

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับ 4 สำหรับรากซ้ำ

The comparison of the iterative methods performance with the fourth-order of convergence for multiple root

บรรชาชาญ น้อยบาท¹ พันธการณ์ อายุยืน² และ วัชร วงศา³

^{1,2,3}สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

¹E-mail: banchachan.p@gmail.com ; ²Email : pantakan.doe@gmail.com ; ³Email : watchara.ws@bru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาวิธีทำซ้ำที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับ 4 จำนวน 2 วิธี คือวิธี LZ11 และ LZ12 และทำการคำนวณผลเชิงตัวเลขกับสมการไม่เชิงเส้นทั้ง 5 สมการ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับ 4 ที่เหมาะสมที่สุด โดยใช้รูปภาพในการแสดงผลการคำนวณเชิงตัวเลข ที่แสดงให้เห็นถึงความหลากหลายของบริเวณการลู่เข้าและลู่ออกในแต่ละสมการ ผลการทดลองเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าวิธี LZ11 มีประสิทธิภาพมากกว่าวิธี LZ12

คำสำคัญ : อันดับการลู่เข้า, รากซ้ำ, บริเวณการลู่เข้า

Abstract

This research is to study the iteration on basins of attraction with the fourth-order of convergence in two methods including LZ11 and LZ12, and also calculate the numerical results with the five nonlinear equations. The objective of the research is to compare the performance of proper iterative method with fourth-order of convergence by using the illustration for interpreting the calculation of numerical result that shows varieties of basin of attraction and divergence in each equation. The numerical experiment results demonstrate that the LZ11 method is more effective and proper than LZ12.

Keywords : order of convergent, multiple root, basin of attraction

1. บทนำ

ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ปัญหาที่มักเกิดขึ้นอยู่เสมอ ขณะทำการคำนวณผลเชิงตัวเลขในการหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้น นั่นคือมีฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และต้องการหาค่า x ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = 0$ แต่ฟังก์ชัน $f(x)$ โดยทั่วไปไม่อยู่ในรูปแบบที่ง่ายต่อการหาคำตอบของฟังก์ชัน เพื่อแก้ปัญหาจึงได้มีการศึกษา และนำวิธีการทำซ้ำต่าง ๆ เพื่อช่วยในการหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นหนึ่งในวิธีการทำซ้ำ นั้นคือ วิธีนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งเป็นวิธีที่รู้จักกันอย่างกว้างขวาง เนื่องจากเป็นวิธีที่กำหนดค่าเริ่มต้นเพียงค่าเดียว และใช้อนุพันธ์ทรอบในการทำซ้ำ ซึ่งถือได้ว่าวิธีนิวตัน-ราฟสันเป็นอีกหนึ่งวิธีที่นักวิจัยจำนวนมากได้ทำการปรับปรุง เพื่อสร้างระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบใหม่ และมีอันดับการลู่เข้าที่มากกว่าเดิม อาทิ B. Liu และ X. Zhou [1] ได้นำวิธีนิวตัน-ราฟสันมาปรับปรุงด้วยวิธีสองขั้นตอน และได้วิธีทำซ้ำแบบใหม่จำนวน 2 วิธี ซึ่งมีอันดับการลู่เข้าเท่ากับสี่ ต่อมา Benty Neta และ Changbum Chun [2] ได้นำวิธีการทำซ้ำอันดับ 4 จำนวน 5 วิธี ซึ่งเป็นวิธีการทำซ้ำของ Li et al. [3] และวิธีการทำซ้ำของ B. Liu และ X. Zhou มาทำการทดสอบเชิงตัวเลขกับสมการไม่เชิงเส้นทั้ง 5 สมการ เพื่อเปรียบเทียบ

ประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับสี่ที่เหมาะสมที่สุด โดยพิจารณาจากบริเวณการลู่เข้า ที่แสดงในรูปแบบของรูปภาพ

