attraction for Optimal Third Order Methods for Multiple Roots. Applied Mathematical Sciences, Vol. 10, 2016, no. 12, 583–590. http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.6125