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้นำวิธีการทำซ้ำของ Liu และ Zhou จำนวนสองวิธี คือวิธี LZ11 และ LZ12 นำมาทดสอบเชิงตัวเลขกับสมการไม่เชิงเส้นทั้ง 5 สมการที่มีภาวะรากซ้ำ 2, 3, 4 และ 5 โดยสมการที่นำมาทดสอบนั้นเราได้เปลี่ยนสมการใหม่จากงานวิจัยเดิมของ Benty Neta และ Changbum Chun เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับสี่ที่เหมาะสมที่สุด โดยเราจะสร้างบริเวณการลู่เข้าสำหรับรากซ้ำ ที่แสดงผลการคำนวณเชิงตัวเลขในรูปแบบของรูปภาพ เพื่อให้เข้าใจถึงบริเวณการลู่เข้า และลู่ออกของวิธีการทำซ้ำในการค้นหารากของแต่ละสมการ และในส่วนประกอบที่สำคัญอีกอย่างในคำนวณผลเชิงตัวเลข คือต้องเลือกจุดเริ่มต้นที่ดีที่อยู่ในช่วงปิดของรากของสมการไม่เชิงเส้น

2. วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยนี้ได้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำ LZ11 และ LZ12 โดยใช้การคำนวณผลเชิงตัวเลขของ 2 วิธีในการหารากของ 5 สมการที่แตกต่างกัน ซึ่งสมการที่นำมาทดสอบ และจุดกริดแต่ละจุดจากรูปภาพจะมีสีต่างกันตามการลู่เข้าสู่ค่ารากใดค่า

รากหนึ่งของสมการ และในส่วนของจุดสีดำเกิดจากการทำซ้ำเกิน 40 รอบ ซึ่งกำหนดเป็นเกณฑ์การลู่ออก โดยจะใช้โปรแกรม Scilab 6.0.2 บนระบบปฏิบัติการ window 10 และสมการที่นำมาทดสอบมีภาวะรากซ้ำ $m = 2, 3, 4, 5$ ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 สมการที่ใช้ในการทดสอบ และรากของสมการ

สมการไม่เชิงเส้น	รากของสมการ
$T_1 = (z^3 + z - 5)^2$	$-0.75799 \pm 1.65035i, -1.51598i$
$T_2 = (z^3 + z - 1)^2$	$-0.34116 \pm 1.16541i, 0.68223i$
$T_3 = (z^2 - 3)^5$	± 1.73705
$T_4 = (z^2 + 2z + 3)^4$	$1.00000 \pm 1.41421i$
$T_5 = (z^2 - 5)^3$	± 2.23606

สำหรับการคำนวณค่ารากของสมการไม่เชิงเส้นที่รู้จักกันดี และมีชื่อเสียงคือระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ต่อมา B. Liu และ X. Zhou ได้นำเสนอวิธี LZ11 และ LZ12 ที่ปรับปรุงจากระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน ได้ดังนี้

$$\text{LZ11} \quad \begin{cases} x_{n+1} = y_n - m \left(w_n + \frac{2m}{m-1} w_n^2 \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ y_n = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

เมื่อ m คือ ภาวะรากซ้ำอันดับที่ m และ $w_n = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$

$$\text{LZ12} \quad \begin{cases} x_{n+1} = y_n + w_n + \frac{(m-1)mw_n}{1-m+2mw_n} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ y_n = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

เมื่อ m คือ ภาวะรากซ้ำอันดับที่ m และ $w_n = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$

จากวิธีการทำซ้ำ LZ11 และ LZ12 เราจึงได้นำทั้งสองวิธีมาทำการทดสอบเชิงตัวเลข เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำทั้งสองวิธีในรูปแบบของรูปภาพ เพื่อแสดงบริเวณการลู่ออกและลู่ออกของจุดเริ่มต้นต่าง ๆ ในโดเมนของจุดเริ่มต้นที่ปกคลุมรากของสมการ และสำหรับขั้นตอนในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำ LZ11 และ LZ12

ขั้นตอนที่ 1 จัดสมการไม่เชิงเส้นทั้ง 5 สมการ ให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนาม

$$T_1(z) = (z^3 + z - 5)^2$$

$$T_2(z) = (z^5 - 7)^2$$

$$T_3(z) = (z^3 - z - 3)^3$$

$$T_4(z) = (z^2 - z)^3$$

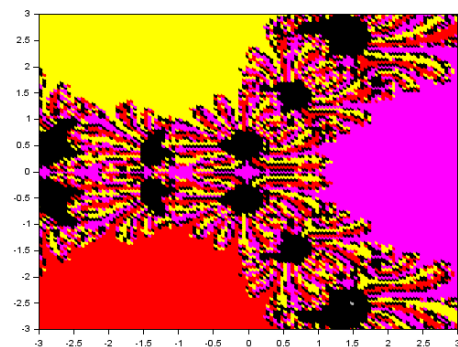
$$T_5(z) = (z^2 - 3)^4$$

ขั้นตอนที่ 2 นำฟังก์ชันพหุนามแต่ละฟังก์ชันทำการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำ LZ11 และ LZ12

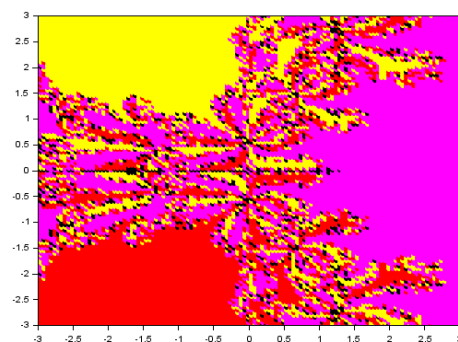
ขั้นตอนที่ 3 นำผลที่ได้จาก ขั้นตอนที่ 2 อภิปราย และสรุปผล

3. อภิปรายผล

จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำที่มีอันดับการลู่ออกเท่ากับ 4 สำหรับวิธีการทำซ้ำ LZ11 และวิธีการทำซ้ำ LZ12 ที่ทำการทดสอบกับสมการทั้ง 5 สมการ จะเห็นว่าในทุกพื้นที่ที่สี่เหลี่ยมขนาด 6×6 ที่ปกคลุมรากของแต่ละสมการที่นำมาทดสอบ โดยเราได้ทำการแบ่งกริดขนาด 120×120 ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส เพื่อใช้เป็นจุดเริ่มต้นของวิธีการทำซ้ำ ซึ่งสามารถแสดงผลการทดลองเชิงตัวเลขจากภาพประกอบต่อไปนี้

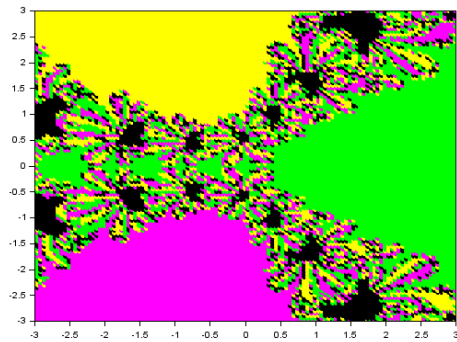


LZ11.

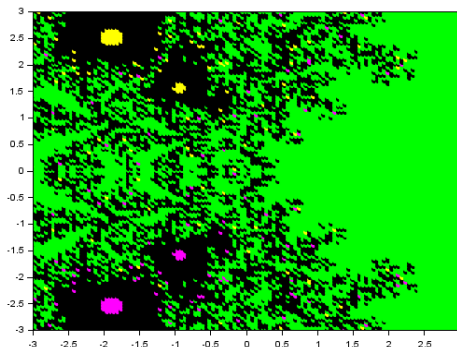


LZ12.

ภาพประกอบที่ 1 ภาพด้านบนสำหรับวิธี LZ11 และภาพด้านล่างสำหรับวิธี LZ12 สำหรับพหุนาม $T_1(z) = (z^3 + z - 5)^2$ ที่มีรากเป็น $-0.75799 \pm 1.65035i, -1.51598i$ และมีภาวะรากซ้ำ $m=2$ จากภาพประกอบที่ 1 จะเห็นว่าวิธี LZ12 เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับพหุนาม $T_1(z)$ เนื่องจากวิธี LZ11 แสดงจุดสีดำเป็นจำนวนมากกว่า

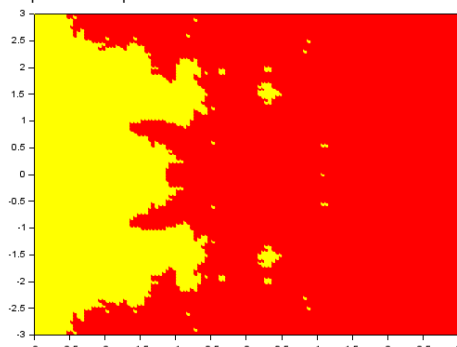


LZ11.

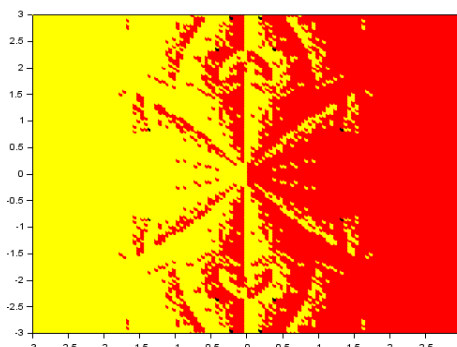


LZ12.

ภาพประกอบที่ 2 ภาพด้านบนสำหรับวิธี LZ11 และภาพด้านล่างสำหรับวิธี LZ12 สำหรับพหุนาม $T_2(z) = (z^3 + z - 5)^2$ ที่มีรากเป็น $-0.34116 \pm 1.16541i, 0.68223i$ และมีภาวะรากซ้ำ $m=2$ จะเห็นว่าวิธี LZ11 แสดงจุดสีดำเพียงเล็กน้อย และสามารถเข้าสู่รากที่แตกต่างกันของสมการได้มากกว่าวิธี LZ12 ดังนั้นวิธี LZ11 เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับพหุนาม $T_2(z)$



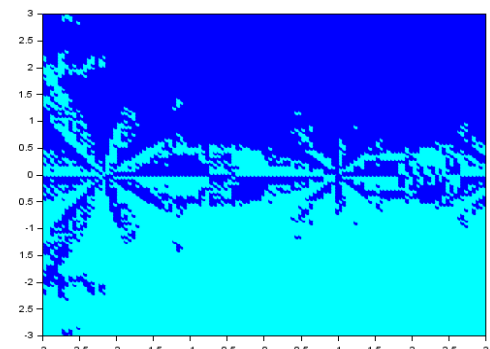
LZ11.



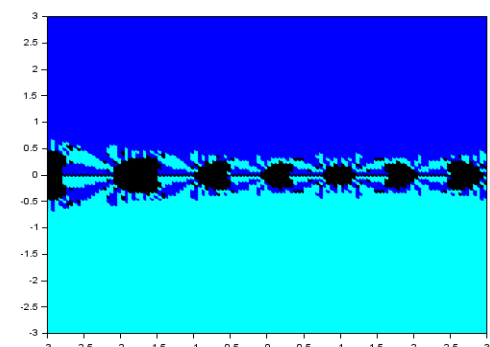
LZ12.

ภาพประกอบที่ 3 ภาพด้านบนสำหรับวิธี LZ11 และภาพด้านล่างสำหรับวิธี LZ12 สำหรับพหุนาม $T_3(z) = (z^2 - 3)^5$ ที่มีรากเป็น ± 1.73705 และมีภาวะรากซ้ำ $m=5$ จะเห็นว่าวิธี LZ11 ไม่แสดงจุด

สีดำแต่วิธี LZ12 แสดงจุดสีดำเล็กน้อย ดังนั้น วิธี LZ11 เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับพหุนาม $T_3(z)$

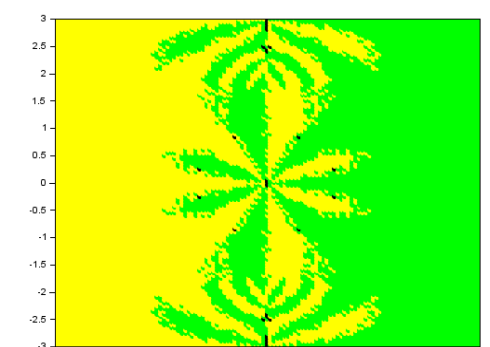


LZ11.

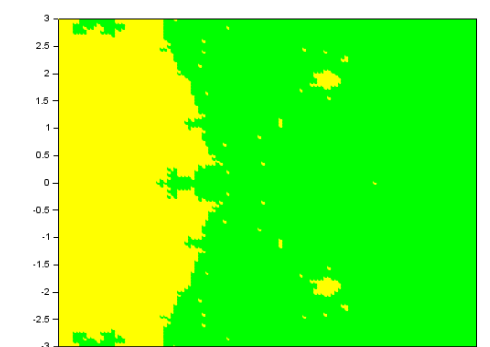


LZ12.

ภาพประกอบที่ 4 ภาพด้านบนสำหรับวิธี LZ11 และภาพด้านล่างสำหรับวิธี LZ12 สำหรับพหุนาม $T_4(z) = (z^2 - 2z + 3)^4$ ที่มีรากเป็น $1.00000 \pm 1.41421i$ และมีภาวะรากซ้ำ $m=4$ จะเห็นว่าวิธี LZ11 มีการเข้าสู่ที่ตึกกว่า เนื่องจากไม่มีจุดสีดำเหมือนวิธี LZ12 ดังนั้นวิธี LZ11 เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับพหุนาม $T_4(z)$



LZ11.



LZ12.

ภาพประกอบที่ 5 ภาพด้านบนสำหรับวิธี LZ11 และภาพด้านล่าง สำหรับวิธี LZ12 สำหรับพหุนาม $T_5(z) = (z^2 - 5)^3$ ที่มีรากเป็น ± 2.23606 และมีภาวะรากซ้ำ $m=3$ จะเห็นว่าวิธี LZ12 ไม่แสดงจุดสีดำ แต่วิธี LZ11 แสดงจุดสีดำเพียงเล็กน้อย ดังนั้นวิธี LZ12 เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับพหุนาม $T_5(z)$

4. สรุปผลการวิจัย

จากที่ได้นำเสนอวิธีการทำซ้ำอันดับ 4 ที่ดีที่สุด 2 วิธี คือวิธี LZ11 และ LZ12 เพื่อหาบริเวณการลู่เข้าที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากับ 4 สำหรับรากซ้ำ เห็นได้ว่า วิธี LZ11 มีจุดและบริเวณการลู่เข้ามากกว่าวิธี LZ12 นั่นคือ วิธี LZ11 เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับสมการ ที่นำมาทดสอบ

5. เอกสารอ้างอิง

- [1] B. Liu, X. Zhou, A new family of fourth-order methods for multiple roots of nonlinear equations, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 18 (2013) 143-152.
- [2] C. Chun, B. Neta, Basin of attraction for several optimal fourth order methods for multiple roots, *Mathematic and Computers in Simulation*, **103** 59. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2014.03.007>.
- [3] S.G. Li, L.Z. Cheng, B. Neta, Some fourth-order nonlinear solvers With closed formulae for multiple roots, *Comput. Math. Applic.* 59 (2010) 126-135.
- [4] C. Dong, A family of multipoint iterative functions for finding multiple root of equations, *Intern. J. Computer Math.* 21 (1987) 363-367.
- [5] E. R. Vrscay, W. J. Gilbert, Extraneous fixed points, basin boundaries and chaotic dynamics for Schroder and konig rational iteration functions, *Numer. Math.* 52 (1998) 1-16.
- [6] M. Scott, B. Neta, C. Chun, Basin attractors for various methods, *Appl Math. Comput.* 218 (2011) 2584-2599
- [7] S. G. Li, Z. Cheng, B. Neta, Some fourth-order nonlinear solvers with closed formulae for multiple root, *Comput. Applic.* 59 (2010) 126-135.
- [8] S. Li, X. Liao, L. Cheng. A new fourth-order iterative method for finding multiple root of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* **215**:1288-1292, 2009.
- [9] S. Li, X. Cheng, B. Neta, Some fourth-order nonlinear solvers with closed formulae for multiple roots, *Comput. Math. Appl.*, **59**:126-135, 2010.

- [10] T. Carvalho, M. Teixeira, Basin of attraction of a cusp-fold singularity in 3D piecewise smooth vector fields, *Journal of Mathematical and Analysis and Applications*, **418** (2014), 11-30
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.03.093>
- [11] X. Zhou, X. Chen, Y. Song, Constructing higher-order methods for obtaining the multiple roots of nonlinear equations, *J. Comput. Appl. Math.* 235 (2011)